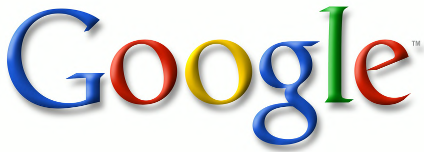
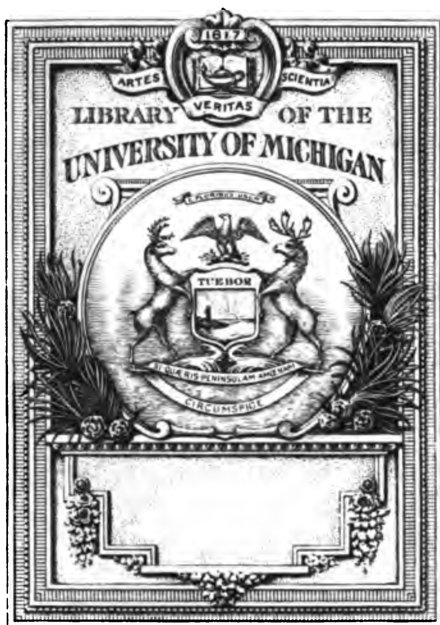



1817
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE

Νικολα Μιχος

Bourdon, Louis Pierre Marie

ΣΤΟΙΧΕΙΑ
ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ

ΥΠΟ

ΤΟΥ ΚΥΡΙΟΥ ΒΟΥΡΔΩΝΟΣ,

ΙΠΠΕΩΣ ΤΗΣ ΒΑΣΙΛΙΚΗΣ ΤΑΞΕΩΣ, ΤΟΥ ΤΑΓΜΑΤΟΣ ΤΗΣ ΤΙΜΗΣ, ΕΠΙΘΕΩΡΗΤΟΥ ΤΗΣ ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΤΩΝ ΠΑΡΙΣΙΩΝ, ΔΟΚΤΟΡΟΣ ΤΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ, κ. τ. λ.

Πόνημα Ἐγκριθὲν ἀπὸ τὸ Πανεπιστήμιον.



Μεταφρασθέντα ἐκ τοῦ Γαλλικοῦ

ἐκ τῆς τρίτης αὐτῶν ἐκδόσεως

ὑπὸ

ΤΟΥ ΔΟΚΤΟΡΟΣ ΙΩΑΝΝΟΥ ΚΑΡΑΝΔΗΝΟΥ ΚΕΦΑΛΛΗΝΟΣ,

Ἐφόρου τῆς Ἰονίου Ἀκαδημίας, Δεκάνου τῆς Σχολῆς τῆς Φιλοσοφίας, καὶ Προφέσσορος τῶν Μαθηματικῶν Ἐπιστημῶν.

ΕΝ ΒΙΕΝΝΗ ΤΗΣ ΑΥΣΤΡΙΑΣ.

1828.

Ἐκ τῆς τυπογραφίας Ἀντωνίου Αὐκοίλου.

(Anton v. Haykul.)

ΠΡΟΣ ΤΟΝ ΕΞΟΧΩΤΑΤΟΝ

ΣΙΡ ΦΕΔΕΡΙΚΟΝ ΑΔΑΜ,

ΙΠΠΕΑ ΜΕΓΑΛΟΣΤΑΥΡΟΝ ΤΟΥ ΔΙΑΠΡΕΠΟΥΣ ΤΑΓΜΑΤΟΣ ΤΟΥ Α. ΜΙΧΑΗΛ ΚΑΙ Α. ΓΕΩΓΙΟΥ, ΙΠΠΕΑ ΚΟΜΜΕΝΔΑΤΩΡΑ ΤΟΥ ΕΝΤΙΜΟΤΑΤΟΥ ΣΤΡΑΤΙΩΤΙΚΟΥ ΤΑΓΜΑΤΟΣ ΤΟΥ ΛΟΥΤΡΟΥ κτλ. κτλ. κτλ.

ΓΕΝΙΚΟΝ ΑΡΧΙΣΤΡΑΤΗΓΟΝ ΤΩΝ ΔΥΝΑΜΕΩΝ ΤΗΣ Β. Α. Μ. ΕΙΣ ΤΑΣ ΙΟΝΙΟΥΣ ΝΗΣΟΥΣ, ΚΑΙ ΛΟΡΔ ΥΨΗΛΟΝ ΕΠΙΤΡΟΠΟΝ ΕΙΣ ΤΑΣ ΠΟΛΙΤΕΙΑΣ ΤΩΝ ΑΥΤΩΝ ΝΗΣΩΝ.



ΕΞΟΧΩΤΑΤΕ!

Εἶναι ἀρκετὰ γνωστὴ ἡ ἀξία τῆς Ἀριθμητικῆς καὶ Ἀλγέβρας τοῦ Κυρίου Βουρδῶν καὶ τῆς Γεωμετρίας καὶ εὐθυγράμμου καὶ σφαιρικῆς Τριγωνομετρίας τοῦ Κυρίου Λεγένδρου. Γνωστὴ ἐπίσης εἶναι ἡ μεγάλη ἀνάγκη τὴν ὁποίαν ἀπὸ πλήρη μαθηματικῆς σειρὰν ἔχουσιν αἱ Ἰονικαὶ Πολιτεῖαι καὶ ἡ Ἑλλὰς ὅλη. Ἐξοχώτατε! εἰκοσαετὴς σπουδὴ καὶ ἄσκησις μὲ ἔδιδαν τὸ δικαίωμα τοῦ νὰ μεθερμηνεύσω τὰς ἰδέας τοῦ Βουρδῶν καὶ Λεγένδρου καὶ νὰ ἀναπληρώσω τὴν χρείαν τῆς πατρίδος μου. ὅθεν καὶ ἐμετάφρασα τὰ συγγράμματά των. Πλὴν ὅμως χωρὶς τὴν ἀρωγὴν τῆς ἐξοχότητός

σας οἱ κόποιμου ἤθελαν απομένη χωρὶς καρπόν· δἰ αὐτῆς ἐτέθην εἰς κατάστασιν νὰ δημοσιεύσω τὰ ὠφέλιμα ταῦτα καὶ ὀνομαστὰ μαθηματικὰ πονήματα. Συγχωρήσατέ με λοιπὸν ἂν τολμῶ νὰ βάλω τὸ ὄνομά σας εἰς τὴν κεφαλὴν τῶν βιβλίων, τὰ ὁποῖα δίδω εἰς τοὺς τύπους.

Ἐὰν ταῦτα ἀνήκουσιν εἰς ἐμὲ, διότι τὰ ἐσαφήνισα μὲ νέας ἐξηγήσεις, πολὺ μᾶλλον νομίζω ἀνήκουν τῆς ἐξοχότητός σας; ὅς τις τὰ κατασταίνετε χρήσιμα λαμβάνοντές τα ὑπὸ τὴν προστασίαν σας.

Ἔχω τὴν τιμὴν νὰ εἶμαι τῆς ὑμετέρας ἐξοχότητος ταπεινότατος· καὶ εὐπειθέστατος δοῦλος

Κερκύρᾳ, τῇ 15 Ἀπριλίου 1828.

Δρ. Ι. Καρανδηνός.

Πρὸς τοὺς Ὁμογενεῖς.

Πρὸ πολλῶν ἤδη χρόνων, φίλτατοι ὁμογενεῖς, ἐλυπούμην μεγάλως διὰ τὴν ὁποίαν εἴχομεν μέχρι τοῦ νῦν ἔλλειψιν τελείου τινὸς ὅσον δυνατὸν καὶ μεθοδικοῦ Μαθηματικοῦ συντάγματος· καὶ μ' ὅλον ὅτι πολλοὶ τῶν πεπαιδευμένων συμπολιτῶν μας ἐπεχείρησαν νὰ διορθώσωσι τὴν ἔλλειψιν ταύτην, μ' ὅλον τοῦτο δὲν τὴν διώρθωσαν ἐντελῶς. Πρῶτον, ἐπειδὴ ὅσα μαθηματικὰ συντάγματα ἐφάνησαν ἢ ἀπ' αὐτοὺς συνθειμένα, ἢ ἀπ' ἄλλας γλώσσας μεταφρασμένα, ἦσαν γραμμένα εἰς τὴν ἀρχαίαν Ἑλληνικὴν, γνωστὴν μὲν εἰς τὸ μυριοστημόριον τοῦ γένους, ἄγνωστον δὲ εἰς τοὺς πολλούς. Δεύτερον, ἐπειδὴ μήτ' αὐτὰ μήτ' ὅσα νεωστὶ εἰς τὴν νέαν Ἑλληνικὴν ἐξεδόθησαν, ἦσαν πλήρη καὶ ἐντελῶς μεθοδικὰ, ἀλλ' ἱκανὰ μὲν νὰ ἐγείρωσι τὸν πρὸς τὰς ἐπιστήμας ζῆλον τοῦ γένους, ὄχι ὅμως καὶ κατὰ πάντα νὰ τὸν εὐχαριστήσωσι. Πλὴν λέγων ταῦτα, εἶμαι πολὺ μακρὰν ἀπὸ τοῦ νὰ παραπο-

νηθῶ εἰς τίποτε πρὸς τοὺς ἐνδόξους τούτους συμπολίτας μου, τῶν ὁποίων τὴν σοφίαν καὶ ἐπαινῶ καὶ θαυμάζω, καὶ οἱ ὁποῖοι εἶναι τὸ καύχημα τῶν Ἑλλήνων, ὡς οἱ περικλεέστατοι εἰς τὴν παιδείαν Εὐγένιος ὁ Βούλγαρις καὶ Νικηφόρος ὁ Θεοτόκης, ὁ πολυμαθὴς καὶ εἰς ἄκρον φιλόπονος Κούμας, ὁ Βενιαμὶν . . . . . καὶ ἐφεξῆς ὅλοι οἱ λοιποί. Ἀλλ' ἐκ τούτων ἄλλοι ἀσχολούμενοι εἰς ἄλλα ἐπωφελέστερα εἰς τὸ Ἑλληνικὸν ἔθνος, δὲν ἔλαβον ἱκανὸν καιρὸν καὶ νὰ συντάξωσιν ἢ νὰ μεταφράσωσι τελειότερα μαθηματικὰ συντάγματα, ἄλλοι γνωρίζοντες ἴσως τὴν ἀκόμη ἀδυναμίαν τοῦ γένους εἰς τὸ νὰ ἐννοήσῃ τὰς ὑψηλὰς τοῦ Καρτεσίου, Νεύθωνος, Λακροῖου . . . . ἐννοίας, δὲν ἔκριναν εὔλογον νὰ τὰ γνωστοποιήσωσιν εἰς αὐτό.

Ἀλλ' εἰς τούτους μὲν ἡμεῖς ἀποδίδομεν ὅλον τὸ σέβας καὶ τὴν εὐγνωμοσύνην διὰ τοὺς ὑπερμέτρους ἀγῶνάς των. Τὸ γένος ὅμως, τὸ ὁποῖον πρὸ ἱκανῶν χρόνων ἄρχισε μὲ γιγαντιαῖα βήματα νὰ προβαίνῃ εἰς τὸν φωτισμόν του, ἄρχισε φυσικῷ τῷ λόγῳ καὶ νὰ ζητῇ ὁπωσοῦν τελειότερα μαθήματα, ὄχι μόνον εἰς πᾶν εἶδος ἐπιστήμης ἢ τέχνης, ἀλλὰ καὶ εἰς τὰς μαθηματικὰς ἐπιστήμας. Ὅθεν ἐγὼ ἐπιθυμῶν μὲν νὰ εὐχαριστήσω, ὅσον τὸ δυνατόν, τὴν κατὰ τοῦτο ἐπιθυμίαν του, γνωρίζων δὲ ἐμαυτὸν ἀνίκανον νὰ συνθέσω μαθηματικόν τι σύνταγμα καλήτερον ἀφ' ὅσα οἱ μεγάλοι ἄν-

δρες Λακρόϊοι, Λέγενδροι, ... ἐσύνθεσαν. ἀπεφάσισα νὰ μεταφράσω ἕνα τούτων, καὶ ἐπροτίμησα τὸν Λακρόϊον. Πλὴν μόλις ἐτελείωσα τὴν μετάφρασιν, καὶ μ' ἔλαχαν μὲ χαράν μου μεγάλην εἰς χεῖρας ἡ Ἀριθμητικὴ καὶ Ἄλγεβρα τοῦ μεθοδικωτάτου Βουρδῶνος. Ὅθεν θεωρήσας αὐτὰς, καὶ κρίνας πολὺ παρὰ τὰς τοῦ Λακροΐου μεθοδικωτέρας καὶ σαφεστέρας, ἑπομένως καὶ ἁρμοδιωτέρας εἰς τὸ γένος μου, ἄφησα τὸ χαίρειν εἰς τοὺς προτέρους μου κόπους, καὶ ἐβυθίσθην εἰς ἄλλους νέους, ἤτοι εἰς τὴν μετάφρασιν τῆς τοῦ κυρίου Βουρδῶνος Ἀριθμητικῆς καὶ Ἀλγέβρας. Γεωμετρίαν δὲ καὶ Τριγωνομετρίαν ἐπρόκρινα τοῦ Λεγένδρου. Παρ' ἐμοὶ κριτῇ αἱ περὶ Ἀριθμητικῆς καὶ Ἀλγέβρας πραγματεῖαι τοῦ Βουρδῶνος καὶ αἱ περὶ τῆς Γεωμετρίας καὶ Τριγωνομετρίας τοῦ Λεγένδρου εἶναι αἱ πληρέστεραι, καὶ μεθοδικώτεραι ἀφ' ὅσας ἄλλας ἄλλος τις ἠμπορεῖ νὰ ἐκλέξῃ, ἐχούσας σιμὰ εἰς τὸ πλῆρες καὶ τὸ μεθοδικόν.

Ἰδοὺ λοιπὸν δημοσιεύω τὸ στοιχειῶδες τοῦτο μαθηματικὸν σύνταγμα εἰς τὸ γένος μου, παρακαλῶν νὰ τὸ δεχθῇ εὐμενῶς, καὶ ν' ἀποβλέψῃ ὄχι εἰς τῆς προσφορᾶς τὴν μικρότητα, ἀλλ' εἰς τὴν τοῦ προσφέροντος ἀγαθὴν προαίρεσιν, καὶ ἂν ὑποδοχῆς καλῆς ἀξιωθῇ τὸ ταπεινὸν τοῦτο πόνημά μου, θέλω τυπώσει ἀμέσως μετ' αὐτὸ καὶ τὰ ὑψηλότερα τῆς Μαθηματικῆς μέρη, εἰς τὰ ὁποῖα ἔκλεξα παρομοίως τοὺς ἀρίστους συγγρα-

φεῖς. Εἴδε μὴ, παύω, ἔχων κἂν τὴν παρηγορίαν, ὅτι ἐπροθυμήθην νὰ πληρώσω πρὸς τὴν πατρίδα ὅσον ἠδυνήθην μέρος τοῦ χρέους μου.

Ἤδη δὲ ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον ἔχω, τοῦτο καὶ δίδω καὶ εἰς ὅ,τι δύναμαι, κοπιάζω καὶ θέλω κοπιάζει ὅσον ζῶ ἐπ' ἀγαθῷ τῆς πατρίδος μου. Εἴθε νὰ ἠμποροῦσα νὰ συνεισφέρω τί περισσότερον καὶ καλήτερον.

1828, κατὰ μῆνα Ἀπρίλιον, ἐν Κερκύρᾳ.

Ἰωάννης Καρανδηνός.

Εἴδησις τοῦ Συγγραφέως.

Ἡ μεθοδικὴ σύστασις τῆς ὀνοματολογίας τῶν ἀριθμῶν, καὶ ὁ τρόπος τοῦ γράφειν αὐτοὺς διὰ χαρακτήρων, ἡ κατὰ τὸν τρόπον τῆς παραστάσεως αὐτῶν καὶ φύσεως τῶν εἰς αὐτοὺς ἐκτελουμένων ἐργασιῶν ζήτησις τῶν μεθόδων, ὅσαι φέρουσιν εἰς ἐξαγόμενα τῶν ἐργασιῶν τούτων, ἡ θεωρία ἔπειτα τῶν ἀριθμῶν καθ' ἕνα τινὰ τρόπον γενικὸν καὶ ἀνεξάρτητον ἀπὸ πᾶν σύστημα ἀριθμήσεως, ἡ εἰσχώρησις, διὰ νὰ εἴπω οὕτως, εἰς τὰ ἐνδότερα αὐτῶν πρὸς ἀνακάλυψιν τῶν ἰδιοτήτων, ὅσαι ἀποβλέπουν τὴν σύνθεσιν καὶ ἀνάλυσιν αὐτῶν, ἡ ἐκ τῶν ἰδιοτήτων τούτων ἐξαγωγὴ νέων ἄλλων ἰδιοτήτων, μετασχηματισμῶν, καὶ μέσων τοῦ συντέμνειν τὰς ἤδη ἐγνωσμένας μεθόδους, τέλος πάντων, ἡ θεμελίωσις, ὅσον τὸ δυνατὸν, στερεῶν κανόνων πρὸς ἐπίλυσιν παντὸς εἴδους ζητημάτων, ἀπὸ τοὺς

ὁποίους ἐξάγονται οἱ λόγοι μεταξὺ τῶν διαφόρων εἰς αὐτὰ περιεχομένων ποσοτήτων, συγκροτοῦν τὴν παροῦσαν τῆς Ἀριθμητικῆς πραγματείαν.

Ἐδιαίρεσα τὸ πόνημα εἰς δύο μέρη, καὶ τούτων ἕκαστον εἰς τέσσαρα κεφάλαια.

Τοῦ πρώτου μέρους πρώτιστος σκοπὸς εἶναι ἡ ἀνάπτυξις τῶν τεσσάρων θεμελιωδῶν κανόνων, „τῆς Προσθέσεως, τῆς Ἀφαιρέσεως, τοῦ Πολλαπλασιασμοῦ καὶ τῆς Διαιρέσεως." Καὶ τὸ μὲν πρῶτον κεφάλαιον περιλαμβάνει τὰς ἐπὶ τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν ἐργασίας· τὸ δὲ δεύτερον τὰς ἐπὶ ὁποιωνδήποτε κλασμάτων ἐργασίας, τὸ δὲ τρίτον καὶ τέταρτον, τὰ ὁποῖα εἶναι ἔκτασίς τις τοῦ δευτέρου, περιλαμβάνουν τοὺς συμμιγεῖς ἀριθμοὺς καὶ τὰ δεκαδικὰ κλάσματα, μὲ τὰ ὁποῖα συνδέεται φυσικῶς τὸ σύστημα τοῦ νέου βάρους, ἢ τῶν νέων σταθμῶν, καὶ τῶν νέων μέτρων. Μ' ὅλον ὅτι πολλὰ ζητήματα ἀποβλέποντα τὴν σύγκρισιν τῶν νέων μέτρων πρὸς τὰ παλαιὰ μ' ὁδηγοῦν εἰς ἐργασίας ἐπὶ τῶν δεκαδικῶν κλασμάτων μεγάλου τινὸς ἀριθμοῦ χαρακτήρων, ἐγὼ τελειόνω τὸ τέταρτον κεφάλαιον μὲ τὴν ἔκθεσιν δύο συντόμων μεθόδων τοῦ πολλασιασμοῦ καὶ τῆς διαιρέσεως.

Τοῦ δευτέρου δὲ μέρους σκοπὸς εἶναι πρὸ πάντων ἡ ἀνάπτυξις τῶν θεωριῶν, τὰς ὁποίας διὰ ν' ἀ-

ποδήξω, μετεχειρίσθην νέα σημεῖα πρὸς παράστασιν τῶν ἀριθμῶν καὶ τῶν ἐργασιῶν, ὅσαι εἶναι δυνατὸν νὰ ἐκτελῶνται ἐπάνω εἰς αὐτούς. Καὶ λοιπὸν δεικνύων εἰς εἰσαγωγήν τινὰ τὴν χρῆσιν τῶν σημείων τούτων καὶ τὸν τρόπον τοῦ ὑπολογίζεσθαι ἐπὶ τῶν διὰ γραμμάτων ἐκφραζομένων ἀριθμῶν, ἀναπτύσσω τὴν θεωρίαν τῶν διαφόρων συστημάτων τῆς ἀριθμήσεως, καὶ τὰς ἰδιότητας, ὅσαι ἔχουν σχέσιν μὲ τὴν διαιρετότητα τῶν ἀριθμῶν, μὲ τὴν σύνθεσιν καὶ εἰς παράγοντας ἀνάλυσιν αὐτῶν. Ἐπιστρέφων ἔπειτα εἰς ὅσα ἀνέφερα εἰς τὰ πρῶτα κεφάλαια, ἐξάγω ἀπὸ τὰς ἰδιότητας ταύτας, μετασχηματισμοὺς εἰς τὰς μεθόδους τῆς ἀναγωγῆς τῶν κλασμάτων εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν, καὶ τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου δύο ἢ πολλῶν ἀριθμῶν. Γνωστοποιῶ δὲ καὶ τὴν θεωρίαν τῶν περιοδικῶν δεκαδικῶν κλασμάτων, καὶ τὰς ἀρχικὰς ἰδιότητας τῶν συνεχῶν κλασμάτων. Τὰ διάφορα ταῦτα ἀντικείμενα συνιστοῦν τὸ πέμπτον κεφάλαιον.

Αἱ, τὰς ὁποίας ἐσύστησα εἰς τὴν εἰσαγωγὴν τοῦ δευτέρου μέρους, ἀρχαὶ, μὲ συγχωροῦν νὰ σαφηνίσω εἰς τὸ ἕκτον κεφάλαιον τὰς μεθόδους τῆς ἐξαγωγῆς τῆς τετραγωνικῆς καὶ κυβικῆς ῥίζης τῶν ἀριθμῶν. Ἡ γνῶσις τούτων εἶναι ἀναπόφευκτος εἰς τὴν ἀπὸ τῆς Ἀριθμητικῆς εἰς τὴν Γεωμετρίαν μετάβασιν.

Τὸ ἕβδομεν κεφάλαιον περιλαμβάνει τοὺς λόγους καὶ τὰς ἀναλογίας μὲ τὰς ἐφαρμογὰς αὐτῶν εἴς τινα τῶν ἐμπόρων καὶ τραπεζιτῶν συνήθη ζητήματα. Τοῦτο δὲ τὸ μέρος θεωρούμενον ὡς τὸ ἀξιολογώτερον τῆς Μαθηματικῆς, ἐπραγματεύθην μετὰ καθαρότητος καὶ ἀκριβείας.

Εἰς τὸ ὄγδοον δὲ καὶ τελευταῖον κεφάλαιον ἐκθέτονται τῶν Προόδων καὶ Λογαρίθμων αἱ ἀρχικαὶ ἰδιότητες. Ἐπρόσεξα μεγάλως εἰς τὴν περιγραφὴν τῆς τελευταίας ταύτης θεωρίας, ὡς ὠφελούσης ταμάλιστα εἰς τοὺς ὑπολογοστὰς (calculateurs)· διότι καὶ εἰς τὰς πλέον περιπεπλεγμένας ἐργασίας ἐφαρμόζεται.

Ἡ θεωρία τῶν λογαρίθμων τῶν κλασμάτων, καὶ ἡ ἀνάγκη νὰ ἐκφράζωνται καὶ οὗτοι ὡς οἱ τῶν μεγαλητέρων παρὰ τὴν μονάδα ἀριθμῶν λογάριθμοι, μᾶς φέρει φυσικῶς εἰς ἀρνητικοὺς ἀριθμούς, καὶ εἰς τὸν τρόπον νὰ μεταχειριζώμεθα αὐτοὺς εἰς τοὺς ὑπολογισμούς.

Τελειόνω τὸ κεφάλαιον τοῦτο, προσεγγίζων τὰς διαφόρους ἐργασίας μεταξύ των, ἀπὸ τὰς ὁποίας γεννᾶται νέος τις τρόπος τοῦ θεωρεῖν τοὺς λογαρίθμους, καὶ ὁ ὁποῖος δυνατὸν εἶναι νὰ λεχθῇ ἑβδόμη τῆς Ἀριθμητικῆς πρᾶξις.

Τίποτε ἀφ' ὅσα ἠμποροῦν νὰ καταστήσωσι πλήρες τὸ πόνημά μου, ὡς ἀπὸ τὸ σύντομον τοῦτο σχέδιον βλέπει πᾶς ἕνας, δὲν παρημέλησα.

Ἀλλὰ δημοσιεύων τὴν τρίτην ταύτην ἔκδοσιν, θέλω ἀποκριθῆ εἴς τινα τινῶν προφεσσόρων ἀνθίστασιν. Διατὶ τάχα εἰς τῆς Ἀριθμητικῆς τὰ στοιχεῖα νὰ εἰσάξω γνώσεις διόλου εἰς αὐτὴν ἀλλοτρίας, καὶ μᾶλλον εἰς τὴν Ἄλγεβραν ἀνηκούσας; Διότι ἐπαρατήρησα α', ὅτι ὅλοι οἱ Συγγραφεῖς, ὅσοι θελήσαντες νὰ γνωστοποιήσωσιν ἰδιότητας τινὰς τῶν ἀριθμῶν, δὲν μετεχειρίσθησαν τὰ σημεῖα τῆς Ἀλγέβρας, δὲν ἐδυνήθησαν νὰ τὰς παραστήσωσι μὲ πλήρη καὶ μεθοδικὸν τρόπον, καὶ ἐβιάσθησαν προσέτι νὰ μεταχειρισθῶσι σύντομα τινὰ σημεῖα ἀριθμητικῶν ἐργασιῶν. Διὰ τὸν δρόμον ὅμως, τὸν ὁποῖον ἐγὼ ἠκολούθησα, ἠμπόρεσα νὰ συστήσω μίαν ἅλυσον μεταξὺ τῶν ἰδιοτήτων καὶ τῶν ἀξιολογωτέρων ἐφαρμογῶν αὐτῶν.

β'. Αἱ ἰδιότητες αὗται, τῶν ὁποίων ἡ γνῶσις εἶναι, ἄφευκτος εἰς τοὺς θέλοντας νὰ μάθωσι κατὰ βάθος τὴν Ἀριθμητικὴν, ἠδύναντο μὲν νὰ ἐμβῶσιν εἰς τὰ στοιχεῖα τῆς Ἀλγέβρας, ἀλλ' ἤθελαν συντρίψει τὴν ἅλυσον τῶν θεωριῶν, ὅσαι συνιστοῦν τ' ἄλλο τοῦτο μέρος τῆς Μαθηματικῆς.

Εἰς τὴν πρώτην ἔκδοσιν τῆς Ἀλγέβρας μου ἔκρινα χρέος νὰ ἐκθέσω τὰς ἰδίας ταύτας ἰδιότητας, περὶ

τῶν ὁποίων ἔκαμα τινὰς παρατηρήσεις. Διὰ τοῦτο δημοσιεύων τὴν τῆς Ἀριθμητικῆς πραγματείαν, ἀπέδωκα, διὰ νὰ συμφωνήσω μ' αὐτὰς, εἰς τὸ μέρος τοῦτο τῆς Μαθηματικῆς, πᾶν ὅ,τι θεωρεῖται ἐν γένει, ὡς ἴδιον αὐτοῦ.

Θέλω προσθέσει τελευταῖον στοχασμὸν, ὅτι τὰ στοιχεῖα ταῦτα εἶναι διωρισμένα κυρίως διὰ τοὺς νέους ἐκείνους, ὅσοι ὑπομένουσι δυσκολίας, καὶ τῶν ὁποίων τὰ πρῶτα βήματα εἰς τὸν δρόμον τῶν ἐπιστημῶν πρέπει νὰ γίνωνται ἀσφαλῶς καὶ ἐπωφελῶς. Ὅθεν ἂς μὲ συγχωρηθῇ νὰ παραστήσω τὰς θεμελιώδεις ἀρχὰς μ' ὅσην εἶναι δυνατὸν ἀκρίβειαν.

ΠΙΝΑΞ
ΤΩΝ
ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ.

Μέρος Πρῶτον.

Εἰσαγωγή.

Κεφάλαιον Α΄.

Πράξεις ἐπὶ τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν.

Κεφάλαιον Β΄.

Περὶ τῶν κλασμάτων.

Κεφάλαιον Γ΄.

Περὶ τῶν Συμμιγῶν Ἀριθμῶν.

Κεφάλαιον Δ΄.

Περὶ τῶν δεκαδικῶν κλασμάτων, καὶ περὶ τοῦ νέου συστήματος τοῦ Βάρους καὶ τῶν Μέτρων.

§. α΄. Περὶ κλασμάτων δεκαδικῶν.

Μέρος Δεύτερον.

Κεφάλαιον Ε΄.

Γενικαὶ Ἰδιότητες τῶν ἀριθμῶν.

§. β'. Ἀρχαὶ περὶ πολλαπλασιασμοῦ καὶ διαιρέσεως.

Διαιρετότης τῶν ἀριθμῶν.

§. γ'. Περὶ τῶν περιοδικῶν δεκαδικῶν κλασμάτων.

§. δ'. Περὶ τῶν συνεχῶν κλασμάτων.

Κεφάλαιον Ϛ'.

Σχηματισμός τῶν δυνάμεων καὶ ἐξαγωγὴ τῶν τετραγωνικῶν καὶ κυβικῶν ῥιζῶν τῶν ἀριθμῶν.

§. α'. Ἐξαγωγὴ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης.

§. β'. Ἐξαγωγὴ τῆς κυβικῆς ῥίζης.

Κεφάλαιον Ζ'.

Ἐφαρμογαὶ τῶν τῆς ἀριθμητικῆς Μεθόδων. Θεωρία τῶν λόγων καὶ ἀναλογιῶν.

§. α'. Περὶ λόγων καὶ ἀναλογιῶν.

§. Περὶ τῆς μεθόδου τῶν τριῶν καὶ τῶν ἐξ αὐτῆς ἐξαρτωμένων μεθόδων.

Κεφάλαιον Η'.

Θεωρία τῶν Προόδων καὶ Λογαρίθμων.

§. α'. Περὶ τῶν προόδων.

§. β'. Περὶ τῶν Λογαρίθμων.

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ.

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟΝ.

Εἰσαγωγή.

§. 1. Καλεῖται μέγεθος ἢ ποσότης πᾶν ὅ,τι εἶναι δεκτικὸν αὐξήσεως ἢ ἐλαττώσεως, ὡς αἱ γραμμαὶ, αἱ ἐπιφάνειαι, οἱ χρόνοι καὶ τὰ βάρη. Ἀδύνατον δὲ εἶναι νὰ σχηματίσωμεν τελείαν ἰδέαν εἰς τὸν ἑαυτόν μας περὶ ποσότητος τινὸς, ἐὰν δὲν τὴν συγκρίνωμεν πρὸς ἄλλην τοῦ αὐτοῦ εἴδους. Ἡ δευτέρα αὕτη ποσότης καλεῖται μονὰς, καθ' ὅσον χρησιμεύει ὡς ὅρος συγκρίσεως ὅλων τῶν ποσοτήτων τοῦ ἰδίου εἴδους· καθὼς, ὅταν λέγωμεν, ὅτι ἓν τεῖχος ἔχει εἴκοσι μέτρων μῆκος, ἔχομεν τότε τὴν ἰδέαν τῆς μονάδος τοῦ μήκους, ἡ ὁποία καλεῖται μέτρον, ἔνθα ὑποθέτομεν, ὅτι, ἀφ' οὗ ἐφέραμεν εἴκοσι φορὰς τὸ μέτρον ἐπὶ τοῦ μήκους τοῦ τείχους, ἐφθάσαμεν εἰς τὸν σκοπόν μας.

Εἰς τὴν Μαθηματικὴν λοιπὸν ἡ μονὰς εἶναι ποσότης ὁποιουδήποτε εἴδους, λαμβανομένη κατὰ ἀρέσκειαν ἀπὸ τὴν φύσιν *), καὶ χρισιμεύει ὡς ὅρος συγκρίσεως εἰς ὅλας τὰς ποσότητας τοῦ ἰδίου εἴδους. Ἕπεται ἐκ τούτου, ὅτι εἶναι τόσα εἴδη μονάδων, ὅσα εἶναι εἴδη ποσοτήτων.

Καλεῖται Ἀριθμὸς τὸ ἐξαγόμενον τῆς συγκρίσεως ὁποιασδήποτε ποσότητος σχετικῶς πρὸς τὴν μονάδα της.

Ὁ ἀριθμὸς καλεῖται ἀκέραιος ἢ ὁλοσχερὴς **), ὅταν εἶναι ἄθροισμα πολλῶν μονάδων τοῦ ἰδίου εἴδους· οὕτως εἴκοσι φράγκα, τριάκοντα λίτραι, ὀκτὼ, δώδεκα, δεκαπέντε μονάδες ὁποιουδήποτε εἴδους εἶναι ἀκέραιος ἀριθμός.

Κλάσμα εἶναι μέρος μονάδος.

Ἀριθμὸς κλασματικὸς εἶναι τὸ ἄθροισμα πολλῶν μονάδων τοῦ αὐτοῦ εἴδους, καὶ κλάσματός τινὸς, ἢ μέρους τῆς τοιαύτης μονάδος.

§. 2. Ὅταν ἐκφράζοντες ἀριθμόν τινα, προσθέτωμεν μετὰ τὴν τοιαύτην ἔκφρασιν τὸ ὄνομα, τὸ ὁποῖον φανερόνει τὸ εἶδος τῆς ποσότητος λαμβανομένης ὡς μονάδος, ὁ ἀριθμὸς καλεῖται συγκεκριμένος· καθὼς πέντε μέτρα, δεκαπέντε ὧραι, ἓξ λέγαι, εἶναι ἀριθμοὶ συγκεκριμένοι· κατὰ πρῶτον ὅταν ἐκφράζωμεν ἀριθμὸν τινὰ, ἄλλην ἰδέαν δὲν λαμβάνομεν παρὰ ἐκείνην τῆς μονάδος, μὲ τὴν ὁποίαν συγκρίνομεν ἄλλην τινὰ ποσότητα τοῦ ἰδίου εἴδους· ἀλλὰ κατ᾽ ὀλίγον ὁ νοῦς συνειθίζων εἰς τὰ ἀφῃρημένα φθά-

---

*) Τὸ μέτρον, νέα μονὰς τοῦ μήκους, εἶναι μονὰς ληφθεῖσα ἀπὸ τὴν φύσιν· ὅρα ἀρ. 99.

**) Ἐπροτίμησα τὴν λέξιν «ἀκέραιος» ὡς κοινὴν καὶ συνήθη εἰς τὴν γλῶσσάν μας· ὁ Μ.

νει νὰ φαντασθῇ μίαν συλλογὴν πολλῶν ὁμοίων ὑποκειμένων, ἀλλ' ὁποιωνδήποτε, ἕκαστον τῶν ὁποίων εἶναι ἡ μονάς. Εἰς ταύτην τὴν περίστασιν ἡ συλλογὴ καλεῖται ἀριθμὸς ἀφῃρημένος, ἐπειδὴ ἐκφράζοντές την, κάμνομεν ἀφαίρεσιν τοῦ εἴδους τῆς μονάδος, εἰς τὴν ὁποίαν τὴν ἀνεφέραμεν. Καὶ οὕτω πρέπει νὰ θεωρῶμεν τοὺς ἀριθμοὺς εἰς τὴν ἔκθεσιν τῶν μεθόδων, ὅσαι ἀποβλέπουν τὰς διαφόρους ἐργασίας, τὰς ὁποίας μέλλομεν ἐπάνω εἰς αὐτοὺς νὰ ἐκτελέσωμεν, ἐὰν θέλωμεν νὰ ἦναι σταθεραὶ αὗται αἱ μέθοδοι, καὶ ἱκαναὶ νὰ ἐφαρμόζωνται εἰς ὅλα τὰ δυνατὰ ζητήματα.

Περὶ τῆς Ἀριθμήσεως.

§. 3. Αἱ πρῶται ἀναζητήσεις ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν ἐξ ἀνάγκης σκοπὸν εἶχαν νὰ δώσωσιν εἰς αὐτοὺς ὀνόματα εὐκολοενθύμητα, καὶ ἐπειδὴ ὑπάρχουν ἄπειροι ἀριθμοὶ, διότι εἰς ὁποῖονδήποτε σχηματισμένον ἀριθμὸν εἶναι δυνατὸν νὰ προστεθῇ νέα τις μονὰς καὶ νὰ σχηματισθῇ οὕτως ἄλλος ἀριθμὸς, εἰς τὸν ὁποῖον πάλιν ἠμπορεῖ νὰ προστεθῇ ἄλλη τις μονὰς, καὶ οὕτως ἐφεξῆς, ἐχρειάσθη νὰ εὑρεθῇ τὸ μέσον τοῦ ἐκφράζειν ὅλους τοὺς ἀριθμοὺς δι' ἀριθμοῦ λέξεων πεπερασμένου, αἱ ὁποῖαι ἁρμοδίως ἡ μία μὲ τὴν ἄλλην νὰ συμπλέκωνται, καὶ εἰς τοῦτο ἀφορᾷ ἡ λαλουμένη ἀρίθμησις.

Καὶ πρὸς ἀποφυγὴν τῆς διὰ πολλῶν γραμμάτων γραφῆς κάθε λέξεως, ἐχρειάσθη νὰ ἐφευρεθῇ σύντομος γραφὴ τῶν λέξεων καὶ τῶν συμπλοκῶν των, ὥστε ὁ νοῦς μὲ πλειοτέραν εὐκολίαν καὶ ἐλευθερίαν νὰ συλλογίζηται ἐπάνω εἰς τοὺς ἀριθμούς. Εἰς τοῦ-

το δὲ ἀφορᾷ ἡ γραφομένη ἀρίθμησις, ἥτις συνίσταται εἰς τὸ νὰ παρασταίνῃ μὲ τὴν βοήθειαν πεπερασμένου ἀριθμοῦ χαρακτήρων ἢ ψηφίων τοὺς εἰς τὴν κοινὴν διάλεκτον ἐκφραζομένους ἀριθμούς.

§. 4. Λαλουμένη ἀρίθμησις. — Μ' ὅλον ὅτι ἡ ὀνοματολογία τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν εἶναι γνωστὴ εἰς τοὺς περισσοτέρους νέους, διὰ τοὺς ὁποίους τὰ στοιχεῖα ταῦτα ἐγράφησαν, στοχαζόμεθα ὅμως χρέος μας νὰ ἐκθέσωμεν σύντομον μὲν, πλὴν ἔλλογον ἀνάλυσιν αὐτῆς, ἐπειδὴ ἡ γραφομένη ἀρίθμησις, τοιαύτη, ὁποίαν ὅλοι οἱ τόποι τὴν παρεδέχθησαν, ἐπιστηρίζεται εἰς ταύτην τὴν ὀνοματολογίαν.

Οἱ πρῶτοι ἀριθμοὶ εἶναι ἕν, δύο, τρία, τέσσαρα, πέντε, ἓξ, ἑπτὰ, ὀκτὼ, ἐννέα, οἱ ὁποῖοι καλοῦνται ἁπλαῖ μονάδες, ἢ μονάδες πρώτης τάξεως.

Προσθέτοντες νέαν τινὰ μονάδα εἰς τὸν ἀριθμὸν ἐννέα, σχηματίζομεν τὸν ἀριθμὸν δέκα, ὅς τις θεωρεῖται ὡς μονὰς νέου εἴδους, τὸ ὁποῖον καλεῖται δεκὰς ἢ μονὰς δευτέρας τάξεως· ἀριθμοῦμεν δὲ κατὰ δεκάδας, ὡς ἠριθμήσαμεν κατὰ μονάδας ἁπλᾶς· δηλαδὴ μία δεκὰς, δύο δεκάδες, τρεῖς δεκάδες, τέσσαρες δεκάδες, πέντε, ἓξ, ἑπτὰ, ὀκτὼ, ἐννέα δεκάδες, ἢ δέκα, εἴκοσι, τριάκοντα, τεσσαράκοντα, πεντήκοντα, ἑξήκοντα, ἑβδομήκοντα, ὀγδοήκοντα, ἐννενήκοντα· μεταξὺ δὲ τῶν δέκα καὶ εἴκοσιν ὑπάρχουν ἐννέα ἄλλοι ἀριθμοὶ, οἵτινες εἶναι ἕνδεκα, δώδεκα, δεκατρία, δεκατέσσαρα, δεκαπέντε, δεκαέξ, δεκαεπτὰ, δεκαοκτὼ, δεκαεννέα.

Μεταξὺ εἴκοσι καὶ τριάκοντα ὑπάρχουν παρομοίως ἐννέα ἀριθμοὶ ἐκφραζόμενοι κατὰ τοῦτον τὸν τρόπον· εἰκοσιὲν, εἰκοσιδύο, εἰκοσιτρία, εἰκοσιτέσσαρα . . . . . . εἰκοσιεννέα. Ἠμποροῦμεν οὕτω νὰ

ἐκφράσωμεν ὅλους τοὺς ἀριθμοὺς ἕως εἰς τοὺς ἐννενήκοντα ἐννέα.

Οὗτος ὁ τελευταῖος ἀριθμὸς αὐξανόμενος ἀπὸ ἓν δίδει δέκα δεκάδας, ἢ τὸν ἀριθμὸν 100· ὁ ὁποῖος θεωρεῖται ὡς νέα μονὰς, καλουμένη ἑκατοντὰς, ἢ μονὰς τρίτης τάξεως. Ἀριθμοῦμεν δὲ κατὰ ἑκατοντάδας ὡς ἠριθμήσαμεν κατὰ δεκάδας καὶ ἁπλᾶς μονάδας· οὕτω μία ἑκατοντὰς, δύο ἑκατοντάδες, τρεῖς ἑκατοντάδες . . . . . ὀκτὼ ἑκατοντάδες, ἐννέα ἑκατοντάδες ἐκφράζουν συλλογὰς μιᾶς ἑκατοντάδος, δύο, τριῶν . . . . ὀκτὼ, ἐννέα ἑκατοντάδων· καὶ θέτοντες διαδοχικῶς μεταξὺ τῶν λέξεων ἑκατὸν καὶ διακόσια, διακόσια καὶ τριακόσια . . . . . ὀκτακόσια καὶ ἐννεακόσια, καὶ εἰς τὴν ἐξακολούθησιν τῶν ἐννεακοσίων τὰ ὀνόματα τῶν ἀριθμῶν τῶν περιεχομένων μεταξὺ τοῦ ἑνὸς καὶ τῶν ἐννενήκοντα ἐννέα, σχηματίζομεν ὅλα τὰ ὀνόματα ὅλων τῶν ἀριθμῶν ἀπὸ ἑκατὸν ἕως ἐννεακόσια ἐννενήκοντα ἐννέα.

Παρατηρεῖται, ὅτι εἰς τὴν ἔκφρασιν ὅλων τούτων τῶν ἀριθμῶν μετεχειρίσθημεν τὰς γενικὰς λέξεις ἓν, δύο, τρία, τέσσαρα, πέντε, ἓξ, ἑπτὰ, ὀκτὼ, ἐννέα, δέκα, εἴκοσι, τριάκοντα, τεσσαράκοντα, πεντήκοντα, ἑξήκοντα, ἑβδομήκοντα, ὀγδοήκοντα, ἐννενήκοντα καὶ ἑκατόν.

Προσθέτοντες ἓν εἰς τὰ ἐννεακόσια ἐννενήκοντα ἐννέα λαμβάνομεν ἄλλην συλλογὴν ἀπὸ δέκα ἑκατοντάδας, ἢ τὸν ἀριθμὸν χίλια, ὅς τις σχηματίζει τὴν μονάδα τῶν χιλιάδων, ἢ τὴν μονάδα τῆς τετάρτης τάξεως. Ἀφ' οὗ δὲ ἔφθασαν εἰς τοῦτον τὸν ἀριθμὸν, ἐσυμφώνησαν, διὰ νὰ μὴ πολλαπλασιάζωσι τὰς λέξεις, νὰ θεωρήσωσι τὰ χίλια, ὡς νέαν ἀρχικὴν μονάδα, πρὸ τοῦ ὀνόματος τῆς ὁποίας ἐτέθησαν τὰ ὀνόματα τῶν ἐννεακοσίων ἐννενήκοντα ἐννέα πρώτων

ἀριθμῶν. Οὕτω λέγομεν μία χιλιὰς, δύο χιλιάδες . . . . . ἐννέα χιλιάδες, δέκα χιλιάδες, ἕνδεκα χιλιάδες . . . . εἴκοσι χιλιάδες, εἰκοσιμία χιλιάς . . . . . . ἑκατὸν χιλιάδες, διακόσιαι χιλιάδες, ἐννεακόσιαι ἐννενήκοντα ἐννέα χιλιάδες.

Προσέτι μία δεκὰς χιλιάδος σχηματίζει τὴν μονάδα τῆς πέμπτης τάξεως· μία δὲ ἑκατοντὰς χιλιάδος τὴν μονάδα τῆς ἕκτης τάξεως.

Τιθεμένων ἔπειτα μεταξὺ δύο ἀριθμῶν διαδοχικῶν χιλιάδων, ὡς μεταξὺ εἴκοσι χιλιάδων καὶ εἰκοσιμιᾶς χιλιάδος, τῶν ὀνομάτων ὅλων τῶν ἀριθμῶν τῶν κατωτέρων τῆς χιλιάδος, δυνάμεθα προφανῶς νὰ ἐκφράσωμεν ὅλους τοὺς ἀριθμοὺς ἕως εἰς ἐννεακοσίας ἐννενήκοντα ἐννέα χιλιάδας καὶ ἐννεακοσίας ἐννενήκοντα ἐννέα μονάδας.

Ὁ τελευταῖος οὗτος ἀριθμὸς αὐξηθεὶς ἀπὸ μονάδα δίδει δέκα ἑκατοντάδας χιλιάδος, ἢ χιλιάκις χιλίας μονάδας ἢ κατὰ τὴν συνήθειαν χίλιες χιλιάδες, συλλογὴν δηλαδὴ, τὴν ὁποίαν ὠνόμασαν μιλλιόνιον. Παρομοίως ἡ συλλογὴ ἀπὸ χίλια μιλλιόνια καλεῖται διλλιόνιον· ἡ δὲ συλλογὴ ἀπὸ χίλια διλλιόνια καλεῖται Τριλλιόνιον, καὶ οὕτως ἐφεξῆς· ἀριθμοῦμεν δὲ κατὰ μιλλιόνια, διλλιόνια, τριλλιόνια, ὡς ἠριθμήσαμεν κατὰ χίλια. Εὐκόλως λοιπὸν βλέπομεν, ὅτι προσθέτοντες εἰς τὰς προειρημένας γενικὰς λέξεις τὰς λέξεις χίλια, μιλλιόνιον, διλλιόνιον, τριλλιόνιον, τετραλλιόνιον, πενταλλιόνιον . . . . . θέλομεν σχηματίσει τὴν ὀνοματολογίαν ὅλων ὅσων δυνάμεθα νὰ φαντασθῶμεν ἀριθμῶν.

Τελευταῖον, ἂς παρατηρήσωμεν ὅτι τὸ μιλλιόνιον εἶναι ἡ μονὰς τῆς ἑβδόμης τάξεως, ἡ δεκὰς τῶν μιλλιονίων εἶναι ἡ μονὰς τῆς ὀγδόης τάξεως, καὶ ἡ

ἑκατοντὰς τῶν μιλλιονίων εἶναι ἡ μονὰς τῆς ἐννάτης τάξεως . . . . .

§. 5. Γραφομένη ἀρίθμησις. — Ὅσον ἁπλῆ καὶ ἂν ἦναι ἡ ὀνοματολογία τῶν ἀριθμῶν, ἠθέλαμεν δοκιμάσει μεγάλην δυσκολίαν εἰς τὴν μεταξύ των σύμπλοκὴν, ἐὰν δὲν ὑπῆρχε μέθοδός τις τοῦ γράφειν αὐτοὺς μὲ συντομίαν· ἀλλ᾽ αὕτη εὑρίσκεται εὐκόλως ἐκ τῆς ὀνοματολογίας των. Τῷ ὄντι παρατηροῦντες τὰ ὀνόματα, μὲ τὰ ὁποῖα ὠνομάσαμεν τοὺς ἀριθμοὺς ἄλλα μὲν ὡς ἕν, δέκα, ἑκατὸν, χίλια, δέκα χιλιάδες, ἑκατὸν χιλιάδες, μιλλιόνιον, δέκα μιλλιόνια ἐκφράζουν διαφόρων τάξεων μονάδας, ἄλλα δὲ ὡς ἕν, δύο, τρία, ... ἐννέα ἐκφράζουν ποσάκις ἑκάστη τοιούτου εἴδους μονὰς εἰσέρχεται εἴς τινα ἀριθμόν.

Ὅθεν ἐὰν συμφωνήσωμεν νὰ παρασταίνωμεν τοὺς ἐννέα πρώτους ἀριθμοὺς διὰ τῶν ἀκολούθων χαρακτήρων ἢ ψηφίων

1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,
ἕν,	δύο,	τρία,	τέσσαρα,	πέντε,	ἕξ,	ἑπτὰ,

8	9.
ὀκτὼ,	ἐννέα,

ἡ δυσκολία πλέον συνίσταται εἰς τὸ νὰ εὕρωμεν τὸ μέσον τοῦ νὰ ἐκφράζωμεν μὲ τοὺς χαρακτῆρας τούτους τὰς διαφόρους τάξεις τῶν μονάδων, τὰς ὁποίας ὁ προβαλλόμενος ἀριθμὸς περικλείει· ἀλλ᾽ ἐὰν συμφωνήσωμεν νὰ συστήσωμεν ταύτην τὴν ἀρχὴν ὅτι „πᾶς χαρακτὴρ βαλμένος εἰς τὰ ἀριστερὰ ἄλλου ἐκφράζει μονάδας τάξεως ἀμέσως ὑπερτέρας αὐτοῦ", ἢ μὲ ἄλλας λέξεις, ὅτι, „ὅταν πολλοὶ χαρακτῆρες γράφωνται κατ᾽ ἐξακολούθησιν ὁ εἷς τοῦ ἄλλου, ὁ πρῶτος μὲν εἰς τὰ δεξιὰ χαρακτὴρ ἐκφράζει ἁπλᾶς μονάδας, ὁ ἀμέσως δὲ εἰς τὰ ἀριστερὰ αὐτοῦ μονάδας δεκάδων, ἢ ἁπλῶς δεκάδας, καὶ ὁ ἐκ δεξιῶν πρὸς

τὰ ἀριστερὰ ἑκατοντάδας, ὁ τέταρτος χιλιάδας, ὁ πέμπτος δεκάδας χιλιάδος· . . . . εὐκόλως βλέπομεν ὅτι δυνάμεθα ἐν γένει νὰ παρασταίνωμεν ὅλους τοὺς ἀριθμοὺς μὲ τὴν βοήθειαν τῶν προηγουμένων χαρακτήρων.

Παραδείγματος χάριν. Ἄς ἐκφρασθῆ μὲ χαρακτῆρας ἢ μὲ ψηφία ὁ ἀριθμὸς τριακόσια ἑβδομήκοντα ἐννέα· οὗτος σύγκειται φανερὰ ἀπὸ 9 μονάδας, πλέον ἑπτὰ δεκάδας, πλέον τρεῖς ἑκατοντάδας· ὅθεν κατὰ τὴν προσυσταθεῖσαν ἀρχὴν δύναται νὰ ἐκφρασθῆ διὰ 379.

Παρομοίως ὁ ἀριθμὸς εἰκοσιοκτὼ χιλιάδες διακόσια τεσσαράκοντα ἑπτὰ, σύγκειται ἀπὸ 7 μονάδας, 4 δεκάδας, 2 ἑκατοντάδας, 8 χιλιάδας, καὶ 2 δεκάδας χιλιάδος, ὅθεν παρασταίνεται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν πέντε χαρακτήρων 28247.

Χαρακτὴρ 0. Ἀλλ' ὅμως ὑπάρχουσι καὶ ἀριθμοὶ, οἵτινες δὲν γράφονται μὲ μόνα τὰ προηγούμενα ἐννέα ψηφία.

Ἄς γράψωμεν μὲ ψηφία τοὺς ἀριθμοὺς, δέκα, εἴκοσι, τριάκοντα, ... ὀγδοήκοντα, ἐννενήκοντα. Ἐπειδὴ οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι δὲν περιέχουν ἁπλᾶς μονάδας, εἶναι ἀνάγκη νὰ παραδεχθῶμεν ἓν ἄλλο ψηφίον, μὴ ἔχον μὲν καθ' ἑαυτὸ κἀμμίαν τιμὴν, ἀλλὰ δυνάμενον νὰ ἐπέχῃ τὴν θέσιν τῆς εἰς τὴν ἔκφρασιν τοῦ ἀριθμοῦ ἐλλειπούσης τάξεως τῶν μονάδων· τὸ ψηφίον τοῦτο εἶναι τὸ 0, τὸ ὁποῖον καλεῖται μηδὲν ἢ μηδενικὸν, καὶ μὲ τὸ ὁποῖον οἱ ἀριθμοὶ δέκα, εἴκοσι· τριάκοντα, κ. τ. λ. . . . ἐκφράζονται διὰ

10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90.

Κατὰ τὸν αὐτὸν λόγον, οἱ ἀριθμοὶ ἑκατὸν, διακόσια, τριακόσια, μὴ περικλείοντες οὔτ' ἁπλᾶς μονά-

δας, οὔτε δεκάδας, ἐκφράζονται διὰ 100, 200, 300, 400, ... 900.

Ἐν γένει τὸ μηδὲν εἶναι ψηφίον, τὸ ὁποῖον δὲν ἔχει κάμμίαν τιμὴν μερικὴν, ἀλλὰ τὸ μεταχειριζόμεθα εἰς τόπον τῶν διαφόρων τάξεων τῶν μονάδων, αἱ ὁποῖαι λείπουν εἰς τὴν ἔκφρασιν τινὸς ἀριθμοῦ.

Τ' ἄλλα δὲ ψηφία τὰ καλούμενα σημαντικὰ, ἔχουν δύο τιμάς· μίαν ἀπόλυτον εἴτε ἰδίαν, ἥτις τίποτ' ἄλλο δὲν εἶναι εἰμὴ ἡ τιμὴ, τὴν ὁποίαν ἔχει καθὲν ψηφίον ἰδικήν του, ὅταν θεωρῆται μόνον του, καὶ ἄλλην καλουμένην σχετικὴν, ἥτις εἶναι ἡ τιμὴ, τὴν ὁποίαν λαμβάνει ἐκ τῆς θέσεως, τὴν ὁποίαν κρατεῖ πρὸς τ' ἀριστερὰ τῶν ἄλλων ψηφίων.

Ἤδη ἐὰν παρατηρήσωμεν, ὅτι καθεὶς ἐκφρασμένος ἀριθμὸς συντίθεται ἐξ ἁπλῶν μονάδων, δεκάδων, ἑκατοντάδων . . . . ὅτι ἡ συλλογὴ τῶν μονάδων ἑκάστης τάξεως εἶναι ὅλη τὸ περισσότερον ἴση μὲ ἐννέα, ὅτι ὅταν ὁ ἀριθμὸς στερῆται ἀπὸ τινὰς τάξεις μονάδων, ὑπάρχει τις χαρακτὴρ ἐπέχων τὴν θέσιν αὐτοῦ, βεβαιούμεθα, ὅτι δὲν εἶναι κἀνεῖς ἀκέραιος ἀριθμὸς ἀδύνατος νὰ ἐκφρασθῇ μὲ τὴν βοήθειαν μιᾶς τινος συμπλοκῆς τῶν δέκα χαρακτήρων

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0.

Ἂς λάβωμεν νέον παράδειγμα τὸν ἀριθμὸν διακόσιαι ὀκτὼ χιλιάδες, δέκα ἐννέα, τὸν ὁποῖον πρέπει νὰ γράψωμεν διὰ ψηφίων.

Οὗτος περιέχει 9 ἁπλᾶς μονάδας, 1 δεκάδα, 8 μονάδας χιλιάδος, καὶ δύο ἑκατοντάδας χιλιάδος· ἀλλὰ δὲν ἔχει οὔτ' ἑκατοντάδας ἁπλᾶς, οὔτε δεκάδας χιλιάδος· ἀρκεῖ λοιπὸν νὰ γράψωμεν τὰ ψηφία 9, 1, 0, 8, 0, 2 ἀριστερόθεν τὸ ἓν εἰς τὸ ἄλλο, καὶ ὁ ἀριθμὸς θέλει παρασταθῇ διὰ 208019.

Ἔστω ἀκόμη ὁ ἀριθμός τριάκοντα ἓξ διλλιόνια, πεντακόσια μιλλιόνια, εἴκοσι χιλιάδες, τετρακόσια ἑπτά.

Ἡ ἔκφρασις τοῦ ἀριθμοῦ τούτου περιλαμβάνει 7 μονάδας ἁπλᾶς, 0 δεκάδας, 4 ἑκατοντάδας, 0 μονάδας χιλιάδος, 2 δεκάδας χιλιάδος, 0 ἑκατοντάδας χιλιάδος, 0 μονάδας μιλλιονίων, 0 δεκάδας μιλλιονίων, 5 ἑκατοντάδας μιλλιονίων, 6 μονάδας διλλιονίων, καὶ 3 δεκάδας διλλιονίων· λοιπὸν ὁ ἀριθμὸς θέλει παρασταθῆ διὰ 36510020407.

Τὸ σύστημα τῆς ἀριθμήσεως, τὸ ὁποῖον ἐκθέσαμεν, ὠνομάθη Σύστημα δεκαδικὸν, ἐπειδὴ μεταχειριζόμεθα δέκα χαρακτῆρας εἰς τὴν ἔκφρασιν παντὸς ἀριθμοῦ· ὁ δέκα, ἢ ὁ ἀριθμὸς τῶν δέκα μεταχειριζομένων χαρακτήρων καλεῖται βάσις τοῦ συστήματος.

§. 6. Ἂς κάμωμεν τώρα μίαν ἀναγκαίαν παρατήρησιν. Ἀποβαίνει ἐκ τῆς ὀνοματολογίας, ὅτι πᾶς ἀριθμὸς διαιρεῖται εἰς ἑκατοντάδας δεκάδας καὶ μονάδας ἁπλῶς· εἰς ἑκατοντάδας δεκάδας καὶ μονάδας χιλιάδος, εἰς ἑκατοντάδας, δεκάδας καὶ μονάδας μιλλιονίων κ. τ. λ. τουτέστιν εἰς τμήματα ἐκ μονάδων ἁπλῶν, χιλιάδων, μιλλιονίων, διλλιονίων, ἕκαστον τῶν ὁποίων γράφεται διὰ τριῶν ψηφίων, ἐξῃρημένου τοῦ τελευταίου, τὸ ὁποῖον περιέχει ἀνωτέρας μονάδας, καὶ τὸ ὁποῖον δύναται νὰ μὴ περιέχῃ παρὰ δύο ψηφία ἢ μόνον ἕν. Ὅταν λοιπὸν οἰκειωθῶμεν μὲ τὸν τρόπον τοῦ γράφειν τοὺς ἀριθμοὺς τριῶν ψηφίων, ἀρκεῖ νὰ γράψωμεν διαδοχικῶς τὸ εἰς τὰ ἀριστερὰ τοῦ ἄλλου, τουτέστι τὸ τμῆμα τῶν μονάδων, τὸ τῶν χιλιάδων, τὸ τῶν μιλλιονίων καὶ τὸ τῶν διλλιονίων.

Δυνάμεθα προσέτι νὰ ἀρχίσωμεν ἀπὸ τὰ ἀριστερὰ, τουτέστι νὰ γράψωμεν κατὰ πρῶτον τὸ τμῆμα τῶν ἀνωτέρων μονάδων, καὶ εἰς τὰ δεξιὰ, τὰ ἄλλα τμήματα κατὰ τάξιν τοῦ μεγέθους τῶν μονάδων· οὕτω πρέπει νὰ μάθωμεν νὰ γράφωμεν μὲ ψηφία ἀριθμόν τινα ὑπαγορευμένου εἰς τὴν συνήθη γλῶσσαν, μὴ οντα ἀκόμη γραμμένον· ἀλλὰ πρέπει νὰ προσέχωμεν νὰ μὴν παραιτῶμεν τὰ μηδενικὰ τὰ διωρισμένα εἰς τὸ νὰ καταστήσουν πλήρεις τὰς τάξεις τῶν μονάδων, αἱ ὁποῖαι λείπουν· δὲν θέλομεν δὲ δυσκολευθῆ ποτὲ εἰς τοῦτο, ἠξεύροντες, ὅτι καθε τμῆμα, ἐξαιρουμένου τοῦ εἰς τ' ἀριστερὰ πρώτου, πρέπει πάντοτε νὰ περιέχῃ τρία ψηφία.

Ἔστω ὡς τελευταῖον παράδειγμα νὰ γράψωμεν τὸν ἀριθμὸν τετρακόσια ἓξ διλλιόνια, εἰκοσιοκτὼ μιλλιόνια, διακόσιας πεντήκοντα χιλιάδας, τεσσαράκοντα ὀκτώ.

Γράψε εἰς τὰ δεξιὰ ἀλλήλων τὸ τμῆμα τῶν διλλιονίων, τὸ τῶν μιλλιονίων, τὸ τῶν χιλιάδων, καὶ τέλος, τὸ τῶν ἁπλῶν μονάδων, καὶ θέλεις ἔχει 409, 028, 250, 048.

§. 7. Ἐπὶ τῆς προηγουμένης λοιπὸν παρατηρήσεως ἐπιστηρίζεται τὸ μέσον τοῦ μεταφράζειν εἰς κοινὴν γλῶσσαν ὁποιονδήποτε μὲ ψηφία γραμμένον ἀριθμόν.

Ἀφ' οὗ, ἀρξάμενοι ἀπὸ τὰ δεξιὰ, χωρίσωμεν τὸν ἀριθμὸν εἰς τμήματα ἐκ τριῶν ψηφίων, ἐκφράζομεν διαδοχικῶς καθὲν τμῆμα, ἀρχίζοντες ἀπὸ τὸ πρῶτον εἰς τ' ἀριστερὰ, δίδοντες πάντοτε εἰς τὰ διάφορα τμήματα τὸ ἀνῆκον εἰς αὐτὰ ὄνομα.

Ἔστω πρὸς παράδειγμα ὁ ἀριθμὸς 70345601.

Οὗτος λοιπὸν ἀφ' οὗ μερισθῇ οὕτω 70,343,601 συντίθεται ἀπὸ ἑβδομήκοντα μιλλιόνια, τριακοσίας

τεσσαράκοντα πέντε χιλιάδας, καὶ ἑξακοσίας μίαν μονάδας.

Εὑρίσκομεν παρομοίως ὅτι 53024000567022, ἢ 5, 302, 400, 056, 702 ἐκφράζει τὸν ἀριθμὸν πέντε τριλλιόνια, τριακόσια δύο διλλιόνια, τετρακόσια μιλλιόνια, πεντήκοντα ἓξ χιλιάδας καὶ ἑπτακοσίας δύο μονάδας.

§. 8. Ἄλλο δὲν λείπει διὰ νὰ καταστήσωμεν πλήρη τὴν θεωρίαν τῆς ἀριθμήσεως, παρὰ νὰ δείξωμεν τὸ μέσον τοῦ γράφειν διὰ ψηφίων τὰ κλάσματα· ἀλλὰ πρότερον εἶναι ἀνάγκη νὰ δώσωμεν καθαρὰν καὶ ἀκριβῆ ἰδέαν τῶν κλασμάτων, ὡς αὐτὰ θεωροῦνται εἰς τὴν Ἀριθμητικήν.

Ὑποτεθείσθω, ὅτι ἔχομεν νὰ προσδιορίσωμεν τὸ μῆκος ἑνὸς κομματίου ἀπὸ ὕφασμα. Λαμβάνοντες τὴν μονάδα καλουμένην μέτρον, καὶ φέροντες αὐτὴν μίαν, δύο φορὰς, καὶ ἐν ἑνὶ λόγῳ τόσας, ὅσας ἠμποροῦμεν, ἐπάνω εἰς τὸ μάκρος τοῦ κομματίου, παρατηροῦμεν, ὅτι ἠμποροῦν νὰ ἀκολουθήσωσι δύο περιστάσεις, ἢ ἀφ' οὗ ἡ μονὰς φερθῇ ἱκανὸν ἀριθμὸν φορῶν, δεκαπέντε φέρ' εἰπεῖν, δὲν ἀπομένει τίποτε, ἢ εὑρίσκομεν ὑπόλοιπον μικρότερον τοῦ μέτρου· εἰς τὴν πρώτην περίστασιν τὸ κομμάτιον περιέχει ἀκέραιον τινὰ ἀριθμὸν μέτρων, δηλαδὴ δεκαπέντε· εἰς τὴν δευτέραν, σιμὰ εἰς ταῦτα τὰ δεκαπέντε μέτρα πρέπει διὰ νὰ ἔχωμεν τὸ ὅλον κομμάτιον νὰ προσθέσωμεν τὸ κλάσμα, ἢ τὸ μέρος τοῦ εναπολειφθέντος μέτρου. Ἀλλὰ πῶς νὰ ἐκτιμήσωμεν τὸ μέρος τοῦτο; ἢ πῶς νὰ τὸ συγκρίνωμεν μὲ τὴν μονάδα ἤγουν μὲ τὸ μέτρον; δυνάμεθα ἐξ ἀρχῆς νὰ ἐννοήσωμεν ταύτην τὴν μονάδα χωρισμένην εἰς δύο ἴσα μέρη, ἢ εἰς δύο ἡμίσεα, καὶ ἂν τὸ ὑπόλοιπον εἶναι κατ' ἀκρίβειαν ἴσον μὲ ἓν ἀπὸ ταῦτα τὰ ἡμίσεα, τότε λέγομεν, ὅτι τὸ κομ-

μάτιον τοῦ ὑφάσματος περιέχει δεκαπέντε καὶ ἥμισυ μέτρα μήκους.

Ἐὰν τὸ ὑπόλοιπον ἦναι ὀλιγώτερον ἢ περισσότερον παρὰ τὸ ἥμισυ τοῦ μέτρου, κάθε ἥμισυ τοῦ μέτρου τὸ θεωροῦμεν διηρημένον εἰς δύο νέα μέρη ἴσα καλούμενα τέταρτα· καὶ ἐὰν τὸ τέταρτον τοῦτο δύναται νὰ φερθῇ μίαν ἢ τρεῖς φορὰς ἀκριβῶς ἐπὶ τοῦ ὑπολοίπου, τότε λέγομεν, ὅτι τὸ ὑπόλοιπον εἶναι ἴσον μὲ τὸ τέταρτον ἢ μὲ τὰ τρία τέταρτα τοῦ μέτρου.

Ἀντὶ νὰ διαιρέσωμεν τὴν μοναδα εἰς δύο ἢ εἰς τέσσαρα μέρη ἴσα, δυνάμεθα νὰ τὴν θεωρήσωμεν διηρημένην εἰς τρία ἴσα μέρη καλούμενα τρίτα, εἰς πέντε μέρη ἴσα καλούμενα πέμπτα, εἰς ἓξ καλούμενα ἕκτα κ. τ. λ. Ἂς ὑποθέσωμεν πρὸς ἀκριβῆ τοῦ πράγματος κατάληψιν, ὅτι τὸ μέτρον ἐδιαιρέθη εἰς δώδεκα μέρη ἴσα καλούμενα δωδέκατα, καὶ ὅτι τὸ δωδέκατον τοῦτο ἐφέρθη ἑπτάκις μὲ ἀκρίβειαν ἐπὶ τοῦ ὑπολοίπου· τότε λέγομεν, ὅτι τὸ ὑπόλοιπον τοῦτο εἶναι ἴσον μὲ ἑπτὰ φοραῖς τὸ δωδέκατον, ἢ μὲ τὰ ἑπτὰ δωδέκατα τοῦ μέτρου· λοιπὸν τὸ κομμάτιον τοῦ ὑφάσματος περιέχει δεκαπέντε μέτρα καὶ ἑπτὰ δωδέκατα κατὰ μῆκος.

Βλέπομεν λοιπὸν, ὅτι διὰ νὰ λάβωμεν καθαρὰν ἰδέαν ἑνὸς κλάσματος ἔχοντος ὁποιουδήποτε εἴδους μονάδα, πρέπει νὰ ἐννοήσωμεν ὅτι αὐτὴ ἡ μονὰς διαιρεῖται εἰς ἀριθμὸν ἀκέραιον ἴσων μερῶν, καὶ ὅτι λαμβάνομεν ἓν, δύο, τρία, τέσσαρα κτλ. ἐκ τῶν μερῶν τούτων· τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν λαμβανομένων μερῶν συσταίνει τὸ κλάσμα· διὰ τοῦτο ἡ ἔκφρασις ἑνὸς κλάσματος περιλαμβάνει ἀναγκαίως δύο ἀριθμοὺς ἀκεραίους, ἐκ τῶν ὁποίων ὁ μὲν εἷς σημειόνει εἰς πόσα μέρη ἐδιαιρέθη ἡ μονὰς καὶ καλεῖται Παρονομαστὴς, ὁ δὲ ἄλλος φανερόνει πόσα τούτων τῶν μερῶν λαμβάνονται εἰς σχηματισμὸν τοῦ κλάσματος, καὶ καλεῖται

Ἀριθμητής· λόγου χάριν, πέντε ὄγδοα τοῦ μέτρου, δεκατρία εἰκοστὰ τῆς λίτρας κ.τ.λ. εἶναι κλάσματα, εἰς τὸ πρῶτον τῶν ὁποίων καταλαμβάνομεν, ὅτι τὸ μέτρον ἐδιαιρέθη εἰς ὀκτὼ μέρη ἢ ὀκτὼ ὄγδοα, καὶ ὅτι λαμβάνομεν πέντε ἐξ αὐτῶν· τὸ ὀκτὼ εἶναι ὁ παρονομαστὴς, καὶ τὸ πέντε ὁ ἀριθμητής· εἰς δὲ τὸ δεύτερον, ἡ λίτρα θεωρεῖται διῃρημένη εἰς εἴκοσι μέρη καλούμενα εἰκοστὰ ἢ εἰκοστημόρια, ἐκ τῶν ὁποίων λαμβάνομεν δεκατρία· ὁ παρονομαστὴς εἶναι τὸ εἴκοσι, καὶ ὁ ἀριθμητὴς τὸ δεκατρία.

Ἕπεται προσέτι ἐκ τῶν προειρημένων, ὅτι τὸ κλάσμα εἶναι ποσότης ἀναφερομένη εἰς μέρος τί τῆς ἀρχικῆς μονάδος, τὸ ὁποῖον δυνάμεθα νὰ θεωρῶμεν ὡς ἓν εἶδος μερικὸν μονάδος· οὕτως ἐπειδὴ τὸ κλάσμα δεκατρία εἰκοστὰ τοῦ μέτρου, σύγκειται ἀπὸ δεκατρεῖς φοραῖς τὸ εἰκοστὸν τοῦ μέτρου, τὸ εἰκοστὸν τοῦτο εἶναι εἰδικήτις μονὰς, τὴν ὁποίαν τὸ δοθὲν κλάσμα περιέχει δεκατρεῖς φοραῖς. Τούτου τεθέντος, δύο κλάσματα καλοῦνται ὁμοειδῆ, ὅταν ἔχωσι τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν, φερ' εἰπεῖν πέντε δωδέκατα, ἑπτὰ δωδέκατα, ἕνδεκα δωδέκατα, εἶναι κλάσματα ὁμοειδῆ· ἀλλὰ τρία τέταρτα, καὶ δύο τρίτα εἶναι κλάσματα ἑτεροειδῆ, ἐπειδὴ ἔχουν διαφορετικὸν παρονομαστήν.

Διὰ νὰ ἐκφράσωμεν ἓν κλάσμα μὲ ψηφία, ἐσυμφωνήθη νὰ θέτωμεν τὸν ἀριθητὴν ἄνω τοῦ Παρονομαστοῦ, χωρίζοντες αὐτοὺς διὰ γραμμῆς· οὕτω τὸ κλάσμα τρία τέταρτα σημειοῦται διὰ $\frac{3}{4}$· ἑπτὰ δωδέκατα διὰ $\frac{7}{12}$· εἰκοσιτρία τριακοστὰ πέμπτα διὰ $\frac{23}{35}$.

Ἀντιστρόφως, $\frac{7}{8}$, $\frac{13}{15}$, $\frac{47}{72}$ παρασταίνουν τὰ

κλάσματα ἑπτὰ ὄγδοα, δεκατρία δέκατα πέμπτα, τεσσαράκοντα ἑπτὰ ἑβδομηκοστὰ δεύτερα· τουτέστι προφέρομεν πρῶτον τὸν ἀριθμητὴν, καὶ ἔπειτα τὸν παρονομαστήν.

§. 9. Αἱ πρῶται τοῦ ἀνθρώπου χρεῖαι εἰς τὴν κοινωνίαν τὸν ὁδηγοῦν καθ' ἑκάστην νὰ ἐπιλύῃ ζητήματα, διὰ τὰ ὁποῖα ὑποχρεοῦται νὰ συμπλέκῃ δύο ἢ πλειοτέρους ἀριθμοὺς εἴτε τῆς αὐτῆς φύσεως εἴτε διαφορετικῆς. Αἱ συμπλοκαὶ αὗται συσταίνουν τὰς πράξεις τῆς ἀριθμητικῆς, ἢ τὸν ἀριθμητικὸν ὑπολογισμὸν, καὶ διὰ νὰ γνωστοποιήσωμεν τὴν γένεσιν καὶ σχέσιν των, ἐκθέτομεν τινὰ ζητήματα ἀποβλέποντα τὸ ἐμπόριον.

Πρῶτον. Ἔμπορος ὑφασμάτων ἀφ' οὗ ἐπώλησε πρῶτον 5 πήχας καὶ $\frac{2}{3}$· δεύτερον 7 καὶ $\frac{1}{2}$, καὶ τρίτον 12 καὶ $\frac{3}{4}$, ἐπιθυμεῖ νὰ γνωρίσῃ τὸν ἀριθμὸν τῆς πωλήσεως.

Πρέπει νὰ ἑνωθῶσιν εἰς ἕνα μόνον οἱ τρεῖς ἀριθμοὶ τῶν πωλημένων πηχῶν, ἢ μ' ἄλλας λέξεις πρέπει νὰ ἐκτελέσῃ τὴν πρόσθεσιν τούτων τῶν ἀπὸ ἀκεραίους ἀριθμοὺς καὶ κλάσματα συνθεμένων ἀριθμῶν. Ἐπειδὴ οἱ τρεῖς ἀριθμοὶ τῶν πηχῶν, ἐπάρθησαν ἀπὸ ἓν καὶ τὸ αὐτὸ κομμάτιον τοῦ ὑφάσματος, τοῦ ὁποίου τὸ μῆκος ἦτον 30 πῆχαι καὶ $\frac{2}{3}$, ζητεῖ νὰ μάθῃ πόσον πρέπει νὰ τοῦ μείνῃ ἀπὸ τὸ κομμάτιον. Θέλει ζητήσει λοιπὸν τὴν διαφορὰν μεταξὺ τοῦ ἀριθμοῦ $30\frac{2}{3}$ τοῦ ἐκφράζοντος τὸ μῆκος τοῦ κομματίου, καὶ τοῦ ὅλου ἀριθμοῦ τῶν πωλημένων πηχῶν, δηλαδὴ θέ-

λει ὁδηγηθῇ εἰς τὴν ἀφαίρεσιν τοῦ δευτέρου ἀριθμοῦ ἀπὸ τὸν πρῶτον.

Τρίτον. Ἠγόρασέ τις 48 πήχας πρὸς 25 φράγκα τὴν πῆχην· ζητεῖται τὸ ἄθροισμα, τὸ ὁποῖον μέλλει νὰ πληρώσῃ διὰ τὰς 48 πήχας.

Εἶναι φανερὸν ὅτι διὰ νὰ εὕρῃ τὴν ὅλην τιμὴν, πρέπει νὰ λάβῃ 48 φοραῖς 25 φράγκα, ἢ νὰ κάμῃ ἓν ὅλον ἀπὸ 48 φοραῖς ἀριθμοὺς ἴσους μὲ τὰ 25 φράγκα. Αὕτη ἡ πρᾶξις καλεῖται πολλαπλασιασμὸς, καὶ βλέπομεν ὅτι οὗτος ἄλλο δὲν εἶναι εἰμὴ ἓν εἶδος προσθέσεως, διότι συνίσταται εἰς τὰ νὰ προστεθῇ ἀριθμός τις πολλαῖς φοραῖς εἰς τὸν ἑαυτόν του.

Ἂς ἀναλάβωμεν τὸ αὐτὸ ζήτημα ἀλλάττοντες μόνον τὰς τιμὰς τῶν ἀριθμῶν ἢ τὰ δοθέντα τοῦ ζητήματος.

Ἠγόρασέ τις $\frac{7}{12}$ πήχης πραγματείας τινὸς πρὸς $\frac{17}{20}$ τοῦ φράγκου τὴν πῆχην, καὶ ζητεῖ νὰ μάθῃ τί ἔχει νὰ πληρώσῃ διὰ τὰ $\frac{7}{12}$ τῆς πήχης.

Καταλαμβάνομεν ἐδῶ, ὅτι, ἐὰν τὸ μέτρον ἀξίζῃ $\frac{17}{20}$ τοῦ φράγκου, $\frac{7}{12}$ πήχης, τὰ ὁποῖα ἐκφράζουν ἓν μέρος αὐτῆς, πρέπει νὰ ἀξίζωσιν ἓν μέρος τῶν $\frac{17}{20}$, παριστανόμενον διὰ $\frac{17}{20}$, δηλαδὴ διὰ νὰ ἀποκριθῶμεν εἰς τοῦτο πρέπει νὰ λάβωμεν τὰ $\frac{7}{12}$ τῶν $\frac{17}{20}$. ἡ τοιαύτη πρᾶξις καλεῖται ἀκόμη πολλαπλασιασμὸς κλασμάτων, ἥτις καλεῖται οὕτως, ἐπειδὴ τὸ παρὸν ζήτημα εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ τὸ ἀνωτέρω, τὸ ὁποῖον μᾶς ἔφερεν εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν δύο ἀκεραίων ἀριθμῶν.

Κατὰ πρῶτον τὸ ὄνομα πολλαπλασιασμὸς, ὁμοῦ μὲ τὸν ὁποῖον εἰσέρχεται καὶ ἡ ἰδέα τῆς αὐξήσεως, δὲν φαίνεται ἐπιτήδειον εἰς τὸ νὰ φανερώσῃ καὶ μίαν ἐργασίαν συνισταμένην εἰς τὸ νὰ λάβῃ τὶς ἀφ' ἑνὸς ἀριθμοῦ ἓν μέρος σημειωμένον διά τινος κλάσματος· ἀλλ' οἱ Ἀριθμητικοὶ εὕρηκαν τὸ μέσον τοῦ νὰ συνδέωσι τὸν πολλαπλασιασμὸν τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν μὲ τὸν πολλαπλασιασμὸν τῶν κλασμάτων λέγοντες, ὅτι τὸ νὰ πολλαπλασιάζωμεν ἀριθμόν τινα, ὁποῖος καὶ ἂν ἦναι, ἐπὶ ἄλλον, εἶναι τὸ νὰ συνθέσωμεν ἕνα τρίτον ἀριθμὸν μὲ τὸν πρῶτον, ὡς ὁ δεύτερος συνθέτεται ἐκ τῆς μονάδος. Ἐντεῦθεν βλέπομεν, ὅτι ἐὰν οἱ δύο ἀριθμοὶ ἦναι ἀκέραιοι, κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦτον, ἀρκεῖ νὰ λάβωμεν τὸν πρῶτον τοσάκις, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ δεύτερος, καὶ ἂν οἱ δύο ἀριθμοὶ ἦναι κλάσματα, πρέπει νὰ λάβωμεν ἀπὸ τὸ πρῶτον κλάσμα ἓν μέρος παριστανόμενον ἀπὸ τὸ δεύτερον.

Τέταρτον. Ἠγόρασέ τις 12 πήχας ὑφάσματος διὰ 84 φράγκων, καὶ ζητεῖ τὴν τιμὴν ἑκάστης πήχης.

Ἂν ὑποθέσωμεν ὡς γνωστὴν τὴν τιμήν· καταλαμβάνομεν, ὅτι λαμβάνοντες αὐτὴν δωδεκάκις, ἢ πολλαπλασιάζοντές την ἐπὶ 12 πρέπει νὰ εὕρωμεν τὸν ἀριθμὸν 84. Τὸ ζήτημα λοιπὸν μᾶς ὁδηγεῖ νὰ ζητήσωμεν ἀριθμὸν, ὅστις πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν δεύτερον, τουτέστι τὸν 12, δίδει γινόμενον ἴσον τῷ πρώτῳ, τουτέστιν 84· αὕτη ἡ πρᾶξις ἔλαβε τὸ ὄνομα Διαίρεσις.

Διὰ νὰ δώσωμεν τὸν λόγον τῆς ὀνομασίας ταύτης, ἥτις μᾶς ἀνακαλύπτει τὴν ἰδέαν τοῦ μερισμοῦ ἑνὸς ἀριθμοῦ εἰς πολλὰ ἴσα μέρη, ὑποτεθείσθω, ὅτι ἔχομεν νὰ μοιράσωμεν ἐξίσου τὸ ἄθροισμα ἀπὸ 84 φράγκα εἰς δώδεκα ἀνθρώπους. Εἶναι φανερὸν ὅτι,

ἐὰν ἐγνωρίζαμεν ἑνὸς τούτων τὸ μερίδιον, πολλαπλασιάζοντές το ἐπὶ τὸ 12 ἠθέλαμεν εὕρει τὸ 84.

Βλέπομεν λοιπὸν, ὅτι τὸ νὰ διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμὸν 84 εἰς τόσα μέρη ἴσα, ὅσας μονάδας περιέχει ὁ ἀριθμὸς 12, ἄλλο δὲν εἶναι, εἰμὴ τὸ νὰ ζητήσωμεν τρίτον τινὰ ἀριθμὸν, ὅστις πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ τὸν δεύτερον 12 ἀποτελεῖ τὸν πρῶτον 84, τουτέστιν ἡ αὐτὴ μὲ τὴν πρώτην πρᾶξις.

Ἃς ἀναλάβωμεν τὸ ἀνωτέρω ζήτημα, εἰσάγοντες ἀντὶ ἀκεραίων κλάσματα. Ἠγόρασέ τις $\frac{5}{6}$ πήχης διὰ $\frac{19}{20}$ φράγκου· ζητεῖται ἡ τιμὴ μιᾶς πήχης.

Καὶ ἐνταῦθα πρέπει νὰ ζητήσωμεν ἀριθμὸν τοιοῦτον, ὥστε λαμβάνοντες αὐτοῦ τὰ πέντε ἕκτα, ἢ πολλαπλασιάζοντες ἐπὶ $\frac{5}{6}$, νὰ ἔχωμεν $\frac{19}{20}$. Ἐκ τούτου ὁδηγούμεθα εἰς τὸ νὰ ἐκτελέσωμεν καὶ ἐδῶ διαίρεσιν κατὰ τὴν ἰδέαν, τὴν ὁποίαν ἀπεδώκαμεν εἰς τὸ ὄνομα τοῦτο, καὶ ὄχι κατὰ τὴν ἔννοιαν μερισμοῦ εἰς ἴσα μέρη.

Ἐδυνάμεθα νὰ ἀναφέρωμεν πλῆθος ζητημάτων, τὰ ὁποῖα ὅλα νὰ μᾶς φέρωσιν εἰς τὰς τέσσαρας προειρημένας πράξεις· καὶ ἐπειδὴ ταῦτα κάθε στιγμὴν εἰς ὅλας τῆς ζωῆς τὰς περιστάσεις παῤῥησιάζονται, πρέπει νὰ ἔχωμεν μεθόδους τοῦ ἐκτελεῖν τὰς εἰς τὴν λύσιν των ἀπαιτουμένας ἐργασίας. Τοιοῦτον εἶναι τὸ πρώτιστον ἀντικείμενον τοῦ πρώτου μέρους τῆς Μαθηματικῆς.

Ἡ Ἀριθμητικὴ σκοπὸν ἔχει εἰδικὸν, τὸ νὰ συστήσῃ σταθεροὺς καὶ βεβαίους κανόνας εἰς τὴν ἐκτέλεσιν ὅλων τῶν πράξεων, ὅσαι ἠμποροῦν νὰ γένωσιν ἐπὶ τῶν

ἀριθμῶν. Περιλαμβάνει αὕτη προσέτι πλῆθος ἰδιοτήτων, αἵτινες ἐφευρέθησαν ἀπὸ τὰς ἐρεύνας, αἱ ὁποῖαι ἔπρεπε νὰ ἐκτελεσθῶσι διὰ νὰ φθάσωσιν εἰς μεθόδους τοῦ ὑπολογίζεσθαι, καὶ νὰ εὐκολύνωσι τούτων τὴν χρῆσιν.

Θέλομεν δὲ ἐκθέσει κατὰ διαδοχὴν τὰς ἐργασίας ταύτας, ἀνακαλοῦντες εἰς τὴν μνήμην μας (ἀρ. 2), ὅτι διὰ νὰ καταστήσωμεν τὰς μεθόδους ἀνεξαρτήτους ἀπὸ πᾶν εἶδος ζητήματος, πρέπει νὰ θεωρήσωμεν τοὺς ἀριθμοὺς ὡς ἀριθμοὺς ἀφῃρημένους· μ' ὅλον τοῦτο εἰς τὰς ἐφαρμογὰς τὰς διωρισμένας πρὸς γύμνασιν τῶν ἀρχαρίων θέλομεν ἀναπτύξει καὶ ζητήματα μὲ ἀριθμοὺς διακεκριμένους.

Διὰ νὰ ἐξακολουθήσωμεν δὲ κανονικῶς, τουτέστι διατρέχοντες πρότερον τὴν ἁπλουστέραν ὁδὸν, καὶ μετὰ ταῦτα τὴν σύνθετον, ἐκθέτομεν πρῶτον τὰς ἐπάνω εἰς τοὺς ἀκεραίους ἀριθμοὺς γινομένας πράξεις.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α'.

Πράξεις ἐπὶ τῶν ἀκεραίων Ἀριθμῶν.

Περὶ τῆς Προσθέσεως.

§. 10. Τὸ νὰ συνάψωμεν ἢ νὰ προσθέσωμεν πολλοὺς ἀριθμοὺς μεταξύ των, εἶναι νὰ τοὺς ἑνώσωμεν ὅλους εἰς ἕνα μόνον, ἢ νὰ σχηματίσωμεν ἄλ-

λον ἀριθμὸν περιέχοντα τόσας μονάδας, ὅσαι εἰς ἕκαστον τῶν διαφορετικῶν τούτων ἀριθμῶν εὑρίσκονται.

Τὸ ἐξαγόμενον ταύτης τῆς πράξεως καλεῖται κεφάλαιον ἢ ὅλον ἢ ἄθροισμα.

Ἡ πρόσθεσις τῶν ἀριθμῶν ἑνὸς μόνου ψηφίου δὲν παριστάνει κἀμμίαν δυσκολίαν. Ἡ νεολαία ἐξ ἁπαλῶν ὀνύχων συνειθίζει νὰ τὴν κάμνῃ διὰ τῶν δακτύλων, καὶ οὕτως ἐγχαράττει τὰ ἐξαγόμενα εἰς τὴν μνήμην.

Οὕτως ἂς προστεθῶσιν οἱ ἀριθμοὶ 5, 7, 4, 8 καὶ 6· λέγουσι 5 καὶ 7 κάμνουν 12, καὶ 4 κάμνουν 16 καὶ 8 κάμνουν 24 καὶ 6 κάμνουν 30. Λοιπὸν 30 εἶναι τὸ ζητούμενον κεφάλαιον.

Εὑρίσκομεν παρομοίως ὅτι 42 εἶναι τὸ κεφάλαιον τῶν ἀριθμῶν 7, 9, 6, 5, 8, 7.

Μᾶς προβάλλουν δὲ ἤδη νὰ προσθέσωμεν τοὺς ἀριθμοὺς 7453 καὶ 1534. Ἀφ' οὗ γράψωμεν τοὺς δύο ἀριθμοὺς, ὡς ἐδῶ βλέπομεν,

$$\begin{array}{r} 7453 \\ \underline{1534} \\ 8987 \end{array}$$

καὶ ὑπογραμμίσωμεν, λέγομεν ἀρχίζοντες ἀπὸ τὰς ἁπλᾶς μονάδας, 3 καὶ 4 κάμνουν 7, τὸ ὁποῖον γράφομεν ὑπὸ τὰς μονάδας· περνῶντες μετὰ ταῦτα εἰς τὰς δεκάδας, λέγομεν 3 καὶ 5 κάμνουν 8, τὸ ὁποῖον γράφομεν ὑπὸ τὰς δεκάδας, ἔπειτα 5 καὶ 4 κάμνουν 9, τὸ ὁποῖον γράφομεν ὑπὸ τὰς ἑκατοντάδας· τέλος πάντων 7 καὶ 1 κάμνουν 8, τὸ ὁποῖον γράφομεν ὑπὸ τὰς χιλιάδας.

Ὁ ἀριθμὸς 8987 ὁ εὑρεθεὶς ἀπ' αὐτὴν τὴν πρᾶξιν εἶναι τὸ ζητούμενον κεφάλαιον τῶν δεδομένων ἀριθμῶν, ἐπειδὴ περιέχει τὰς ὁποίας αὐτοὶ ἔχουν μονάδας, δεκάδας, ἑκατοντάδας καὶ χιλιάδας.

Ἂς προσθέσωμεν ἀκόμη τοὺς τέσσαρας ἀριθμοὺς 5047, 859, 3507, 846· τοὺς γράφομεν ἐδῶ εἰς

τὸ πλευρὸν, καὶ λέγομεν ἀρχίζοντες ἀπὸ τὰς μονάδας: 7 καὶ 9 κάμνουν 16 καὶ 7 κάμνουν 23 καὶ 6 κάμνουν 29· γράφομεν τὰς 9 ἁπλᾶς μονάδας ὑπὸ τὴν πρώτην στήλην, καὶ κρατοῦμεν τὰς δύο δεκάδας διὰ νὰ τὰς ἑνώσωμεν μὲ τὰ ψηφία τῆς ἀκολούθου στήλης, ἐπειδὴ καὶ αὐτὰ παρασταίνον δεκάδας.

```
 5047
  859
 3507
  846
-----
10256
```

Περνῶντες εἰς ταύτην τὴν στήλην, λέγομεν, 2 τὰ κρατηθέντα καὶ 4 κάμνουν 6 καὶ 5 κάμνουν 11 καὶ 0 κάμνουν 11 καὶ 4 κάμνουν 15, γράφομεν 5 εἰς τὴν τάξιν τῶν δεκάδων, καὶ κρατοῦμεν 1 ἑκατοντάδα, τὴν ὁποίαν φέρομεν εἰς τὴν στήλην τῶν ἑκατοντάδων.

Ἐργαζόμενοι εἰς ταύτην τὴν στήλην, ὡς καὶ εἰς τὰς προτητερινὰς εὑρίσκομεν 22 ἑκατοντάδας ἢ 2 ἑκατοντάδας, τὰς ὁποίας γράφομεν ὑπὸ τὰς ἑκατοντάδας, καὶ 2 χιλιάδας τὰς ὁποίας κρατοῦμεν, διὰ νὰ τὰς φέρωμεν εἰς τὴν στήλην τῶν χιλιάδων.

Τέλος πάντων 2 τὰ κρατηθέντα καὶ 5 κάμνουν 7 καὶ 3 κάμνουν 10· θέτομεν 0 ὑπὸ τὴν στήλην τῶν χιλιάδων καὶ τὴν 1 δεκάδα χιλιάδος γράφομεν ὑπὸ τὴν ἐννοουμένην στήλην τῶν δεκάδων χιλιάδος. Ἔχομεν λοιπὸν τὸ ζητούμενον κεφάλαιον 10259.

Γενικὸς Κανών. Διὰ νὰ προσθέσωμεν πολλοὺς ἀριθμοὺς μεταξύ των γράφομεν αὐτοὺς τὸν ἕνα ὑπὸ τὸν ἄλλον οὕτως, ὥστε αἱ μονάδες τῆς αὐτῆς τάξεως νὰ εὑρίσκωνται εἰς τὴν αὐτὴν στήλην, καὶ ὑπογραμμίζομεν, προσθέτομεν ἔπειτα διαδοχικῶς ὅσα ψηφία συνθέτουν ἑκάστην κατὰ κάθετον στήλην, ἀρχίζοντες ἀπὸ τὴν στήλην τῶν ἁπλῶν μονάδων, περνῶντες δὲ εἰς τὰς ἀριστερὰς αὐτῆς στήλας, ὑπογράφομεν τὸ κεφάλαιον ἑκάστης στήλης, ἂν τοῦτο ἐκφράζεται μὲ ἓν μόνον ψηφίον, ἂν ὅμως ὑπερβαίνῃ

τὸ 9, εἰς τὴν ὁποίαν περίστασιν ἐκφράζεται μὲ πολλὰ ψηφία, τῶν ὁποίων τὸ εἰς τὰ δεξιὰ τελευταῖον ἐκφράζει τὰς μονάδας αὐτῆς τῆς στήλης, καὶ τὰ ἄλλα, τὰ ὁποῖα εἶναι εἰς τὰ ἀριστερὰ τὰς δεκάδας τῆς αὐτῆς τάξεως, γράφομεν μόνον τὸ ψηφίον τῶν μονάδων ὑπὸ τὴν στήλην, τὰς δὲ δεκάδας κρατοῦμεν διὰ νὰ τὰς προσθέσωμεν μὲ τὰ ψηφία τῆς ἀμέσου ἀριστερᾶς στήλης, καὶ ὅταν ἐκτελέσωμεν τὴν αὐτὴν πρᾶξιν εἰς ὅλας τὰς στήλας, θέλομεν εὕρει ὑπὸ τὴν γραμμὴν τὸ ζητούμενον κεφάλαιον, ἐπειδὴ τοῦτο θέλει προκύψει ἐκ τῆς ἑνώσεως τῶν μονάδων, δεκάδων, ἑκατοντάδων κ. τ. λ. αἱ ὁποῖαι ἐμβαίνουν εἰς τοὺς προτεθέντας ἀριθμούς.

§. 11. Παρατήρησις. Ἐὰν τὸ μεγαλήτερον κεφάλαιον τῶν εἰς ἑκάστην στήλην περιεχομένων ψηφίων ἦτον 9, ἀδιαφόρως ἀρχίζαμεν τὴν πρᾶξιν ἀπὸ τὴν πρόσθεσιν τῶν ἁπλῶν μονάδων, ἢ τῶν μονάδων ἀνωτέρου εἴδους· ἀλλ' ἐπειδὴ συμβαίνει συχνότερα νὰ ὑπερβαίνωσι τὸ 9 πολλὰ τοιαῦτα κεφάλαια, ἐὰν ἀρχίσωμεν ἀπὸ τ' ἀριστερὰ, ἠθέλαμεν ὑποχρεόνεσθαι συχνὰ νὰ γυρίζωμεν ὀπίσω, διὰ νὰ διορθόνωμεν ψηφίον τὶ, τὸ ὁποῖον εἴχαμεν γράψει, καὶ νὰ τὸ αὐξάνωμεν ἀπὸ τόσας μονάδας, ὅσας ἠθέλαμεν λαμβάνει δεκάδας ἀπὸ τὰς μονάδας τῆς ἀκολούθου στήλης, ὅταν εἰς αὐτὴν ἐργαζώμεθα. Ἰδοὺ λοιπὸν διατὶ πάντοτε πρέπει ν' ἀρχίζωμεν καλλίτερα ἀπὸ τὰ δεξιὰ καὶ ὄχι ἀπὸ τ' ἀριστερά.

Περὶ τῆς ἀφαιρέσεως.

§. 12. Τὸ ν' ἀφαιρέσωμεν ἀριθμὸν ἀπὸ ἄλλον, συνίσταται εἰς τὸ νὰ ζητήσωμεν τὴν ὑπεροχὴν τοῦ μεγαλητέρου ἐπὶ τοῦ μικροτέρου. Τὸ ἐξαγόμενον ταύ-

της τῆς πράξεως καλεῖται ὑπόλοιπον, ὑπεροχὴ, ἢ διαφορά. Ὅταν οἱ δεδομένοι ἀριθμοὶ ἔχωσιν ἓν μόνον ψηφίον, ἡ ἀφαίρεσις εἶναι εὔκολος, ὡς ἡ διαφορὰ τοῦ 9 ἀπὸ 6 εἶναι 3, ἢ ἀφαιρουμένου 6 ἀπὸ 9 μένουν 3· παρομοίως 5 ἀπὸ 7 μένουν 2.

Δυνάμεθα εὐκόλως νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀριθμὸν ἐκφραζόμενον μὲ ἓν μόνον ψηφίον ἀπὸ ἄλλον μὴ ὑπερβαίνοντα τὸ εἴκοσιν, ὡς ἀφαιρουμένου 7 ἀπὸ 13 μένουν 6, ἐπειδὴ 7 καὶ 6 κάμνουν 13· παρομοίως 9 ἀπὸ 17 μένουν 8, ἐπειδὴ 8 καὶ 9 κάμνουν 17.

Αὗται αἱ πράξεις, αἱ ὁποῖαι ὑποθέτουν μόνον τὴν γύμνασιν τῆς μνήμης ἐπάνω εἰς τὴν πρόσθεσιν τῶν μὲ ἓν μόνον ψηφίον ἀριθμῶν, θέλουν μᾶς χρησιμεύσει ὡς βάσις εἰς τὴν ἀφαίρεσιν τῶν μὲ πολλὰ ψηφία ἀριθμῶν.

Ἂς ἀφαιρέσωμεν κατὰ πρῶτον 5467 ἀπὸ 8789.

Τεθέντος τοῦ μικροτέρου ἀριθμοῦ ὑπὸ τὸν μείζονα, καὶ ὑποσημειωθείσης τῆς ὁριζοντίου γραμμῆς, λέγομεν ἀρξάμενοι ἐκ τῶν ἁπλῶν μονάδων, 7 ἀπὸ 9 μένουν 2, τὸ ὁποῖον γράφομεν ὑπὸ τὴν στήλην τῶν μονάδων· περνῶντες εἰς τὰς δεκάδας λέγομεν 6 ἀπὸ 8 μένουν 2, τὸ ὁποῖον γράφομεν ὑπὸ τὴν τάξιν τῶν δεκάδων, ἐκτελοῦμεν τὸ αὐτὸ ἐπὶ τῶν ἑκατοντάδων καὶ χιλιάδων· 4 ἀπὸ 7 μένουν 3, 5 ἀπὸ 8 μένουν 3, τὸ ὁποῖον δίδει τέλος πάντων 3322 τὸ ζητούμενον ὑπόλοιπον.

8789
5467
3322

Τῷ ὄντι ἐκ τῆς ἰδίας φύσεως τῶν ἐκτελουμένων πράξεων βλέπομεν, ὅτι ὁ μεγαλήτερος ἀριθμὸς περιέχει περισσότερον παρὰ τὸν δεύτερον 2 ἁπλᾶς μονάδας, πλέον 2 δεκάδας, πλέον 3 ἑκατοντάδας, πλέον 3 μονάδας χιλιάδος, καὶ διὰ τοῦτο ὑπερβαίνει τὸν μικρότερον κατὰ 3322.

Ἂς λάβωμεν διὰ δεύτερον παράδειγμα νὰ εὕρωμεν τὴν ὑπάρχουσαν διαφορὰν μεταξὺ τῶν δύο ἀριθμῶν 83456, καὶ 28784.

Θέτοντες τοὺς δύο τούτους ἀριθμοὺς ὡς εἰς τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα λέγομεν κατὰ πρῶτον, 4 ἀπὸ 6, μένουν 2, τὸ ὁποῖον γράφομεν ὑπὸ τὰς μνάδας.

83456
28784
54672

Ἀλλὰ περνῶντες εἰς τὴν στήλην τῶν δεκάδων ἀπαντῶμεν δυσκολίαν· ὁ κάτω χαρακτὴρ εἶναι μεγαλήτερος ἀπὸ τὸν ἄνω, καὶ διὰ τοῦτο εἶναι ἀδύνατον νὰ ἀφαιρεθῇ. Διὰ νὰ ἐξαλείψωμεν ταύτην τὴν δυσκολίαν, δανειζόμεθα νοερῶς ἀπὸ τὸν χαρακτῆρα τῶν ἑκατοντάδων μίαν ἑκατοντάδα, ἥτις κάμνει δέκα δεκάδας, τὰς ὁποίας ἑνόνοντες μὲ τὰς ὁποίας ἔχομεν πέντε δεκάδας, λαμβάνομεν 15 δεκάδας, καὶ λέγομεν 8 ἀφαιρουμένου ἀπὸ τὰ 15, μένουν 7, τὸ ὁποῖον γράφομεν ὑπὸ τὴν στήλην τῶν δεκάδων.

Περνῶντες εἰς τὴν στήλην τῶν ἑκατοντάδων παρατηροῦμεν, ὅτι ὁ ἄνω χαρακτὴρ 4 πρέπει νὰ ἐλαττωθῇ ἀπὸ 1, ἐπειδὴ ἐδανείσθημεν ταύτην τὴν μονάδα εἰς τὴν προτέραν ἀφαίρεσιν· τότε λέγομεν 7 ἀπὸ 3 εἶναι ἀδύνατον νὰ ἀφαιρεθῇ, ἀλλὰ δανειζόμενοι ὡς ἀνωτέρω μίαν χιλιάδα, ἰσοδυναμοῦσαν μὲ δέκα ἑκατοντάδας, καὶ οὕτω σχηματίζοντες 13 ἑκατοντάδας, ἔπειτα ἀφαιροῦντες 7 ἀπὸ 13, γράφομεν τὸ ὑπόλοιπον 6 ὑπὸ τὴν τάξιν τῶν ἑκατοντάδων.

Περνῶντες δὲ εἰς τὰς χιλιάδας, καὶ μὴ δυνάμενοι νὰ ἀφαιρέσωμεν 8 ἀπὸ 2, ἀλλ' 8 ἀπὸ 12, ἔχομεν 4, τὸ ὁποῖον γράφομεν ὑπὸ τὴν τάξιν τῶν χιλιάδων.

Τέλος πάντων ἐπειδὴ ὁ χαρακτὴρ 8 τῶν δεκάδων τῶν χιλιάδων πρέπει, ἐπειδὴ ἐδανείσθημεν, νὰ

ἐκφρασθῇ διὰ 7, λέγομεν 2 ἀπὸ 7 μένουν 5· οὕτω τὸ ζητούμενον ὑπόλοιπον ἢ ἡ ὑπεροχὴ τοῦ μείζονος ἀριθμοῦ ἐπὶ τοῦ ἐλάσσονος εἶναι 54672.

Διὰ νὰ καταλάβωμεν τίνι τρόπῳ διὰ τούτου τοῦ μέσου φθάνομεν εἰς τὸ ζητούμενον, ἀρκεῖ νὰ παρατηρήσωμεν, ὅτι ἐν ᾧ ἐκτελοῦμεν τὰς εἰδικὰς ἀφαιρέσεις δυνάμεθα νὰ διατάξωμεν τοὺς δύο ἀριθμοὺς κατὰ τὸν ἀκόλουθον τρόπον.

	δεκάδες χιλιάδος·	χιλιάδες·	ἑκατοντάδος·	δεκάδες·	μονάδες.
αος ἀριθμός.	7	12	13	15	6
β ος ἀριθμός.	2	8	7	8	4
	5	4	6	7	2

Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι ὁ ἀνωτέρω ἀριθμὸς περιέχει περισσότερον παρὰ τὸν κάτω ἀριθμὸν, 2 μονάδας, 7 δεκάδας, 6 ἑκατοντάδας, 4 χιλιάδας καὶ 5 δεκάδας χιλιάδος, ἢ τὸν ὑπερβαίνει κατὰ 54672. — Ἔστω τρίτον παράδειγμα νὰ ἀφαιρέσωμεν 158429 ἀπὸ 300405. Ἐπειδὴ 9, ψηφίον τῶν μονάδων τοῦ κάτω ἀριθμοῦ εἶναι μεγαλήτερον παρὰ τὸ ἀνταποκρινόμενον ψηφίον 5 τοῦ ἄνω ἀριθμοῦ, πρέπει νὰ δανεισθῶμεν μίαν δεκάδα ἀπὸ τὸ πρῶτον εἰς τ' ἀριστερὰ ψηφίον, ἀλλ' ἐπειδὴ τοῦτο εἶναι 0, πρέπει νὰ συντρέξωμεν εἰς τὸ ψηφίον 4 τῶν ἑκατοντάδων, ἀπὸ τὸ ὁποῖον λαμβάνομεν 1 μονάδα, ἥτις ἰσοδυναμεῖ μὲ δέκα δεκάδας, καὶ ἐπειδὴ ἔχομεν ἀνάγκην ἀπὸ μίαν μόνην δεκάδα παραιτοῦμεν 9 ἄνω τοῦ 0· μετὰ ταῦτα προσθέτομεν τὴν 1 δεκάδα ἢ τὰς 10 μονάδας μὲ τὰς 5 μονάδας, καὶ οὕτως ἔχομεν 15· λέγομεν 9 ἀπὸ 15 μένουν 6, τὸ ὁποῖον γράφομεν ὑπὸ τὰς μονάδας.

```
   99 9
  300405
  158429
  ------
  141976
```

Περνῶντες εἰς τὰς δεκάδας, λέγομεν, 2 ἀπὸ 9 μένουν 7. Διὰ δὲ τὰς ἑκατοντάδας, ἐπειδὴ τὸ ἄνω ψηφίον 4 δὲν ἀξίζει πλέον παρὰ 3, ἐξ αἰτίας τοῦ δανείσματος, διὰ τὸ ὁποῖον δὲν δυνάμεθα νὰ ἀφαιρέσωμεν 4 ἀπὸ τὸ 8, δανειζόμεθα ἀπὸ τὸ πρῶτον ψηφίον κατὰ τὰ ἀριστερά· ἀλλ' ἐπειδὴ τὸ ψηφίον τοῦτο, καὶ τὸ εὑρισκόμενον εἰς τὰ ἀριστερά του εἶναι μηδενικά, δανειζόμεθα μίαν μονάδα ἀπὸ τὸ σημαντικὸν ψηφίον 3· αὕτη ἡ μονὰς ἰσοδυναμεῖ μὲ 10 τῆς ἀκολούθου τάξεως, καὶ 100 τῆς τάξεως τῶν χιλιάδων, καὶ ἐπειδὴ ἔχομεν ἀνάγκην ἀπὸ μίαν μονάδα ταύτης τῆς τάξεως, παραιτοῦμεν 99, τὰς ὁποίας γράφομεν ἐπάνω τῶν δύο μηδενικῶν· προσθέτοντες δὲ μίαν χιλιάδα εἰς τὰς ἑκατοντάδας σχηματίζομεν 13, καὶ λέγομεν 4 ἀπὸ τὰ 13 μένουν 9, τὰς ὁποίας γράφομεν ὑπὸ τὴν στήλην τῶν ἑκατοντάδων.

Εἰς τὰς ἀκολούθους δύο ἀφαιρέσεις, ἐπειδὴ ἕκαστον τῶν μηδενικῶν πληροῦται μὲ ἓν 9, λέγομεν 8 ἀπὸ 9 μένει 1, καὶ 5 ἀπὸ 9 μένουν 4.

Περνῶντες δὲ εἰς τὴν πρώτην ἐν ἀριστερᾷ στήλην λέγομεν 1 ἀπὸ 2 (ἐπειδὴ τὸ ψηφίον 3 ἐλαττοῦται ἀπὸ 1) μένει 1· καὶ οὕτως ἔχομεν τὸ ζητούμενενον ὑπόλοιπον 141976.

Τῷ ὄντι, ἐὰν παρατηρήσωμεν τίνι τρόπῳ ὁ μεγαλήτερος ἀριθμὸς ἀνελύθη, δυνάμεθα νὰ διατάξωμεν, ὡς ἀκολουθεῖ, τὴν πρᾶξιν.

	ἑκατοντάδες χιλιάδος·	δεκάδες χιλιάδος·	χιλιάδες·	ἑκατοντάδες·	δεκάδες·	μονάδες.
α^ος ἀριθμός.	2	9	9	13	9	15
β^ος ἀριθμός.	1	5	8	4	2	9
	1	4	1	9	7	6

Λοιπὸν ὁ ἄνω ἀριθμὸς ὑπερβαίνει τὸν κάτω ἀριθμὸν ἀπὸ 6 μονάδας, 7 δεκάδας, 9 ἑκατοντάδας, 1

χιλιάδα, 4 δεκάδας χιλιάδος, 1 ἑκατοντάδα χιλιάδος ἢ 141976.

Γενικὸς Κανών. Διὰ νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν ἀφαίρεσιν δύο ἀριθμῶν θέτομεν τὸν μικρότερον ἀριθμὸν ὑπὸ τὸν μεγαλήτερον οὕτως, ὥστε αἱ μονάδες τῆς ἰδίας τάξεως νὰ εὑρίσκωνται εἰς τὴν αὐτὴν στήλην, μετὰ ταῦτα ὑπογραμμίζομεν, καὶ ἀφαιροῦμεν διαδοχικῶς τὰς μονάδας ἀπὸ τὰς μονάδας, τὰς δεκάδας ἀπὸ τὰς δεκάδας, τὰς ἑκατοντάδας ἀπὸ τὰς ἑκατοντάδας κ. τ. λ. καὶ γράφομεν τὰ μερικὰ ὑπόλοιπα, τὸ ἓν εἰς τὰ ἀριστερὰ τοῦ ἄλλου· ὁ δὲ σχηματιζόμενος ἐκ τοῦ ἀθροίσματος τῶν τοιούτων ὑπολοίπων ἀριθμὸς εἶναι τό ὅλον ζητούμενον ὑπόλοιπον.

Ὅταν τὸ κάτω ψηφίον ἦναι μεγαλήτερον ἀπὸ τὸ ἄνω αὐτοῦ, αὐξάνομεν νοερῶς κατὰ 10 μονάδας, καὶ ἐλαττοῦμεν τὸ ψηφίον τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται εἰς τὰ ἀριστεράτου κατὰ μονάδα.

Ἐὰν ἀμέσως εἰς τὰ ἀριστερὰ τοῦ ἄνω φηφίου μικροτέρου ἀπὸ τὸ κάτω ἀντικείμενον εὑρίσκεται ἓν ἢ πολλὰ μηδενικὰ, αὐξάνομεν πάντοτε νοερῶς τὸ ἄνω ἀπὸ 10 μονάδας, ὅμως εἰς τὰς ἀκολούθους ἀφαιρέσεις μεταχειριζόμεθα τὰ μηδενικὰ ὡς 9, καὶ ἐλαττοῦμεν ἀπὸ μίαν μονάδα τὸ ἄνω σημαντικὸν ψηφίον τὸ ἀμέσως εἰς τὰ ἀριστερὰ τῶν μηδενικῶν εὑρισκόμενον.

Εὑρίσκομεν κατὰ τὴν κοινὴν μέθοδον ὅτι ἐὰν

ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ	603000401
ἀφαιρέσωμεν τὸν ἀριθμὸν	305724787
τὸ ἀποτέλεσμα τῆς πράξεως εἶναι	297275614

§. 13. Πρώτη Παρατήρησις. Ἐὰν ἕκαστον ψηφίον τοῦ κάτω ἀριθμοῦ εἶναι μικρότερον παρὰ τὸ τοῦ ἀνταποκρινομένου ψηφίου, εἶναι τὸ αὐτὸ νὰ ἀρχίσωμεν τὴν ἀφαίρεσιν ἢ ἀπὸ τὰ ἀριστερὰ ἢ ἀπὸ τὰ δεξιά·

ἀλλ' ἐπειδὴ ἀκολουθεῖ πολλάκις ἓν τῶν κάτω ψηφίων νὰ ὑπερβαίνῃ τὸ ἄνω ψηφίον, ἡ μερικὴ ἀφαίρεσις ἐκτελεῖται μὲ δανεισμὸν ἀπὸ τὸ ἄνω ψηφίον, ἢ ἀπὸ ἄλλο κατὰ τ' ἀριστερὰ ἐκείνου, ἐπὶ τοῦ ὁποίου ἐργαζόμεθα· διὰ τοῦτο πρέπει νὰ ἀρχίζωμεν ἀπὸ τὰ ἀριστερὰ, διὰ νὰ ἠμποροῦμεν πάντοτε νὰ δανειζώμεθα, ὅταν ἡ ἀνάγκη τὸ καλέσῃ.

§. 14. Δευτέρα Παρατήρησις. Βλέπομεν, ὅτι εἶναι τὸ αὐτὸ εἴτε ἂν ἐλαττώσωμεν ἀπὸ μίαν μονάδα τὸ ψηφίον ἐκ τοῦ ὁποίου ἐδανείσθημεν, εἴτε ἂν παραιτήσωμεν τὸ ψηφίον, ὡς εὑρίσκεται, αὐξάνοντες ὅμως τὸ κάτω αὐτοῦ ἀνταποκρινόμενον ψηφίον ἀπὸ μίαν μονάδα· οὗτος ὁ τρόπος τῆς πράξεως εἶναι ἐν γενει πλέον σύντομος εἰς τὰς ἐφαρμογάς.

Οὕτως εἰς τὸ τελευταῖον παράδειγμα, ἀφ' οὗ εἴπωμεν διὰ τὰς ἁπλᾶς μονάδας 7 ἀπὸ 11 μένουν 4, ἀντὶ νὰ εἴπωμεν διὰ τὰς δεκάδας 8 ἀπὸ τὰ 9 μένουν 1, λέγομεν 9 ἀπὸ 10 μένει 1, παρομοίως ἀντὶ νὰ εἴπωμεν διὰ τὰς ἑκατοντάδας 7 ἀπὸ 13 μένουν 6, λέγομεν 8 ἀπὸ 14 μένουν 6, καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

Ὅμως ὅταν πράττωμεν ταύτην τὴν μεταβολὴν, πρέπει νὰ παρατηρῶμεν μὲ ἀκρίβειαν νὰ μὴν αὐξάνωμεν τὸ κάτω ψηφίον, παρὰ ὅταν εἰς τὴν προτέραν ἀφαίρεσιν ἐδανείσθημεν.

Βάσανοι τῆς Προσθέσεως καὶ Ἀφαιρέσεως.

§. 15. Καλεῖται βάσανος μιᾶς ἀριθμητικῆς πράξεως πρᾶξίς τις ἄλλη, τὴν ὁποίαν κάμνομεν διὰ νὰ βεβαιώσωμεν τὴν ἀκρίβειαν τῆς πρώτης.

Τὴν βάσανον τῆς προσθέσεως κάμνομεν, προσθέτοντες ἐκ νέου, πλὴν ἀρχίζοντες ἀπὸ τὰ ἀριστερὰ, τοὺς ἀριθμοὺς, τοὺς ὁποίους εἴχαμεν προσθέσει, καὶ ἀθροίζοντες τὰ ψηφία τὰ εὑρισκόμενα εἰς τὴν πρώτην ἐν ἀριστερᾷ στήλην, τὰ ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὸ μέρος τὸ ἀνταποκρινόμενον εἰς τὸ ὅλον κεφάλαιον, καὶ γράφομεν ὑπ' αὐτοῦ τὸ ὑπόλοιπον, τὸ ὁποῖον ἀνάγομεν νοερῶς εἰς δεκάδας τοῦ ἀκολούθου ψηφίου, διὰ νὰ τὰς ἑνώσωμεν μὲ τὰς μονάδας ταύτης τῆς τάξεως εἰς τὸ ὅλον κεφάλαιον. Κάμνομεν παρομοίως τὸ μερικὸν κεφάλαιον τῆς δευτέρας στήλης εἰς τὰ ἀριστερὰ, καὶ τὸ ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὸ μέρος τοῦ ὅλου κεφαλαίου, τὸ ὁποῖον εἰς αὐτὸ ἀνταποκρίνεται· ἐξακολουθοῦμεν δὲ οὕτως ἕως εἰς τὴν τελευταίαν στήλην, τῆς ὁποίας τὸ ὅλον κεφάλαιον ἀφαιρούμενον δὲν πρέπει νὰ ἀφίνῃ κἀνὲν ὑπόλοιπον.

Οὕτως ἀφ' οὗ εὑρήκαμεν, ὅτι οἱ τέσσαρες ἀριθμοί

	5047
	859
	3507
	846
ἔχουσι κεφάλαιον	10259
	2126

διὰ νὰ δοκιμάσωμεν τὸ ἐξαγόμενον 10259, προσθέτομεν τοὺς ἰδίους ἀριθμοὺς ἀρχίζοντες ἀπὸ τὰ ἀριστερὰ, καὶ λέγομεν: 5 καὶ 3 κάμνουν 8 χιλιάδες, αἱ ὁποῖαι ἀφαιρούμεναι ἀπὸ τὰς 10 χιλιάδας δίδουσιν ὑπόλοιπον 2 χιλιάδας, αἱ ὁποῖαι ὁμοῦ μὲ τὰς δύο ἑκατοντάδας κάμνουν 22 ἑκατοντάδες, μετὰ ταῦτα: 8 καὶ 5 κάμνουν 13 καὶ 8 κάμνουν 21, τὰς ὁποίας ἀφαι-

ροῦντες ἀπὸ τὰς 22, ἔχομεν ὑπόλοιπον μίαν ἑκατοντάδα, ἥτις ἑνωμένη μὲ τὰς 5 δεκάδας σχηματίζει 15 δεκάδας, 4 καὶ 5 κάμνουν 9 καὶ 4 κάμνουν 13. λοιπὸν 13 ἀπὸ τὰς 15 μένουν 2, τὸ ὁποῖον συναπτόμενον μὲ τὸ 9 σχηματίζει τὸ 29, τέλος πάντων 7 καὶ 9 κάμνουν 16 καὶ 4 κάμνουν 23 καὶ 6 κάμνουν 29· 29 ἀπὸ 29 μένει μηδέν· λοιπὸν ἡ πρᾶξις εἶναι ὀρθή.

Ἡ Βάσανος τῆς ἀφαιρέσεως γίνεται, ὅταν προστεθῇ εἰς τὸν μικρότερον ἀριθμὸν τὸ ὑπόλοιπον, τὸ ὁποῖον ἐπροσδιορίσαμεν διὰ τῆς πράξεως· καὶ εἶναι φανερὸν, ὅτι πρέπει νὰ ξαναεύρωμεν τὸν μεγαλήτερον ἀριθμὸν, ἐπειδὴ τὸ ὑπόλοιπον τοῦτο ἄλλο δὲν εἶναι, παρὰ ἡ ὑπεροχὴ τοῦ μεγαλητέρου ἐπὶ τοῦ μικροτέρου. Οὕτως εἰς τὸ παράδειγμα ἀφ' οὗ ηὕραμεν, ὅτι 54672 εἶναι ἡ ὑπεροχὴ τοῦ μεγαλητέρου ἀριθμοῦ ἐπὶ τοῦ μικροτέρου, ἐὰν προσθέσωμεν αὐτὴν εἰς τὸν ἀριθμὸν 28784, πρέπει νὰ εὕρωμεν 83456, καθὼς τῷ ὄντι ἀκολουθεῖ.

83456	
28784	
54672	ὑπόλοιπον
83456	βάσανος.

§. 10. Ἰδοὺ καὶ νέα παραδείγματα προσθέσεως καὶ ἀφαιρέσεως μὲ τὰς βασάνους των.

Προσθέσεις.

83054	700548
256870	897597
748759	6588
90874	69764
130909	407300
8746	987846
1319212	1207047
[illegible]	4276690
	[illegible]

Ἀφαιρέσεις.

4073050062	20004001003
2803767086	8405128605
1269282976	11598872398
4073050062	20004001003

Πρόβλημα. Εἷς τραπεζίτης εἶχεν εἰς τὸ κιβώτιόν του ποσότητα 65750 φράγκων, ἀλλ' ἔκαμε πολλὰς πληρωμάς· διότι ἔδωκεν εἰς ἕνα ἄνθρωπον 13259 φράγκα, εἰς ἄλλον 18704 φράγκα, καὶ εἰς ἄλλον πάλιν 22050 φράγκα, παρομοίως εἰς ἕνα τέταρτον 9850, καὶ ἐπιθυμεῖ νὰ μάθῃ τὴν τοῦ κιβωτίου ὕστερον ἀφ' ὅλας ταύτας τὰς πληρωμὰς κατάστασιν.

Λύσις. Ἀφοῦ ἑνώσωμεν τὰ τέσσαρα ἀθροίσματα τὰ διαδοχικῶς πληρωμένα, ἀφαιροῦμεν τὸ κεφάλαιον ἀπὸ τὴν ποσότητα, τὴν ὁποίαν εἶχε, καὶ τὸ ἐξαγόμενον ἐκ ταύτης τῆς ἀφαιρέσεως θέλει εἶναι ἡ ποσότης τῶν χρημάτων, ἥτις τοῦ ἔμεινεν εἰς τὸ κιβώτιον.

Πίναξ τῶν πράξεων.

13259	65750	Ποσότης τῶν χρημ., τὴν ὁποίαν εἶχε.
18704	63863	Κεφάλαιον, τὸ ὁποῖον ἐπλήρωσε.
22050	1887	Εἶναι ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον τοῦ ἔμεινε.
9850		
63863		
2112		

λοιπὸν μένουν εἰς τὸν τραπεζίτην 1887 φράγκα.

Βλέπομεν, ὅτι εἰς τὴν ἐκτέλεσιν τῆς ἄνω εἰρημένης προσθέσεως καὶ ἀφαιρέσεως, ἐθεωρήσαμεν τοὺς δεδομένους ἀριθμοὺς, ὡς ἀφῃρημένους, μ' ὅλον ὅτι ἐξεύρομεν, ὅτι εἶναι ἀριθμοὶ συγκεκριμένοι, καὶ τοῦτο ἐκ τῆς ἐκφράσεως τοῦ προβλήματος, ἀλλὰ φθάσαντες εἰς τὸ ἐξαγόμενον 1887, ἐδώκαμεν εἰς αὐτὸ τὸ ὄνομα τοῦ εἴδους τῶν μονάδων, τὰς ὁποίας οἱ ἀριθμοὶ ἐπαῤῥησίαζον εἰς τὴν ἔκφρασιν τοῦ ζητήματος· οὕτω πρέπει πάντοτε νὰ κάμνωμεν, ὅταν θέλωμεν νὰ ἐφαρμόσωμεν τὰς πράξεις τῶν ἐργασιῶν εἰς ζητήματα γεννώμενα ἀπὸ τὰς χρείας τῆς κοινωνίας. Ἐπειδὴ δὲ αὗται αἱ πράξεις εἶναι ἀνεξάρτητοι ἀπὸ τὴν φύσιν τῶν ἀριθμῶν, θεωροῦμεν αὐτοὺς ὡς ἀφῃρημένους· ἀρκεῖ νὰ δώσωμεν μετὰ ταῦτα εἰς τὸ τελικὸν ἐξαγόμμον τὸ ὄνομα τῆς μονάδος, τὴν ὁποίαν παριστάνει ἡ ἔκφρασις τοῦ ζητήματος.

Περὶ Πολλαπλασιασμοῦ.

§. 17. Τὸ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀριθμόν τινα ἐπ' ἄλλον, εἶναι νὰ (ἀρ. 9.) συνθέσωμεν τρίτον ἀριθμὸν μὲ τὸν πρῶτον, ὡς ὁ δεύτερος συντίθεται μὲ τὴν μονάδα. Λοιπὸν, ἐὰν οἱ δύο δεδομένοι ἀριθμοὶ ἦναι ἀκέραιοι, εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν αὐτῶν πρέπει νὰ λάβωμεν τὸν πρῶτον τοσάκις, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ δεύτερος.

Καλεῖται γινόμενον, τὸ ἐξαγόμενον ἑνὸς πολλαπλασιασμοῦ, πολλαπλασιαστέος ὁ ἀριθμὸς, ὅστις πρέπει νὰ πολλαπλασιασθῇ, καὶ πολλαπλασιαστὴς ἐκεῖνος ἐπὶ τὸν ὁποῖον πολλαπλασιάζομεν, ἢ ἐκεῖνος, ὅστις παρασταίνει ποσάκις πρέπει νὰ ληφθῇ ὁ πρῶτος· οἱ δύο ἀριθμοὶ ὁμοῦ καλοῦνται παράγοντες τοῦ γινομένου.

Κυρίως εἰπεῖν ὁ πολλαπλασιασμὸς ἄλλο δὲν εἶναι, εἰμὴ πρόσθεσις· ἐπειδὴ, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐξαγόμενον, ἀρκεῖ νὰ θέσωμεν τὸν πολλαπλασιαστέον ὑπὸ τὸν ἑαυτόν του τόσαις φοραῖς, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ πολλαπλασιαστὴς, μετὰ ταῦτα νὰ προσθέσωμεν ὅλους τούτους τοὺς ἀριθμοὺς ἀναμεταξύτων,. ἀλλ' ἡ τοιαύτη ἐργασία ἤθελεν εἶναι ἐπίπονος, ἐὰν ὁ πολλαπλασιαστὴς ἦτο σύνθετος ἐκ πολλῶν ψηφίων. Ἐζήτησαν λοιπὸν νὰ τὴν εὐκολύνωσι, καὶ εἰς ταύτην τὴν συντομίαν συνίσταται ὁ πολλαπλασιασμός.

§. 18. Ἐν ὅσῳ οἱ δύο παράγοντες ἐκφράζονται δι' ἑνὸς ψηφίου, τὸ γινόμενον λαμβάνεται διὰ τῆς διαδοχικῆς προσθέσεως τοῦ ἀριθμοῦ εἰς τὸν ἑαυτόν του· οὕτως διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν 7 ἐπὶ 5, λέγομεν 7 καὶ 7 κάμνουν 14 καὶ 7 κάμνουν 21 καὶ 7 κάμνουν 28 καὶ 7 κάμνουν 35· καὶ ἐπειδὴ ὁ τελευταῖος ἀριθμὸς εἶναι τὸ ἐξαγόμενον τῆς προσθέσεως 5 ἀριθμῶν ἴσων μὲ 7, διὰ τοῦτο ἐκφράζει τὸ γινόμενον τοῦ 7 ἐπὶ τὸν 5.

Οἱ ἀρχάριοι πρέπει νὰ γυμνασθῶσι κατὰ πρῶτον εἰς τοιούτου εἴδους πολλαπλασιασμοὺς, ἐπειδὴ πρέπει νὰ ἐντυπώσωσι τὰ γινόμενα εἰς τὴν μνήμην τους, ἐὰν θέλωσι μετὰ ταῦτα νὰ λαμβάνωσι μὲ εὐκολίαν τὰ γινόμενα ἀριθμῶν γραφομένων μὲ πολλὰ ψηφία· μ' ὅλον τοῦτο ἕως οὗ νὰ γυμνασθῶσι, πρέπει νὰ ἔχωσιν ὑπ' ὄψιν τὸν Πυθαγορικὸν καλούμενον πίνακα, ἢ πίνακα πολλαπλασιασμοῦ, ὁ ὁποῖος φέρει τὸ ὄνομα τοῦ ἐφευρετοῦ του, ἢ κἂν τοῦ πρώτου ἐκείνου, ὅστις ἐκοινολόγησε τὴν χρῆσίν του.

Πίναξ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

Ὁριζόντιον μέρος.

Κάθετον μέρος.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Ἡ πρώτη ὁριζόντιος ζώνη τούτου τοῦ πίνακος σχηματίζεται, ὅταν προσθέτεται ἓν εἰς τὸν ἑαυτόν του, ἕως εἰς τὸ 9.

Ἡ δευτέρα, ὅτον προσθέτωνται 2 εἰς τὸν ἑαυτόν του, ἡ τρίτη 3 καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

Παρατηροῦμεν προσέτι, ὅτι δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν τὸν πίνακα διὰ καθέτων στηλῶν· ἑκάστη κάθετος στήλη σχηματίζεται ἐκ τῶν ἰδίων ἀριθμῶν, ὡς ἡ ὁριζόντιος ζώνη· οὕτως ἡ ἕκτη ὁριζόντιος ζώνη σχηματίζεται ἐκ τῶν ἀριθμῶν 6, 12, 18 . . . . . 54, ἡ ἕκτη κατακάθετος στήλη περικλείει τοὺς ἰδίους ἀριθμοὺς 6, 12, 18 . . . 54.

Τούτου τεθέντος, διὰ νὰ εὕρωμεν διὰ μέσου τούτου τοῦ πίνακος τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν, ἀπὸ τοὺς ὁποίους ἕκαστος γράφεται δι' ἑνὸς ψηφίου, ζητοῦμεν τὸν πολλαπλασιαστέον εἰς τὴν πρώτην ὁριζόντιον ζώνην καὶ ἀναχωροῦντες ἐκ τοῦ τοιούτου ἀριθμοῦ, καταβαί-

νομεν κατὰ κάθετον ἕως νὰ φθάσωμεν ἀντικρὺ εἰς τὸν πολλαπλασιαστὴν, ὅστις εὑρίσκεται εἰς τὴν πρώτην κάθετον στήλην· ὁ δὲ περιεχόμενος ἀριθμὸς εἰς τὸ τετραγωνίδιον εἶναι τὸ γινόμενον.

Π. χ. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον τοῦ 8 ἐπὶ 5, καταβαίνομεν ὕστερον ἀπὸ τὸ 8 λαμβανόμενον ἐπὶ τῆς πρώτης ὁριζοντίου ζώνης, ἕως ἀντικρὺ τοῦ 5, λαμβανομένου εἰς τὴν πρώτην κάθετον στήλην, καὶ ὁ ἀριθμὸς 40 ὁ περιεχόμενος εἰς τὸ τετραγωνίδιον εἶναι τὸ γινόμενον ὁποῦ ἐζητοῦμεν.

Ἠμπορούσαμεν παρομοίως νὰ λάβωμεν 8 εἰς τὴν πρώτην κάθετον στήλην; καὶ νὰ διευθυνθῶμεν ὁριζοντίως ἕως ὑπὸ τὸ 5 λαμβανόμενον ἐπὶ τῆς πρώτης ὁριζοντίου ζώνης, καὶ ἠθέλαμεν εὕρει παρομοίως τὸ ζητούμενον γινόμενον 40.

§. 19. Ἂς ὑποθέσωμεν τώρα, ὅτι ὁ μὲν πολλαπλασιαστέος ἐκφράζεται διὰ πολλῶν ψηφίων· ὁ δὲ πολλαπλασιαστὴς ἔχει ἓν μόνον.

Ἂς πολλαπλασιασθῇ 8459 ἐπὶ 7.

Ἠδυνάμεθα (ἀρ. 17) νὰ λάβωμεν τὸ ἐξαγόμενον γράφοντες τὸν ἕνα ὑπὸ τὸν ἄλλον ἑπτὰ ἀριθμοὺς ἴσους μὲ τὸν 8459 8459
καὶ μετὰ ταῦτα νὰ προσθέσωμεν διαδο- 8459
χικῶς τὰς ἁπλᾶς μονάδας, δεκάδας, 8459
ἑκατοντάδας κ. τ. λ. τὸ προκύπτον ἤθελ' 8459
εἶναι 59213. 8459

Ἀλλὰ βλέπομεν, ὅτι εἶναι τὸ αὐτὸ, 8459
ὡς νὰ λάβωμεν διαδοχικῶς 7 φοραῖς τὰς 8459
9 μονάδας τοῦ πολλαπλασιαστέου, 7 59213
φοραῖς τὰς 5 δεκάδας κ. τ. λ. καὶ νὰ κάμωμεν τὸ ἄθροισμα ὅλων τούτων τῶν γινομένων.

Οὕτως, ἀφ' οὗ διατάξωμεν τὸν πολλαπλασιαστὴν 7 ὑπὸ τὸν πολλαπλασιαστέον, ὡς ἐδῶ βλέπομεν, καὶ ὑπογραμμίσωμεν, λέγομεν κατὰ πρῶτον 7 φοραῖς 9 κάμνουν 63 (ὅρα τὸν πίνακα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ) ἢ 6 δεκάδας καὶ 3 μονάδας, θέτομεν 3 ὑπὸ τὰς μονάδας, καὶ βαστοῦμεν τὰς 6 δεκάδας, διὰ νὰ τὰς ἐνώσωμεν μὲ τὸ γινόμενον τῶν δεκάδων τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐπὶ 7.

8459
7
59213

Λέγομεν μετὰ ταῦτα, 7 φοραῖς 5 κάμνουν 35 καὶ 6 τὰ κρατηθέντα κάμνουν 41 δεκάδας, ἢ 4 ἑκατοντάδας καὶ μίαν δεκάδα, γράφομεν 1, εἰς τὴν τάξιν τῶν δεκάδων, καὶ κρατοῦμεν τὰς 4 ἑκατοντάδας.

7 φοραῖς 4 κάμνουν 28, καὶ 4 τὰ κρατηθέντα κάμνουν 32 ἑκατοντάδας, ἢ 3 χιλιάδας καὶ 2 ἑκατοντάδας, γράφομεν 2 εἰς τὴν τάξιν τῶν ἑκατοντάδων, καὶ κρατοῦμεν 3.

Τέλος πάντων 7 φοραῖς 8 κάμνουν 56 καὶ 3 τὰ κρατηθέντα κάμνουν 59· θέτομεν 9 ὑπὸ τῶν χιλιάδων, καὶ πρὸ αὐτοῦ 5 δεκάδας χιλιάδος, ἐπειδὴ δὲν ἔχομεν πλέον ἄλλα ψηφία νὰ πολλαπλασιάσωμεν.

Εὑρίσκομεν οὕτω 59213 τὸ ζητούμενον γινόμενον.

Ἐντεῦθεν βλέπομεν, ὅτι διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀριθμὸν ἐκ πολλῶν ψηφίων ἐπὶ ἀριθμὸν ἐξ ἑνὸς μόνου, πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν διαδοχικῶς τὰς μονάδας, δεκάδας, ἑκατοντάδας κ. τ. λ. τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐπὶ τὸν πολλαπλασιαστὴν, καὶ νὰ γράφωμεν τὰ διαφορετικὰ μερικὰ γινόμενα εἰς τὴν ἀνήκουσαν τάξιν, προσέχοντες εἰς κάθε μερικὸν πολλαπλασιασμὸν νὰ βαστῶμεν τὰς δεκάδας, διὰ νὰ τὰς ἑνόνωμεν μὲ τὰς δεκάδας, τὰς ἑκατοντάδας μὲ τὰς ἑκατοντάδας κ. τ. λ.

Ἔστω δεύτερον παράδειγμα νὰ πολλαπλασιασθῇ 37008 ἐπὶ 9.

```
 37008
     9
------
333072
```

Λέγομεν κατὰ πρῶτον 9 φοραῖς 8 κάμνουν 72, γράφομεν 2 ὑπὸ τὴν τάξιν τῶν μονάδων, καὶ κρατοῦμεν 7.

Μετὰ ταῦτα 9 φοραῖς 0, δίδουν 0, καὶ ἐπειδὴ εἰς τὴν πρώτην πρᾶξιν ἐκρατήσαμεν 7 δεκάδας, πρέπει νὰ τὰς γράψωμεν εἰς τὴν τάξιν τῶν δεκάδων.

9 φοραῖς 0 κάμνουν 0, ὅθεν γράφομεν 0 εἰς τὴν τάξιν τῶν ἑκατοντάδων, ἐπειδὴ δὲν ὑπάρχουσι, καὶ πρέπει ἤδη νὰ βαστάξωμεν τὸν τόπον.

Μετὰ ταῦτα 9 φοραῖς 7 κάμνουν 63, γράφομεν 3, καὶ βαστοῦμεν 6.

Τέλος πάντων 9 φοραῖς 3 κάμνουν 27, καὶ 6 τὰ κρατηθέντα κάμνουν 33, γράφομεν 3 καὶ πρὸ αὐτοῦ τὰ ἄλλα 3.

Οὕτω τὸ ζητούμενον γινόμενον εἶναι 333072.

§. 20. Πρὶν περάσωμεν εἰς τὴν περίστασιν, εἰς τὴν ὁποίαν ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι σύνθετος ἐκ δύο ἢ περισσοτέρων ψηφίων, θέλομεν δείξει τὸ μέσον, διὰ τοῦ ὁποίου καταστaίνομεν ἕνα ἀριθμὸν 10, 100, 1000 . . . . . . φοραῖς μεγαλήτερον, τουτέστι νὰ πολλαπλασιάζωμεν αὐτὸν ἐπὶ 10, 100, 1000 κτλ.

Ἐκ τῆς θεμελιώδους ἀρχῆς τῆς ἀριθμήσεως (ἀρ. 5) προκύπτει φανερὰ, ὅτι ἐὰν θέσωμεν ἓν 0 εἰς τὰ δεξιὰ ἀριθμοῦ ἤδη γεγραμμένου, ἕκαστον σημαντικὸν ψηφίον αὐτοῦ, ἐν ᾧ προχωρεῖ μίαν τάξιν πρὸς τὰ ἀριστερὰ, ἐκφράζει μονάδας 10 φοραῖς μεγαλητέρας τῶν προτέρων· παρομοίως θέτοντες δύο 0 εἰς τὰ δεξιά του, τὸν καταστaίνομεν 100 φοραῖς μεγαλήτερον· ἐπειδὴ ἕκαστον σημαντικὸν ψηφίον ἐκφράζει μονάδας 100 φοραῖς μεγαλητέρας, καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

Λοιπὸν διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ὁποιονδήποτε ἀκέραιον ἀριθμὸν ἐπὶ 10, 100, 1000 κτλ. ἀρκεῖ νὰ προσθέσωμεν εἰς τὰ δεξιά του ἓν, δύο, τρία μηδενικά.

Οὕτως τὸ γινόμενον τοῦ 439 ἐπὶ 10, 100, 1000, 10000 καὶ ἐφεξῆς, εἶναι 4390, 43900, 439000, 4390000 καὶ ἐφεξῆς.

§. 21. Ἂς θεωρήσωμεν τώρα τὴν περίστασιν, καθ' ἣν ὁ πολλαπλασιαστέος καὶ ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι σύνθετοι ἐκ πολλῶν ψηφίων.

Πρόκειται νὰ πολλαπλασιασθῇ . . .	87468
ἐπὶ	5847
	612276
	3498720
	69974400
	437340000
	511425396

Γράφομεν τὸν πολλαπλασιαστὴν ὑπὸ τὸν πολλαπλασιαστέον οὕτως, ὥστε αἱ μονάδες τῆς ἰδίας τάξεως νὰ εὑρίσκωνται εἰς τὴν αὐτὴν στήλην, καὶ ὑπογραμμίζομεν. Μετὰ ταῦτα παρατηροῦμεν, ὅτι νὰ πολλαπλασιάσωμεν 87468 ἐπὶ 5847 ἄλλο δὲν εἶναι, παρὰ νὰ λάβωμεν τὸν πολλαπλασιαστέον 7 φοραῖς πλέον 40 φοραῖς, πλέον 800 φοραῖς, πλέον 5000 φοραῖς, καὶ νὰ ἑνώσωμεν μετὰ ταῦτα τὰ μερικὰ γινόμενα.

Ἠμποροῦμεν ἐξ ἀρχῆς νὰ εὕρωμεν κατὰ τὸν κανόνα τοῦ ἀριθ. 19 τὸ γινόμενον τοῦ 87468 ἐπὶ 7, ὅθεν εὑρίσκομεν 612276.

Ἀλλὰ τίνι τρόπῳ προσδιορίζομεν ἐκεῖνο τῶν 87468 ἐπὶ 40;

Ἂς ἐννοήσωμεν πρὸς ὀλίγην ὥραν, ὅτι ἐγράψαμεν 40 ἀριθμοὺς ἴσους ἕκαστον μὲ 87468 τὸν ἕνα ὑπὸ τὸν ἄλλον, καὶ ὅτι κάμνομεν τὴν πρόσθεσιν ὅλων αὐτῶν· οὕτως θέλομεν ἔχει τὸ ζητούμενον γινόμενον· ἀλλ' εἶναι φανερὸν, ὅτι οἱ 40 ἀριθμοὶ σχηματίζουν 10 τμήματα ἀπὸ 4 ἀριθμοὺς ἴσους· ἕκαστον μὲ 87468, ἀλλὰ τέσσαρες ἀριθμοὶ ἴσοι ἕκαστος μὲ 87468 δίδουσι 4 φοραῖς 87468 γινόμενον, τὸ ὁποῖον δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν κατὰ τὸν κανόνα τοῦ ἀρ. 19, καὶ ἴσον μὲ 349872. Πολλαπλασιάζοντες δὲ τὸ γινόμενον τοῦτο ἐπὶ 10, ἤτοι (ἀρ. 20) προσθέτοντες ἓν 0 εἰς τὰ δεξιά του, λαμβάνομεν 3498720, γινόμενον τοῦ 87468 ἐπὶ 40.

Βλέπομεν λοιπὸν, ὅτι αὕτη ἡ δευτέρα πρᾶξις ἀπαιτεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν πολλαπλασιαστέον ἐπὶ τοῦ ψηφίου 4, τὸ ὁποῖον θεωρεῖται ὡς νὰ ἐκφράζῃ ἁπλᾶς μονάδας, νὰ γράφωμεν ἓν 0 εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ γινομένου, καὶ νὰ θέσωμεν, ὡς ἀνωτέρω βλέπομεν, τὸ οὕτω ληφθὲν ἐξαγόμενον 3498720 ὑπὸ τὸ πρῶτον μερικὸν γινόμενον.

Παρομοίως διὰ νὰ ἐκτελέσωμεν τὸν πολλαπλασιασμὸν τῶν 87468 ἐπὶ 800, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν 87468 ἐπὶ 8, ἐκ τοῦ ὁποίου συνάγομεν 699744, καὶ μετὰ ταῦτα νὰ προσθέσωμεν δύο 00 εἰς τὸ γινόμενον, τὸν ὁποῖον θέτομεν ὑπὸ τὰ δύο προηγούμενα γινόμενα· τῷ ὄντι 800 ἀριθμοὶ ἴσοι μὲ 87468, καὶ θεμένοι ὁ εἷς ὑπὸ τὸν ἄλλον σχηματίζουσιν 100 τμήματα ἀπὸ 8 ἀριθμοὺς ἴσους ἕκαστον μὲ 87468, ἢ 100 ἀριθμοὺς ἴσους μὲ τὸ γινόμενον τῶν 87468 ἐπὶ 8, τουτέστι 69974400 . . . .

Ἀποδεικνύομεν δι' ὁμοίου συλλογισμοῦ, ὅτι διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ 5000 ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν 87468 ἐπὶ 5, καὶ νὰ προσθέσωμεν τρία

μηδενικὰ εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ γινομένου, καὶ νὰ γράφωμεν τὸ ἐξαγόμενον 437340000 ὑπὸ τὰ τρία πρῶτα γινόμενα.

Προσθέτοντες ἤδη τὰ τέσσαρα μερικὰ γινόμενα, εὑρίσκομεν τέλος πάντων τὸ ὅλον γινόμενον 511425396.

Σ. Κ. Συνειθίζουν ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον νὰ μὴ γράφωσι τὰ μηδενικὰ εἰς τὰ δεξιὰ τῶν μερικῶν γινομένων ἐπὶ τὰ ψηφία τῶν δεκάδων, ἑκατοντάδων, χιλιάδων, καὶ ἐφεξῆς, ἀλλὰ γράφουσιν ἕκαστον μερικὸν γινόμενον ὑπὸ τὸ προηγούμενον, προχωροῦντες μίαν τάξιν πρὸς τὰ ἀριστερὰ, σχετικῶς πρὸς τὸ γινόμενον τοῦτο, τουτέστι κάμνοντες νὰ τεθῇ τὸ τελευταῖον ψηφίον εἰς τὴν αὐτὴν ἐκείνην τάξιν, τὴν ὁποίαν κρατεῖ τὸ ψηφίον ἐπὶ τοῦ ὁποίου πολλαπλασιάζομεν.

Γενικὸς Κανών. Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀριθμὸν πολλῶν ψηφίων ἐπὶ ἄλλον ἀριθμὸν πολλῶν ψηφίων, πολλαπλασιάζομεν κατὰ πρῶτον τὸν πολλαπλασιαστέον ἐπὶ τὸ ψηφίον τῶν μονάδων τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, κατὰ τὸν κανόνα τοῦ ἀρ. 19· πολλαπλασιάζομεν παρομοίως ὅλον τὸν πολλαπλασιαστέον διαδοχικῶς ἐπὶ τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων, ἐπὶ ἐκεῖνο τῶν ἑκατοντάδων, καὶ ἐφεξῆς, θεωρουμένων ὡς ἁπλῶν μονάδων, καὶ γράφομεν τὰ μερικὰ γινόμενα, τὸ ἓν ὑπὸ τὸ ἄλλο, οὕτως ὥστε ἕκαστον νὰ προχωρῇ μίαν τάξιν πρὸς τὰ ἀριστερὰ σχετικῶς πρὸς τὸ πρὸ αὐτοῦ, μετὰ ταῦτα προσθέτοντες τὰ γινόμενα, ἔχομεν τὸ ὅλον ζητούμενον γινόμενον.

§. 22. Συχνὰ μερικὰ ψηφία τοῦ πολλαπλασιαστοῦ εἶναι μηδενικὰ, καὶ τότε πρέπει νὰ διορθώσωμεν τὴν διάταξιν τῶν μερικῶν γινομένων.

Ἔστω νὰ πολλαπλασιασθῇ . .	870497
ἐπὶ	500407
	6093479
	3481988
	4352485
	435602792279

Πολλαπλασιάζομεν κατὰ πρῶτον ὅλον τὸν πολλαπλασιαστέον ἐπὶ 7, καὶ μᾶς δίδει γινόμενον 6093479.

Ἤδη ἐπειδὴ δὲν εὑρίσκονται δεκάδες εἰς τὸν πολλαπλασιαστὴν περνοῦμεν εἰς τὸν 4, ψηφίον τῶν ἑκατοντάδων τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, καὶ ἔχομεν γινόμενον 3481988, καὶ ἐπειδὴ αὐτὸ ἐκφράζει ἑκατοντάδας, τὸ θέτομεν ὑπὸ τὸ πρῶτον γινόμενον, προχωροῦντες δύο τάξεις κατὰ τὰ ἀριστερά.

Παρομοίως ἐπειδὴ δὲν ὑπάρχουσι χιλιάδες, οὔτε δεκάδες χιλιάδος εἰς τὸν πολλαπλασιαστὴν, πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ 5, ψηφίον ἑκατοντάδων χιλιάδος, καὶ γράφομεν τὸ γινόμενον 4352485 ὑπὸ τὸ ἀνωτέρω προχωροῦντες τρεῖς τάξεις κατὰ τὰ ἀριστερὰ σχετικῶς πρὸς τὸ πρὸ αὐτοῦ γινόμενον.

Ἐν γένει ὅταν εὑρίσκωνται ἓν ἢ περισσότερα μηδενικὰ μεταξὺ δύο σημαντικῶν ψηφίων τοῦ πολλαπλασιαστοῦ προχωροῦμεν τὸ ἀνταποκρινόμενον γινόμενον κατὰ τὸ σημαντικὸν ψηφίον, τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται εἰς τὰ ἀριστερὰ τῶν μηδενικῶν, τόσας τάξεις πλέον μίαν κατὰ τὰ ἀριστερὰ σχετικῶς εἰς τὸ προηγούμενον γινόμενον, τὸ ὁποῖον ἔχει ἐν τῷ μέσῳ μηδενικά. Ἐπομένως διὰ νὰ ἀποφύγωμεν κάθε σφάλμα, τὸ ὁποῖον ἠμπορεῖ νὰ ἀκολουθήσῃ, πρέπει νὰ βεβαιονώμεθα εἰς κάθε πρᾶξιν, ἐὰν τὸ τελευταῖον ψηφίον τοῦ μερικοῦ γινομένου εὑρίσκεται εἰς τὴν στήλην τῶν μονάδων τῆς

ἰδίας τάξεως μὲ ἐκείνην τοῦ ψηφίου, ἐπὶ τὸ ὁποῖον πολλαπλασιάζομεν.

§. 23. Ἐὰν εἷς τῶν δύο παραγόντων τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, ἢ καὶ οἱ δύο τελειόνουσιν εἰς μηδενικὰ, συντέμνομεν τὴν πρᾶξιν, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν, ὡς νὰ μὴν ὑπῆρχον τὰ μηδενικὰ, θέτοντες ὅμως ἔπειτα αὐτὰ εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ γινομένου.

Παράδειγμα. Ἔστω νὰ πολλαπλασιασθῇ 47000
ἐπὶ 2900

423
94

136300000

Ἀφ' οὗ πολλαπλασιάσωμεν 47 ἐπὶ 29, κατὰ τὴν γνωστὴν μέθοδον, γράφομεν 5 μηδενικὰ εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ γινομένου, καὶ οὕτως λαμβάνομεν 136300000 τὸ ζητούμενον γινόμενον· Τῷ ὄντι ἐὰν εἴχαμεν μόνον 47000 νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ 29, εἶναι φανερὸν, ὅτι μετὰ τὸν πολλαπλασιασμὸν τοῦ 47 ἐπὶ 29, ἔπρεπε τὸ γινόμενον νὰ ἐφράζῃ χιλιάδας, τουτέστι μονάδας τοῦ ἰδίου εἴδους μὲ τὰς τοῦ πολλαπλασιαστέου, ὅθεν πρέπει νὰ προσθέσωμεν τρία μηδενικά· τώρα νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀριθμὸν ἐπὶ 2900, εἶναι τὸ αὐτὸ, ὡς (ἀρ. 21.) νὰ λάβωμεν 100 φοραῖς τὸ γινόμενον ἐπὶ 29, λοιπὸν πρέπει νὰ προσθέσωμεν ἄλλα δύο μηδενικά. Ὁ αὐτὸς συλλογισμὸς ἐφαρμόζεται εἰς κάθε ἄλλην ὁμοίαν περίστασιν.

§. 24. Σκεπτόμενοι ὀλίγον ἐπὶ τῆς μεθόδου τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, γνωρίζομεν ἀμέσως τὴν ἀνάγκην τοῦ νὰ ἀρχίζωμεν τοὺς μερικοὺς πολλαπλασιασμοὺς ἀπὸ τὰ δεξιά· καὶ τοῦτο, ἐπειδὴ ὅταν τὸ μερικὸν γινόμενον ὑπερβαίνῃ τὸ 9, τότε βαστοῦμεν τὰς σχηματιζομένας ἐξ αὐτοῦ μονάδας δεκάκις μείζονας, διὰ

νὰ τὰς ἑνώσωμεν μὲ τὸ γινόμενον τοῦ ἀμέσως ἀριστεροῦ ψηφίου· ὅμως θέλομεν συνάξει τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον ἀπὸ ὁποιονδήποτε ψηφίον τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, ἀρχίζοντες τὴν πρᾶξιν ὡς εἰς τὸ ἀκόλουθον παράδειγμα.

Ἀρχίσαμεν ἐδῶ τὸν πολλαπλασιασμὸν ἐκ τῶν ψηφίων τῶν ἑκατοντάδων τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, ἀλλὰ εἰς τὸν ἀκόλουθον πολλαπλασιασμὸν τῶν δεκάδων τοῦ πολλαπλασιαστοῦ ἐπὶ τὸν πολλαπλασιαστέον τὸ γινόμενον τάττεται μίαν τάξιν πρὸς τὰ δεξιὰ σχετικῶς πρὸς τὸ πρῶτον μερικὸν γινόμενον. Παρομοίως τὸ τρίτον γινόμενον τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐπὶ τὰς μονάδας τοῦ πολλαπλασιαστοῦ τάττεται μίαν τάξιν πρὸς τὰ δεξιὰ, ὅταν γραφθῇ ὑποκάτω εἰς τὸ δεύτερον μερικὸν γινόμενον, καὶ οὕτως ἐφεξῆς. Ἡ συνήθεια μόνη εἶν' αἰτία νὰ κάμνωμεν τὸν πολλαπλασιασμὸν, ἀρχίζοντες ἀπὸ τὰ δεξιὰ εἰς τὰ ἀριστερά· διότι τοῦτο εἶναι καὶ φυσικώτερον καὶ εὐκολώτερον.

```
   5704
    487
-------
  22816
  45632
  39928
-------
2777848
```

§. 25. Τελειόνομεν τὸν πολλαπλασιασμὸν μὲ τὴν ἔκθεσιν μερικῶν ἰδιοτήτων, τὰς ὁποίας συχνὰ θέλομεν μεταχειρισθῆ.

1ον. Ἂς πολλαπλασιασθῇ ὁ ἀριθμὸς 345 ἐπὶ τὸν 72, ὅστις εἶναι ἴσος μὲ 8 φοραῖς 9· λέγω ὅτι τὸ νὰ πολλαπλασιάσωμεν 345 ἐπὶ 72 καταντᾷ εἰς τὸ νὰ πολλαπλασιάσωμεν 345 ἐπὶ 9, καὶ τὸ ἐξαγόμενον ἐπὶ 8.

Διὰ νὰ δώσωμεν τὸν λόγον ταύτης τῆς προτάσεως χωρὶς νὰ ἐκτελέσωμεν τὸν ὑπολογισμὸν, ἀρκεῖ νὰ μεταχειρισθῶμεν συλλογισμόν τινα ἀνάλογον μὲ τὸν τοῦ ἀρ. 21. Τὸ νὰ πολλαπλασιάσωμεν 345 ἐπὶ 72,

συνίσταται εἰς τὸ νὰ κάμωμεν τὸ ἄθροισμα 72 ἀριθμῶν ἴσων μὲ 345· ἀλλ' οἱ 72 ἀριθμοὶ γραφθέντες ὁ εἷς ὑπὸ τὸν ἄλλον, σχηματίζουσιν ὀκτὼ τμήματα ἀπὸ 9 ἀριθμοὺς, καθεῖς τῶν ὁποίων εἶναι ἴσος μὲ 345· λοιπὸν ἀφ' οὗ πολλαπλασιάσωμεν 345 ἐπὶ 9, πρέπει νὰ λάβωμεν τὸ γινόμενον τοῦτο 8 φοραῖς· οὕτως τὸ νὰ πολλαπλασιάσωμεν 345 ἐπὶ τὸ γινόμενον 72 τῶν δύο παραγούτων 9 καὶ 8, καταντᾷ εἰς τὸ νὰ πολλαπλασιάσωμεν 345 ἐπὶ 9, καὶ τὸ ἐξαγόμενον ἐπὶ 8.

Ἐπειδὴ δὲ τὸ 9 εἶναι ἀφ' ἑαυτοῦ ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τοῦ 3 ἐπὶ τοῦ 3, δυνάμεθα ἀκόμη νὰ εἴπωμεν, ὅτι τὸ νὰ πολλαπλασιάσωμεν 345 ἐπὶ 72, καταντᾷ εἰς τὸ νὰ πολλαπλασιάσωμεν 345 κατὰ πρῶτον ἐπὶ 3, καὶ τὸ ληφθὲν ἐξαγόμενον ἐπὶ 3, καὶ τέλος πάντων τὸ νέον ἐξαγόμενον ἐπὶ 8.

Ὁ συλλογισμὸς οὗτος, ὅστις δύναται νὰ ἐφαρμοσθῇ καὶ εἰς ἄλλους ἀριθμοὺς, ἀποτελεῖ τὴν ἀκόλουθον γενικὴν ἰδιότητα. Τὸ νὰ πολλαπλασιάζωμεν ἀριθμὸν ἐπὶ γινόμενον ἀποτελεσθὲν ἤδη ἐκ δύο ἢ περισσοτέρων παραγόντων, ἄλλο δὲν εἶναι, εἰμὴ ἡ διαδοχικὴ τούτου πολλαπλασίασις ἐφ' ἕκαστον τῶν παραγόντων.

§. 26. 2ον. Εἰς πολλαπλασιασμόν τινὰ δύο παραγόντων εἶναι ἀδιάφορον νὰ λάβωμεν τὸν πρῶτον ὡς πολλαπλασιαστέον, καὶ τὸν δεύτερον ὡς πολλαπλασιαστὴν, ἢ τὸ ἀνάπαλιν· ἢ μὲ ἄλλας λέξεις τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν εἶναι τὸ αὐτὸ, καθ' ὁποίαν τάξιν ἐκτελέσωμεν τὸν πολλαπλασιασμόν.

Οὕτως τὸ γινόμενον τῶν 459 ἐπὶ 237 εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῶν 237 ἐπὶ 459.

Τῷ ὄντι ἂς ἐννοή- 1, 1, 1, 1, 1, ...
σωμεν τὴν μονάδα γεγραμ- 1, 1, 1, 1, 1, ...
μένην 459 φοραῖς εἰς τὴν 1, 1, 1, 1, 1, ...
αὐτὴν ὁριζόντιον γραμ- 1, 1, 1, 1, 1, ...
μὴν, καὶ ἂς σχηματίσω- . . . .
μεν 237 τοιαύτας γραμ- . . . .
μὰς, εἶναι φανερὸν, ὅτι τὸ κεφάλαιον τῶν περιεχομένων μονάδων εἰς τὸν παρόντα πίνακα εἶναι ἴσον μὲ τόσαις φοραῖς 459 μονάδας μιᾶς ὁριζοντίου ζώνης, ὅσαι μονάδες εὑρίσκονται εἰς μίαν τῶν καθέτων στηλῶν, ἢ εἰς 237, τουτέστι τὸ κεφάλαιον τοῦτο εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῶν 459 ἐπὶ 237· ἀλλὰ δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν παρομοίως, ὅτι αὐτὸ εἶναι ἴσον μὲ τόσαις φοραῖς τὰς 237 μονάδας μιᾶς καθέτου στήλης, ὅσας μονάδας ἔχει μία ὁριζόντιος ζώνη, ἢ τόσας, ὅσας ἔχει ὁ ἀριθμὸς 459, τουτέστι εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῶν 237 ἐπὶ 459, καὶ ἐφεξῆς.

Ἐὰν ἡ φύσις ἑνὸς ζητήματος μᾶς φέρῃ εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν τοῦ ἀριθμοῦ 75 ἐπὶ 5642, κατὰ τὴν ἤδη ἀποδειχθεῖσαν πρότασιν, ἄγομεν ταύτην τὴν πρᾶξιν εἰς τὸ γινόμενον τῶν 5642 ἐπὶ 75, ἐπειδὴ τότε δὲν ἔχομεν παρὰ δύο μόνον μερικὰ γινόμενα νὰ σχηματίσωμεν, ἐν ᾧ εἰς τὴν πρώτην περίστασιν ἔμελλε νὰ σχηματίσωμεν τέσσαρα.

Αὐτὴν τὴν πρότασιν θέλομεν ἀποδείξει δι' ὁποιονδήποτε ἀριθμὸν παραγόντων (Κεφ. εον, ἀρ. 127.)

Περὶ Διαιρέσεως.

§. 27. Τὸ νὰ διαιρῶμεν ἀριθμὸν δι' ἀριθμοῦ εἶναι (ἀρ. 9) τὸ νὰ εὑρίσκωμεν τρίτον τινὰ ἀριθμὸν, ὅστις πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν δεύτερον ν' ἀποτελῇ τὸν πρῶτον, ἢ καὶ κατ' ἄλλον τρόπον, δοθέντος ἑνὸς γι-

νομένου καὶ ἑνὸς τῶν παραγόντων του, νὰ προσδιορίσωμεν τὸν δεύτερον παράγοντα. Ἐπειδὴ εἰς τοὺς πολλαπλασιασμοὺς τῶν ἀριθμῶν τὸ γινόμενον σύγκειται ἀπὸ τόσαις φοραῖς τὸν πολλαπλασιαστέον, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ πολλαπλασιαστὴς, δυνάμεθα διὰ τοῦτο νὰ εἴπωμεν, ὅτι νὰ διαιρέσωμεν ἀριθμὸν ἀκέραιον δι' ἄλλου, εἶναι νὰ ζητήσωμεν πόσαις φοραῖς ὁ πρῶτος ἀριθμὸς, θεωρούμενος ὡς γινόμενον, περιέχει τὸν δεύτερον, θεωρούμενον ὡς πολλαπλασσαστέον· ὁ ἀριθμὸς τῶν φορῶν εἶναι τότε ὁ πολλαπλασιαστής. Τέλος πάντον, εἴδομεν εἰς τὸν (ἀρ. 9), ὅτι νὰ διαιρέσωμεν ἀριθμὸν ἀκέραιον δι' ἄλλου, εἶναι νὰ μερίσωμεν τὸν πρῶτον ἀριθμὸν εἰς τόσα μέρη ἴσα, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ δεύτερος.

Οἱ δύο τελευταῖοι ὁρισμοὶ ὑπὸ τοὺς ὁποίους θεωροῦμεν κάποτε τὴν διαίρεσιν ἀνήκουσι μόνον εἰς ἀκεραίους ἀριθμοὺς, ἐν ᾧ οἱ δύο πρῶτοι ἀνήκουσιν εἰς ὅλους τοὺς ἀριθμοὺς τόσον ἀκεραίους, ὅσον καὶ κλασματικοὺς, μ' ὅλον τοῦτο αἱ δοθεῖσαι ὀνομασίαι εἰς τοὺς ὅρους μιᾶς διαιρέσεως προήχθησαν ὑπὸ τῶν δύο τελευταίων ὁρισμῶν.

Οὕτως, ὁ πρῶτος ἀριθμὸς καλεῖται Διαιρετέος, ἢ διαιρούμενος, (ἀριθμὸς, ὅστις πρόκειται νὰ διαιρεθῇ ἢ νὰ μερισθῇ), ὁ δεύτερος καλεῖται διαιρέτης, καὶ ὁ τρίτος καλεῖται πηλίκον, ἐπειδὴ ἐκφράζει ποσάκις ὁ διαιρετέος περιέχει τὸν διαιρέτην.

Προκύπτει φανερὰ ἐκ τῶν δύο πρώτων ὁρισμῶν, ὅτι, ὅταν εὕρωμεν τὸ πηλίκον καὶ ζητήσωμεν τὴν βάσανον τῆς πράξεως, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν διαιρέτην ἐπὶ τὸ πηλίκον, καὶ ἐὰν ἡ ἐργασία ἦναι ὀρθὴ, πρέπει νὰ προέλθῃ ἐξ αὐτῆς ὁ διαιρετέος.

Καὶ ἀντιστρόφως, εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν, τὸ γινόμενον δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς διαιρετέος, ὁ

πολλαπλασιαστέος ὡς διαιρέτης, καὶ ὁ πολλαπλασιαστὴς ὡς πηλίκον· οὕτως ἡ βάσανος τοῦ πολλαπλασιασμοῦ γίνεται, ἀφ' οὗ διαιρεθῇ τὸ γινόμενον δι' ἑνὸς τῶν παραγόντων του, καὶ ἐὰν ἡ ἐργασία ἦναι ὀρθὴ, πρέπει νὰ λάβωμεν τὸν ἄλλον παράγοντα.

Μετὰ τὰς γνώσεις ταύτας, ἂς ἔλθωμεν τώρα εἰς τὴν ἐξήγησιν τοῦ τρόπου τοῦ ἐκτελεῖν τὴν διαίρεσιν.

§. 28. Καθὼς τὸν πολλαπλασιασμὸν δυνάμεθα νὰ ἐκτελέσωμεν διὰ μέσου τῆς προσθέσεως ἑνὸς ἀριθμοῦ πολλαῖς φοραῖς εἰς τὸν ἑαυτόν του, οὕτω δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸ πηλίκον μιᾶς διαιρέσεως δι' ἀλληλοδιαδόχου ἀφαιρέσεως.

Τῷ ὄντι ἐὰν ἐπρόκειτο π. χ. νὰ διαιρέσωμεν 60 διὰ 12, τοσάκις δυνάμεθα νὰ ἀφαιρέσωμεν 12 ἀπὸ 60, ὁσάκις τὸ 12 περιέχεται εἰς τὸ 60· οὕτως τὸ πηλίκον εἶναι ἴσον μὲ τὸν ἀριθμὸν τῶν ἀφαιρέσεων, τὰς ὁποίας δυνάμεθα νὰ ἐκτελέσωμεν πρὸ τοῦ ὁ διαιρετέος νὰ ἐξαλειφθῇ.

Εἰς τοῦτο τὸ παράδειγμα, εἰς τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ ἐκτελέσωμεν πέντε διαδοχικὰς ἀφαιρέσεις, ἕπεται ὅτι τὸ πηλίκον εἶναι 5· ἀλλ' ὁ τοιοῦτος τρόπος τοῦ ἐκτελεῖν τὴν διαίρεσιν εἶναι πολὺ μακρὸς εἰς τὰς πράξεις, καὶ μάλιστα, ὅταν ὁ διαιρετέος ἦναι πολλὰ μεγάλος ὡς πρὸς τὸν διαιρέτην· ἡ δὲ τέχνη τοῦ συντέμνειν τὴν ἐργασίαν εἶναι τὸ ὑποκείμενον τῆς κυρίως λεγομένης διαιρέσεως.

60		
12		
48	1ον	ὑπόλοιπον.
12		
36	2ον	. . . .
12		
24	3ον	. . . .
12		
12	4ον	. . . .
12		
00	5ον	. . . .

§. 29. Γνωρίζοντες ἐκ μνήμης τὰ γινόμενα δύο ἀριθμῶν ἑνὸς μόνου ψηφίου, δυνάμεθα εὐκόλως νὰ

προσδιορίσωμεν τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως ἀριθμοῦ τινος μὲ ἓν ἢ δύο ψηφία δι' ἄλλου ἀριθμοῦ μὲ ἓν μόνον ψηφίον.

Π. χ. 35 διαιρεθὲν διὰ 9, δίδει πηλίκον 5, ἢ μᾶλλον ποσάκις τὸ 35 περιέχει τὸ 7; τὸ περιέχει 5 φοραῖς, ἐπειδὴ ἐξεύρομεν, ὅτι 5 φοραῖς 7 δίδει 35. Παρομοίως εἰς τὸ 54 ποσάκις περιέχεται τὸ 9; 6 φοραῖς· Λέγομεν ἀκόμη εἰς τὸ πρῶτον παράδειγμα, τὸ 7^{ον} τῶν 35 εἶναι 5, ἐπειδὴ 7 φοραῖς 5 κάμνουν 35, καὶ εἰς τὸ δεύτερον, τὸ 9^{ον} τοῦ 54 εἶναι 6, ἐπειδὴ 9 φοραῖς 6 κάμνουν 54.

Ἂς διαιρεθῇ προσέτι 68 διὰ τοῦ 9. Ἐπειδὴ 7 φοραῖς 9 ἢ 63, καὶ 8 φοραῖς 9 ἢ 72 περιέχουσιν 68, ἕπεται ὅτι 68 διαιρεθὲν διὰ τοῦ 9 δίδει πηλίκον 7, καὶ ὑπόλοιπον 5, ἢ, τὸ ἔννατον μέρος τοῦ 68 εἶναι 7, καὶ δίδει ὑπόλοιπον 5.

Παρομοίως: 47 πόσαις φοραῖς περιέχει τὸ 8; τὸ περιέχει 5 μ'. ἓν ὑπόλοιπον 7· ἐπειδὴ 5 φοραῖς 8 κάμνουν 40 μόνον, ἢ τὸ ὄγδοον μέρος τοῦ 47 εἶναι 5, καὶ ὑπόλοιπον 7· διότι ἐὰν λάβωμεν 6 φοραῖς 8, ἔχομεν 48, ἀριθμὸν μεγαλήτερον τοῦ 47.

Θέλομεν ἰδεῖ εἰς τὸ ἑξῆς πῶς πρέπει νὰ μεταχειριζώμεθα τὸ ὑπόλοιπον, τὸ ὁποῖον συνάγεται ὅταν ὁ διαιρετέος δὲν περιέχῃ μὲ ἀκρίβειαν τὸν διαιρέτην.

§. 30. Ἂς περάσωμεν εἰς τὴν περίστασιν, καθ' ἣν ὁ διαιρετέος εἶναι σύνθετος ἐκ πολλῶν ψηφίων, καὶ ὁ διαιρέτης δὲν ἔχει παρὰ ἓν μόνον ψηφίον.

Ἐπειδὴ ὑπάρχει μία ἐνδοτάτη σχέσις μεταξὺ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ καὶ τῆς διαιρέσεως, εἶναι φυσικὸν νὰ ζητήσωμεν τὴν μέθοδον τῆς τελευταίας πράξεως κατ' ἐκείνην, τὴν ὁποίαν ἠκολουθήσαμεν εἰς τὸν πολλαπλασιασμόν.

Ἃς ἀναλάβωμεν τὸ πρῶτον παράδειγμα, τὸ ὁποῖον ἐξηγήσαμεν εἰς τὸν ἀρ. 19.

Ἕπεται ἐξ αὐτοῦ, ὅτι τὸ γινόμενον 59213 σύγκειται ἀπὸ 7 φοραῖς τὰς μονάδας, 7 τὰς δεκάδας, 7 τὰς ἑκατοντάδας, καὶ 7 φοραῖς τὰς χιλιάδας τοῦ ἀριθμοῦ 8459, καὶ διὰ τοῦτο τὸ γινόμενον σύγκειται ἐκ τεσσάρων μερικῶν γινομένων, τὰ ὁποῖα ἀνταποκρίνονται εἰς τὰ 4 ψηφία τοῦ πολλαπλασιαστέου· λοιπὸν τὰ ἀνάπαλιν, δεδομένου τοῦ γινομένου 59213, καὶ ἑνὸς τῶν παραγόντων του 7; διὰ νὰ ξαναεύρωμεν τὸν ἄλλον παράγοντα, πρέπει νὰ πασχίσωμεν νὰ ἀναλύσωμεν κἂν νοερῶς 59213 εἰς τὰς χιλιάδας, ἑκατοντάδας, δεκάδας καὶ μονάδας, τὰς ὁποίας περιέχει, καὶ μετὰ ταῦτα νὰ λάβωμεν διαδοχικῶς τὸ ἕβδομον ἑκάστου αὐτῶν, καὶ ἑνόνοντες τὰ μερικὰ ταῦτα πηλίκα, τὰ ὁποῖα οὕτως προσδιορίζομεν, θέλομεν λάβει τὸ ὅλον πηλίκον, ἢ τὸν δεύτερον παράγοντα.

8459
7
59213

Ἰδοὺ τίνι τρόπῳ διατάττομεν τὴν πρᾶξιν.

Γράφομεν τὸν διαιρέτην εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ διαιρετέου, καὶ χωρίζομεν αὐτοὺς διὰ καθέτου γραμμῆς, μετὰ ταῦτα σύρομεν ὁριζόντιον γραμμὴν ὑπὸ τὸν διαιρέτην.

59213	7
32	8459
41	
63	
0	

Τούτου τεθέντος, λαμβάνομεν ἀπὸ τὰ ἀριστερὰ τοῦ διαιρετέου τὰ δύο πρῶτα ψηφία, τὰ ὁποῖα σχηματίζουν 59 χιλιάδας, καὶ τὰ ὁποῖα θεωροῦμεν ὡς τὸ πρῶτον μερικὸν γινόμενον, ἔπειτα λέγομεν εἰς 59 ποσάκις εἰσέρχεται τὸ 7, ἢ ἀλλέως (διὰ νὰ συμφωνήσωμεν μὲ τὴν συνήθειαν, ὅταν ὁ διαιρέτης εἶναι μόνον μὲ ἓν ψηφίον), τὸ ἕβδομον τοῦ 59 εἶναι 8 διὰ τὸ 56, τὸ πηλίκον 8

οὕτω ληφθὲν ἐκφράζει τὰς χιλιάδας τοῦ ὅλου πηλίκου, καὶ γράφεται ὑπὸ τὸν διαιρέτην, ὡς ἀνωτέρω βλέπομεν· πολλαπλασιάζομεν 7 ἐπὶ 8, καὶ ἀφαιροῦμεν τὸ γινόμενον 56 ἀπὸ τοῦ 59, τὸ ὁποῖον δίδει ὑπόλοιπον 3 χιλιάδας, τὰς ὁποίας πρέπει νὰ θεωρήσωμεν ὡς συναγομένας ἀπὸ τὰ κρατηθέντα εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν τῶν ἑκατοντάδων τοῦ πηλίκου ἐπὶ 7.

Καταβιβάζομεν εἰς τὸ πλευρὸν τοῦ 3 τὸ ψηφίον 2 τῶν ἑκατοντάδων τοῦ διαιρετέου, τὸ ὁποῖον μᾶς δίδει 32 ἑκατοντάδας, τὰς ὁποίας θεωροῦμεν ὡς τὸ δεύτερον μερικὸν γινόμενον, καὶ λέγομεν τὸ ἕβδομον μέρος τῶν 32 εἶναι 4 διὰ 28, γράφομεν τὸ ψηφίον 4, τὸ ὁποῖον μέλλει νὰ ἐκφράσῃ τὰς ἑκατοντάδας τοῦ πηλίκου εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ ψηφίου 8· μετὰ ταῦτα πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ 4, καὶ ἀφαιροῦμεν τὸ γινόμενον 28 ἐκ τοῦ μερικοῦ διαιρετέου 32, καὶ οὕτως ἔχομεν ὑπόλοιπον 4 ἑκατοντάδας, αἵτινες παριστάνουν, ὅσα ἐπαρατηρήσαμεν ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν δεκάδων τοῦ πηλίκου ἐπὶ 7.

Καταβιβάζομεν εἰς τὸ πλευρὸν τοῦ νέου ὑπολοίπου 4 τὸ ψηφίον 1 τῶν δεκάδων τοῦ διαιρετέου, ὥστε συνάγομεν 41 δεκάδας, καὶ λέγομεν τὸ ἕβδομον μέρος τῶν 41 δεκάδων εἶναι 5 διὰ 35, γράφομεν τὸ ψηφίον 5 εἰς τὰ δεξιὰ τῶν δύο πρώτων, ἐπειδὴ ἐκφράζει δεκάδας τοῦ πηλίκου· ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν 7 μὲ 5, καὶ ἀφαιροῦμεν τὸ γινόμενον 35 ἀπὸ τὸν μερικὸν διαιρετέον 41, τὸ δὲ ὑπόλοιπον 6 ἐκφράζει τὰς προερχομένας δεκάδας ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν μονάδων τοῦ πηλίκου ἐπὶ τὸν διαιρέτην.

Τέλος πάντων καταβιβάζομεν εἰς τὸ πλευρὸν τοῦ ψηφίου 6, τὸ ψηφίον 3, καὶ λέγομεν τὸ ἕβδομον μέρος τοῦ 63 εἶναι μὲ ἀκρίβειαν 9, καὶ γράφομεν 9

εἰς τὰ δεξιὰ τῶν τριῶν εὑρεθέντων, διότι ἐκφράζει τὰς μονάδας τοῦ πηλίκου· καὶ πολλαπλασιάζοντες 7 μὲ 9, καὶ ἀφαιροῦντες τὸ γινόμενον 63 ἐκ τοῦ μερικοῦ διαιρετέου 63, συνάγομεν μηδὲν ὑπόλοιπον· λοιπὸν 8459 εἶναι τὸ ζητούμενον πηλίκον.

Τῷ ὄντι προκύπτει προφανῶς ἐκ τῶν ἄνω εἰρημένων πράξεων, ὅτι ἀφαιρέσαμεν διαδοχικῶς ἐκ τοῦ διαιρουμένου 59213, 7 φοραῖς τὰς 8 χιλιάδας, 7, τὰς 4 ἑκατοντάδας, 7 φοραῖς τὰς 5 δεκάδας, 7 τὰς ἐννέα μονάδας, καὶ ἐπειδὴ ὕστερον ἀπὸ ὅλας αὐτὰς τὰς πράξεις δὲν μένει τίποτε, ἕπεται ὅτι 59213 εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῶν 8459 ἐπὶ 7, ἢ τοῦ 7 ἐπὶ 8459· ὅθεν ὁ τελευταῖος ἀριθμὸς εἶναι τὸ ζητούμενον πηλίκον.

Ἔστω ὡς δεύτερον παράδειγμα νὰ διαιρέσωμεν 754264 διὰ 8.

Ἡ πρώτη δυσκολία, ἥτις παῤῥησιάζεται εἰς ἡμᾶς, εἶναι νὰ γνωρίσωμεν τὴν φύσιν τῶν ἀνωτέρων μονάδων τοῦ πηλίκου, καὶ νὰ προσδιορίσωμεν τὸν ἀριθμόν. Διὰ νὰ φθάσωμεν εἰς τοῦτο, παρατηροῦμεν, ὅτι ἐὰν τὸ πρῶτον ψηφίον εἰς τὰ ἀριστερὰ τοῦ διαιρετέου ἦναι μεγαλήτερον τοῦ διαιρέτου, ἢ ἦτον ἴσον, τὸ ὅλον πηλίκον ἤθελε περιέχει τότε μονάδας τοῦ ἰδίου εἴδους

754264	8
34	94283
22	
66	
24	
0	

μὲ ἐκείνας τοῦ ψηφίου, τὸ ὁποῖον θεωροῦμεν εἰς τὸν διαιρετέον, τοῦτο εἶναι φανερόν· ἀλλ' ἐπειδὴ εἰς τοῦτο τὸ παράδειγμα τὸ πρῶτον ψηφίον 7 εἶναι μικρότερον τοῦ 8, συμπεραίνομεν, ὅτι αἱ ἀνώτεραι μονάδες τοῦ πηλίκου εἶναι μονάδες ἐκ τῆς φύσεως τοῦ δευτέρου ψηφίου ἐν ἀριστερᾷ εἰς τὸν διαιρετέον· τότε λαμβάνοντες τὰ δύο πρῶτα ψηφία τὰ σχηματίζοντα 75 δε-

κάδας χιλιάδος, λέγομεν τὸ ὄγδοον τοῦ 75 εἶναι 9 διὰ τὰ 72, λοιπὸν τὸ ὅλον πηλίκον περιέχει 9 δεκάδας χιλιάδος, ἐπειδὴ δυνάμεθα νὰ ἀφαιρέσωμεν 8 φοραῖς τὸ 9, ἢ 72 δεκάδας χιλιάδων ἀπὸ τὸν διαιρετέον· γράφομεν τότε 9 ὑπὸ τὸν διαιρέτην, καὶ μετὰ ταῦτα πολλαπλασιάζομεν 8 ἐπὶ 9 καὶ ἀφαιροῦμεν τὸ γινόμενον 72 χιλιάδας ἀπὸ τὸν μερικὸν διαιρετέον 75, τὸ λαμβανόμενον ὑπόλοιπον 3 προέρχεται ἀπὸ τὰ κρατηθέντα ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν χιλιάδων τοῦ ὅλου πηλίκου ἐπὶ 8.

Καταβιβάζομεν εἰς τὸ πλευρὸν τοῦ ὑπολοίπου 3, τὸ ἀκόλουθον ψηφίον 4 τοῦ διαιρετέου, καὶ λέγομεν τὸ 8ον τῶν 34 χιλιάδων εἶναι 4 διὰ 32· λοιπὸν γράφομεν 4 ὑπὸ τὸν διαιρέτην εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ ψηφίου 9, καὶ ἀφαιροῦντες τὸ γινόμενον 4 φοραῖς 8 ἢ 32 ἀπὸ 34, ἔχομεν 2, εἰς τὸ πλευρὸν τοῦ ὁποίου καταβιβάζομεν τὸ ψηφίον 2 τῶν ἑκατοντάδων τοῦ διαιρετέου· μετὰ ταῦτα ἐργαζόμενοι ἐπὶ τοῦ νέου μερικοῦ διαιρετέου 22, ὡς εἰς τοὺς προηγουμένους, ἐξακολουθοῦμεν αὐτὰς τὰς πράξεις, ἕως οὗ νὰ καταβασθῇ τὸ τελευταῖον ψηφίον 4 τοῦ διαιρετέου, καὶ οὕτω λαμβάνομεν τὸ ζητούμενον πηλίκον 94283.

Βάσανος.

94283
8
754264

Εἰς τὰς πράξεις, ὁσάκις ὁ διαιρέτης ἔχει ἓν μόνον ψηφίον, συντέμνεται ἡ πρᾶξις, ὡς ἐδῶ ἀκολουθεῖ.

Ἔστω νὰ διαιρεθῇ 45237324 διὰ 6.

Ἀφ᾽ οὗ ὑπογραμμίσωμεν τὸν διαιρετέον λέγομεν, τὸ ἕκτον τοῦ 45 εἶναι 7, τὸ ὁποῖον γρά-		45237324 | 6
	Πηλίκον.	7539554
	Δοκιμή.	6
		45237324

φομεν ὑπὸ τοῦ 45, καὶ μένει 3, τὸ ὁποῖον νοερῶς ἑνόνομεν μὲ τὸ ἀκόλουθον ψηφίον 2, καὶ οὕτως ἔχομεν 32· τὸ ἕκτον μέρος τοῦ 32 εἶναι 5, τὸ ὁποῖον γράφομεν εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ 7, καὶ μένει 2, τὸ ὁποῖον ἡνωμένον μὲ τὸ ψηφίον 3 σχηματίζει 23· τὸ ἕκτον τοῦ 23 εἶναι 3, τὸ ὁποῖον γράφομεν εἰς τὰ δεξιὰ τῶν δύο προηγουμένων, καὶ μένει 5, τὸ ὁποῖον ἀκολουθούμενον ἐκ τοῦ ψηφίου 7, δίδει 57, τὸ ἕκτον μέρος τοῦ 57 εἶναι 9 διὰ 54, καὶ μένει 3, τὸ ὁποῖον ἀκολουθούμενον ἐκ τοῦ ψηφίου 3 δίδει 33, τὸ ἕκτον τοῦ 33 εἶναι 5 διὰ 30, καὶ μένει 3, τὸ ὁποῖον ἀκολουθούμενον ἐκ τοῦ ψηφίου 2 δίδει 32, τὸ ἕκτον τοῦ 32 εἶναι 5 διὰ 30, τέλος πάντων τὸ ἕκτον τοῦ 24 εἶναι 4· λοιπὸν τὸ ζητούμενον πηλίκον εἶναι 7539554. Τῷ ὄντι ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν αὐτὸ ἐπὶ 6, εὑρίσκομεν γινόμενον 45237324.

Παρομοίως τὸ ὄγδοον τοῦ ἀριθμοῦ	9725647 | 8	
εἶναι	1215705	 7
καὶ μένει ὑπόλοιπον 7.	8	. . . . βάσανος.
	9725640	
	7	
	9725647	

Σ. Κ. Εἰς τοῦτο τὸ παράδειγμα, φθάσαντες εἰς τὸ ψηφίον 7 τῶν ἑκατοντάδων τοῦ πηλίκου, ἐπειδὴ δὲν μένει ὑπόλοιπον, καὶ τὸ ἀκόλουθον ψηφίον 4 τοῦ διαιρετέου εἶναι μικρότερον τοῦ 8, βλέπομεν, ὅτι δὲν ὑπάρχουσι δεκάδες εἰς τὸ πηλίκον, τότε θέτο-

μεν 0, διὰ νὰ κρατῇ τὸν τόπον, καὶ κάμνοντες νὰ ἐξακολουθήσῃ τὸ ψηφίον 4 τοῦ ψηφίου 7 τῶν μονάδων, τὸ ὁποῖον δίδει 47, λέγομεν τὸ ὄγδοον τοῦ 47 εἶναι 5, τὸ ὁποῖον γράφομεν εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ μηδενὸς, καὶ μένει 7 . . . .

§. 31. Ἂς ἔλθωμεν εἰς τὴν περίστασιν, εἰς τὴν ὁποίαν ὁ διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης εἶναι σύνθετοι ἐκ πολλῶν ψηφίων.

Διὰ νὰ γνωρίσωμεν τὸν τρόπον τῆς ἐκτελέσεως, προκείσθω νὰ πολλαπλασιάσωμεν τοὺς ἀριθμοὺς 594 καὶ 437, καὶ μετὰ ταῦτα θέλομεν βεβαιώσει τὴν πρᾶξιν διὰ τῆς διαιρέσεως.

Προκύπτει ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τούτου, ὅτι τὸ γινόμενον 259578 σύγκειται ἐκ τριῶν μερικῶν γινομένων τοῦ πολλαπλασιαστέου 594 ἐπὶ τὰς μονάδας, δεκάδας, καὶ ἑκατοντάδας τοῦ πολλαπλασιαστοῦ 437; λοιπὸν ἀντιστρόφως, δοθέντος τοῦ γινομένου 259578, καὶ ἑνὸς τῶν παραγόντων του 594, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν δεύτερον παράγοντα, ἢ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τούτων τῶν δύο ἀριθμῶν, πρέπει νὰ πασχίσωμεν νὰ θέσωμεν φανερὰ εἰς τὸ γινόμενον 259578 τὰ τρία μερικὰ γινόμενα, ἐκ τῶν ὁποίων σύγκειται. Τὸ πρᾶγμα δὲν φαίνεται τόσον εὔκολον, ἐξαιτίας τῶν ἀναγωγῶν, αἱ ὁποῖαι ἐπράχθησαν μεταξὺ τῶν ψηφίων εἰς τὴν πρόσθεσιν τῶν μερικῶν γινομένων. Ἤδη διὰ νὰ φθάσωμεν εἰς τοῦτο, ἰδοὺ πῶς συλλογιζόμεθα.

```
   540
   437
  ----
  4158
 1782
2376
------
259578
```

259578	594
2376	437
21978	
1782	
458	
4158	
0000	

Τὸ μερικὸν γινόμενον τοῦ 594 ἐπὶ τὰς ἑκατοντάδας τοῦ πηλίκου μὴ δυνάμενον νὰ δώσῃ ὀλιγώτερον ἀπὸ ἑκατοντάδας, περιλαμβάνεται ἀναγκαίως εἰς τὰς 2595 ἑκατοντάδας τοῦ διαιρετέου, καὶ ἐὰν ζητήσωμεν τὸν μεγαλήτερον ἀριθμὸν τῶν φορῶν, κατὰ τὰς ὁποίας ὁ 594 περιέχεται εἰς τὰς 2595; τὸ τοιοῦτον ψηφίον ἐκφράζει τὰς ἑκατοντάδας τοῦ ὅλου πηλίκου. Πρῶτον, τὸ ψηφίον τοῦτο δὲν εἶναι μεῖζον τοῦ ψηφίου τῶν ἑκατοντάδων, ἐπειδὴ τὸ γινόμενον αὐτοῦ ἐπὶ 594, δίδει ἀριθμόν τινα μικρότερον παρὰ 2595 ἑκατοντάδας, καὶ τὸ ὁλικὸν πηλίκον εἶναι τοὐλάχιστον ἴσον μὲ τόσαις φοραῖς 100, ὅσαι μονάδες ἐνυπάρχουν εἰς τὸ ψηφίον τοῦτο.

Δεύτερον τὸ ψηφίον τοῦτο δὲν εἶναι ἔλασσον τοῦ ψηφίου τῶν ἑκατοντάδων, ἐπειδὴ ἐὰν ηὐξάνετο μόνον κατὰ μίαν μονάδα, τὸ γινόμενόν του ἐπὶ 594 ἤθελ' εἶναι μεῖζον τῶν 2595 ἑκατοντάδων, καὶ δὲν ἐδύνατο ἑπομένως νὰ ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τὸν διαιρετέον· οὕτως, τὸ ψηφίον τοῦτο εἶναι τὸ τῶν ἑκατοντάδων τοῦ πηλίκου.

Ἡ δυσκολία εἰς τὸ νὰ προσδιορίζωμεν τὸ ψηφίον τῶν ἑκατοντάδων τοῦ πηλίκου, συνίσταται λοιπὸν εἰς τὸ νὰ ζητήσωμεν πόσαις φοραῖς 2595 περιέχει 594, ἢ τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ αὐτὸ, νὰ ζητήσωμεν τὸ ψηφίον, τὸ ὁποῖον πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ 594, ἀποτελεῖ τὸν ἀριθμὸν τὸν πλέον ἐγγύτερον εἰς τὸ 2595. Ἐδυνάμεθα κατὰ πρῶτον νὰ προσδιορίσωμεν τοῦτο τὸ ψηφίον, ἀφαιροῦντες διαδοχικῶς, ὅσαις φοραῖς δυνηθῶμεν 594 ἀπὸ 2595, ἀλλ' εὐκολυνόμεθα εἰς τὴν ἀναζήτησιν, παρατηροῦντες κατὰ τὸν κανόνα (ἀρ. 19) τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἑνὸς ἀριθμοῦ μὲ

πολλὰ ψηφία ἐπὶ ἀριθμόν τινα μὲ ἓν μόνον, ὅτι τὸ 25 ἐξάγεται, μεῖόν τινῶν μονάδων προερχομένων ἐκ τῶν ἀναγωγῶν, ἀπὸ τὸν πολλαπλασιασμὸν τοῦ ψηφίου 5 τοῦ 594 ἐπὶ τὸ ζητούμενον ψηφίον· λοιπὸν ἐὰν διαιρέσωμεν 25 διὰ 5, λαμβάνομεν πηλίκον 5, τὸ ὁποῖον ψηφίον εἶναι ὀλίγον μεγαλήτερον τοῦ πρέποντος, ἐπειδὴ εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν τοῦ 594 ἐπὶ 5, τὸ γινόμενον τοῦ 9 ἐπὶ 5, εἶναι 45 δεκάδες, τουτέστι πρέπει νὰ ἐνώσωμεν μὲ τὸ γινόμενον τοῦ 5 ἐπὶ 5 ἢ 25 ἑκατοντάδας 4.

Ἂς δοκιμάσωμεν λοιπὸν τὸ 4. Τὸ γινόμενον τῶν 594 ἐπὶ 4 εἶναι 2376, ἀριθμὸς, ὅστις εἶναι μικρότερος παρὰ 2595, καὶ τὸν ὁποῖον γράφομεν ὑπὸ τοῦτον τὸν τελευταῖον· οὕτω λοιπὸν 4 εἶναι τὸ ἀληθὲς ψηφίον τῶν ἑκατοντάδων τοῦ πηλίκου, καὶ διὰ τοῦτο τὸν ἐγράψαμεν ὑπὸ τὸν διαιρέτην, ὡς ἀνωτέρω φαίνεται. (Βλέπομεν προσέτι, ὅτι 2376 εἶναι τὸ τρίτον μερικὸν γινόμενον, τὸ κρατηθὲν, ὅταν ἐπολλαπλασιάσαμεν 594 ἐπὶ 437).

Ἀφαιροῦντες 2376 ἀπὸ 2595, καὶ καταβιβάζοντες εἰς τὸ ὑπόλοιπον 219 τὰ ἀκόλουθα ψηφία τοῦ διαιρετέου, ἔχομεν 21978, ἀριθμὸν, ὅστις σύγκειται ἀκόμη ἐκ τοῦ ἀθροίσματος τῶν μερικῶν γινομένων τοῦ 594 ἐπὶ τὰς δεκάδας καὶ μονάδας τοῦ πηλίκου . . .

Διὰ νὰ λάβωμεν τὰς δεκάδας, συλλογιζόμεθα, ὡς ἀνωτέρω. Τὸ γινόμενον τῶν 594 ἐπὶ τὰς δεκάδας μὴ δυνάμενον νὰ δώσῃ ὀλιγώτερον ἀπὸ δεκάδας εὑρίσκεται ἐξ ἀνάγκης εἰς τὰς 2197 δεκάδας τοῦ νέου διαιρετέου, καὶ ἐὰν ζητήσωμεν τὸν μεγαλήτερον ἀριθμὸν τῶν φορῶν, καθ' ἃς ὁ 594 περιέχεται εἰς 2197, τὸ ψηφίον τοῦτο θέλει εἶναι ἐκεῖνο τῶν δεκάδων τοῦ πηλίκου. Βλέπομεν κατὰ πρῶτον, ὅτι δὲν εἶναι πολὺ μεγάλον, καὶ ἐπειδὴ τὸ γινόμενόν του ἐπὶ 594 ἀφαι-

ρεῖται ἀπὸ 2197 δεκάδας, τὸ πηλίκον θέλ' εἶναι κἂν ἴσον μὲ τόσας δεκάδας, ὅσας μονάδας ἔχει τὸ ψηφίον τοῦτο. Μετὰ ταῦτα δὲν εἶναι οὔτε πολλὰ μικρὸν, ἐπειδὴ ἐὰν αὐξήσωμεν αὐτὸ ἀπὸ μίαν μονάδα, τὸ γινόμενόν του ἐπὶ 594 θέλει εἶναι μεγαλήτερον τῶν 2197 δεκάδων, καὶ τότε δὲν ἐδύνατο νὰ ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τὸν διαιρετέον 12978.

Ἂς ἴδωμεν λοιπὸν πόσαις φοραῖς 2197 περιέχει 594, ἢ μᾶλλον, κατὰ τὴν ἀνωτέρω παρατήρησιν, πόσαις φοραῖς 21 περιέχει 5, καὶ εὑρίσκομεν 4, ἀλλ' εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν τοῦ 594 ἐπὶ 4, τὸ γινόμενον τοῦ 9 ἐπὶ 4 εἶναι 36, τὸ ὁποῖον δίδει 3 ἑκατοντάδας, διὰ νὰ τὰς φέρωμεν εἰς τὸ γινόμενον τοῦ 5 ἐπὶ 4 ἢ 20· ὅθεν 4 εἶναι πολὺ μεγάλον· ἂς δοκιμάσωμεν λοιπὸν 3. Τὸ γινόμενον τοῦ 594 ἐπὶ 3 εἶναι 1782, ἀριθμὸς μικρότερος τοῦ 2197, καὶ τὸν ὁποῖον γράφομεν ὑπὸ τὸν 2197· οὕτως 3 εἶναι τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων τοῦ πηλίκου, τὸ ὁποῖον γράφομεν εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ ψηφίου 4, τοῦ πρότερον εὑρεθέντος. (τὸ γινόμενον 1782 εἶναι προσέτι τὸ δεύτερον μερικὸν γινόμενον τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν 594 ἐπὶ 437).

Ἀφαιροῦντες 1782 ἀπὸ 2197, καὶ καταβιβάζοντες εἰς τὸ ὑπόλοιπον 415 τὸ ψηφίον 8 τοῦ διαιρετέου, λαμβάνομεν 4158, ἀριθμὸν, ὅστις παῤῥησιάζει τὸ γινόμενον τοῦ 594 ἐπὶ τὰς μονάδας τοῦ πηλίκου.

Ζητοῦντες τέλος πάντων πόσαις φοραῖς 4158 περιέχει 594, ἢ μᾶλλον πόσαις φοραῖς 41 περιέχει 5, εὑρίσκομεν 8, ἀλλὰ 8 εἶναι μεγαλήτερον τοῦ πρέποντος, ὡς δυνάμεθα εὐκόλως νὰ ἴδωμεν· δοκιμάζοντες δὲ 7, εὑρίσκομεν γινόμενον τοῦ 594 ἐπὶ 7 4158 ἀριθμὸν, ὅστις ἀφαιρούμενος ἀπὸ τὸ ὑπολειφθὲν μέρος τοῦ διαιρετέου δίδει ὑπόλοιπον μηδέν· οὕτως 7 εἶναι

τὸ ψηφίον τῶν μονάδων τοῦ πηλίκου· λοιπὸν 437 εἶναι τὸ ζητούμενον πηλίκον.

Τῷ ὄντι προκύπτει ἐκ τῶν ἄνω εἰρημένων πράξεων, ὅτι ἀφαιρέσαμεν διαδοχικῶς ἐκ τοῦ διαιρετέου 259578, τὰ μερικὰ γινόμενα τοῦ 594 ἐπὶ 4 ἑκατοντάδας, τρεῖς δεκάδας, 7 μονάδας, καὶ ἐπειδὴ ὕστερον ἀφ' ὅλας τὰς πράξεις δὲν μένει ὑπόλοιπον, ἕπεται, ὅτι 259578 εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τοῦ 594 ἐπὶ 437.

§. 32. Ἔστωσαν ἤδη δύο ἀριθμοὶ 3844637 καὶ 657 κατὰ τύχην ληφθέντες, καὶ προκείσθω νὰ διαιρέσωμεν τὸν ἕνα διὰ τοῦ ἄλλου.

3844637	657
3285	5851
559637	
5256	
34037	
3285	
1187	
657	
530	

Ἡ πρώτη δυσκολία, τὴν ὁποίαν ἀπαντῶμεν, εἶναι νὰ προσδιορίσωμεν τὴν φύσιν καὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν ἀνωτέρων μονάδων τοῦ πηλίκου. Εἶναι ὅμως κατὰ πρῶτον φανερὸν, ὅτι, ἐὰν λάβωμεν πρότερον εἰς τὰ ἀριστερὰ, τόσα ψηφία, ὅσα ἔχει ὁ διαιρέτης, τουτέστι τρία, καὶ τὰ τοιαῦτα τρία ψηφία περιέχωσι τὸν διαιρέτην, τότε τὸ ζητούμενον πηλίκον θέλει ἔχει δεκάδας χιλιάδος, ἀλλ' ἐπειδὴ δὲν ἀκολουθεῖ τοῦτο εἰς τὸ παρὸν παράδειγμα, τὸ πηλίκον περικλείει πλειότερον ἀπὸ μονάδας χιλιάδος, καὶ τοὐλάχιστον περιέχει μίαν, ἐπειδὴ τὸ γινόμενον τοῦ 657 ἐπὶ 1000 ἢ 657000 εἶναι προφανῶς μικρότερον τοῦ διαιρετέου· οὕτως ἔχομεν βεβαιότητα, ὅτι τὸ πηλίκον συντίθεται ἀπὸ χιλιάδας, ἑκατοντάδας, δεκάδας καὶ μονάδας.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὰς χιλιάδας, παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ γινόμενον τοῦ 657 ἐπὶ τὰς χιλιάδας μὴ δυνά-

μενον νὰ δώσῃ ὀλιγώτερον ἀπὸ χιλιάδας εὑρίσκεται ἀναγκαίως εἰς τὰς 3844 χιλιάδας τοῦ διαιρετέου. καὶ ἐὰν ζητήσωμεν τὸν μεγαλήτερον ἀριθμὸν τῶν φορῶν, κατὰ τὰς ὁποίας τὸ 657 περιέχεται εἰς 3844, τὸ τοιοῦτον ψηφίον θέλει εἶναι ἐκεῖνο τῶν χιλιάδων τοῦ πηλίκου· ἐπειδὴ πρῶτον τὸ τοιοῦτον ψηφίον δὲν εἶναι μεγαλήτερον, διότι τὸ γινόμενόν του ἐπὶ 657 δίδει ὀλιγώτερα παρὰ 3844 χιλιάδας, καὶ δύναται νὰ ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τὸν διαιρετέον, καὶ διὰ τοῦτο τὸ πηλίκον εἶναι τοὐλάχιστον ἴσον μὲ τόσαις φοραῖς 1000, ὅσας μονάδας ἔχει τὸ ψηφίον τοῦτο, ἀλλὰ οὔτε εἶναι μικρότερον, ἐπειδὴ ἐὰν αὐξηθῇ ἀπὸ μίαν μόνην μονάδα, τὸ γινόμενόν του ἐπὶ 657 δίδει περισσότερον ἀπὸ 3844 χιλιάδας καὶ δὲν δύναται νὰ ἀφαιρεθῇ πλέον ἀπὸ τὸν διαιρετέον.

Ἄς ζητήσωμεν λοιπὸν πόσαις φοραῖς 3844 περιέχει 657, ἢ ἁπλῶς πόσαις φοραῖς 38 περιέχει 6, εὑρίσκομεν 6, ἀλλὰ 6· εἶναι μεγαλήτερον, ἐπειδὴ εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν τοῦ 657 ἐπὶ 6, τὸ γινόμενον τοῦ 5 ἐπὶ 6 εἶναι 30, τὸ ὁποῖον δίδει τρεῖς ἑκατοντάδας διὰ νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸ γινόμενον τοῦ 6 ἐπὶ 6 ἢ 36· ἄς δοκιμάσωμεν λοιπὸν τὸ 5· τὸ γινόμενον τοῦ 657 ἐπὶ 5 εἶναι 3285 τὸ ὁποῖον γράφεται ὑπὸ τῶν 3844., καὶ βάλλομεν 5 εἰς τὸ πηλίκον, ἐπειδὴ ἐκφράζει τὰς χιλιάδας τοῦ ὅλου πηλίκου. Ἀφαιροῦντες 3285 ἀπὸ 3844, καὶ κατεβάζοντες εἰς τὸ πλευρὸν τοῦ ὑπολοίπου 55, τὰ ἄλλα ψηφία τοῦ διαιρετέου, συνάγομεν 559637 ἀριθμὸν, ὅστις σύγκειται ἀκόμη ἀπὸ τὰ μερικὰ γινόμενα τοῦ 657 ἐπὶ τὰς ἑκατοντάδας, δεκάδας καὶ μονάδας τοῦ πηλίκου, καὶ ἐπὶ τοῦ ὁποίου πρέπει ἑπομένως νὰ συλλογισθῶμεν καὶ νὰ πράξωμεν, ὡς εἰς τὸν πρῶτον διαιρετέον. Διὰ νὰ λάβωμεν τὰς ἑκατοντάδας, λαμβάνομεν τὰς 5596 ἑκα-

τοντάδας τοῦ νέου διαιρετέου, καὶ ζητοῦμεν πόσαις φοραῖς 5596 περιέχει 657, ἢ ἁπλῶς πόσαις φοραῖς 55 περιέχει 6, καὶ εὑρίσκομεν 9 ὡς πηλίκον, ἀλλὰ τὸ 9 εἶναι προφανῶς μεγαλήτερον, ὅθεν ἂς δοκιμάσωμεν τὸ 8· τὸ δὲ γινόμενον τοῦ 657 ἐπὶ 8 εἶναι 5256, ἀριθμὸς μικρότερος παρὰ 5596· οὕτως 8 εἶναι τὸ ψηφίον τῶν ἑκατοντάδων τοῦ πηλίκου, καὶ γράφομεν τοῦτο τὸ ψηφίον εἰς τὸ πλευρὸν τοῦ ἤδη εὑρεθέντος ψηφίου, καὶ θέτομεν προσέτι τὸ γινόμενον 5256 ὑπὸ τῶν 5596, διὰ νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν ἀφαίρεσιν.

Ἐκτελοῦντες τὴν νέαν ταύτην ἀφαίρεσιν, καὶ γράφοντες εἰς τὸ πλευρὸν τοῦ ὑπολοίπου 340 τὰ ἄλλα ψηφία 37 τοῦ διαιρετέου, συνάγομεν 34037 ἀριθμὸν, ὅστις περιέχει ἀκόμη τὰ μερικὰ γινόμενα τοῦ 657 ἐπὶ τὰς δεκάδας καὶ μονάδας τοῦ πηλίκου.

Διαιροῦντες 3403 διὰ 657, ἢ μᾶλλον 34 διὰ 6 εὑρίσκομεν 5· τὸ γινόμενον τοῦ 657 ἐπὶ 5 εἶναι 3285 ἀριθμὸς μικρότερος τῶν 3403 καὶ ἐκτελεῦμεν ταύτην τὴν νέαν ἀφαίρεσιν.

Καὶ γράφοντες εἰς τὸ πλευρὸν τοῦ ὑπολοίπου 118 τὸ τελευταῖον ψηφίον 7 τοῦ διαιρετέου, συνάγομεν 1187 ἀριθμὸν, ὅστις περιέχει προδήλως 657 μίαν φορὰν· οὕτως 1 εἶναι τὸ ψηφίον τῶν μονάδων τοῦ πηλίκου, τὸ ὁποῖον γράφομεν εἰς τὰ δεξιὰ τῶν τριῶν προηγουμένων, ὅθεν ἔχομεν 5851 ζητούμενον πηλίκον.

Ἀφαιροῦντες προσέτι 657 ἀπὸ 1187 εὑρίσκομεν τὸ ὑπόλοιπον 530, τὸ ὁποῖον φανερόνει, ὅτι ὁ δεδομένος διαιρετέος περιλαμβάνεται μεταξὺ τοῦ γινομένου 657 ἐπὶ 5852, καὶ ἐκείνου τοῦ 657 ἐπὶ 5852.

Δυνάμεθα δὲ νὰ βεβαιώσωμεν τὴν πρᾶξιν, πολλαπλασιάζοντες 657 ἐπὶ 5851· ἢ 5851 ἐπὶ 677· καὶ προσθέτοντες τὸ ὑπόλοιπον 530 εἰς τὸ γινόμενον.

```
   5851
    657
  -----
  40957
 29255
35106
    530
-------
3844637
```

Σ. Κ. Ἐμποροῦμεν νὰ παρατηρήσωμεν, ὅτι εἰς τὸν δρόμον τῶν πράξεων ἀρκεῖ νὰ κατεβάσωμεν εἰς τὸ πλευρὸν ἑκάστου ὑπολοίπου τὸ ἀκόλουθον ψηφίον τοῦ διαιρετέου, ἐξακολουθοῦντες οὕτως, ἕως νὰ κατεβάσωμεν ὅλα τὰ ψηφία τοῦ διαιρετέου.

§. 33. Κανὼν Γενικός. Διὰ νὰ διαιρέσωμεν δύο ἀκεραίους ἀριθμοὺς, τὸν ἕνα διὰ τοῦ ἄλλου, γράφομεν τὸν διαιρέτην εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ διαιρετέου, τοὺς χωρίζομεν διὰ καθέτου γραμμῆς, καὶ σύρομεν ἄλλην ὁριζόντιον γραμμὴν ὑπὸ τὸν διαιρέτην.

Μετὰ ταῦτα λαμβάνομεν κατὰ τὰ ἀριστερὰ τοῦ διαιρετέου τόσα ψηφία, ὅσα ἔχει ὁ διαιρέτης, ἢ ἕνα περισσότερον, ἐὰν ἡ ἕνωσις τούτων τῶν πρώτων ψηφίων εἶναι μικροτέρα παρὰ τὸν διαιρέτην· οὕτω σχηματίζομεν τὸν πρῶτον μερικὸν διαιρετέον, τοῦ ὁποίου ὁ χαρακτὴρ ἐκφράζει κατ' εὐθεῖαν τὰς μονάδας ἐκ τῆς φύσεως τῶν ὑψηλοτέρων μονάδων τοῦ πηλίκου· ζητοῦμεν πόσαις φοραῖς οὗτος ὁ μερικὸς διαιρετέος περιέχει τὸν διαιρέτην· (τὸ πηλίκον τοῦτο τὸ προσδιορίζομεν διὰ δοκιμασιῶν, μὴ θεωροῦντες παρὰ τὸ πρῶτον, ἢ τὰ δύο πρῶτα ψηφία εἰς τὰ ἀριστερὰ τοῦ μερικοῦ

διαιρετέου, καὶ τὸ πρῶτον ψηφίον εἰς τὰ ἀριστερὰ τοῦ διαιρέτου.)

Προσδιορισθὲν τὸ τοιοῦτον πηλίκον, τὸ γράφομεν ὑπὸ τὸν διαιρέτην, καὶ πολλαπλασιάζομεν τὸν διαιρέτην διὰ τούτου τοῦ ψηφίου, καὶ ἀφαιροῦμεν τὸ γινόμενον ἀπὸ τοῦ πρώτου μερικοῦ διαιρετέου.

Κατεβάζομεν εἰς τὸ πλευρὸν τοῦ ὑπολοίπου τὸ ἀκόλουθον ψηφίον τοῦ διαιρετέου· ἡ τοιαύτη ἕνωσις μᾶς δίδει τὸν δεύτερον μερικὸν διαιρετέον, καὶ ζητοῦντες, ὡς ἀνωτέρω, πόσαις φοραῖς ὁ τοιοῦτος δεύτερος μερικὸς διαιρετέος περιέχει τὸν διαιρέτην, γράφομεν τὸ τοιοῦτον πηλίκον εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ πρώτου, καὶ πολλαπλασιάζομεν τὸν διαιρέτην ἐπὶ τοῦτο τὸ δεύτερον πηλίκον, καὶ ἀφαιροῦμεν τὸ γινόμενον ἀπὸ τὸν δεύτερον μερικὸν διαιρετέον.

Κατεβάζομεν εἰς τὸ πλευρὸν τοῦ δευτέρου τούτου ὑπολοίπου τὸ ἀκόλουθον ψηφίον τοῦ διαιρετέου· ὅθεν λαμβάνομεν τὸν τρίτον μερικὸν διαιρετέον, ἐπὶ τοῦ ὁποίου ἐνεργοῦμεν, ὡς καὶ ἐπὶ τῶν ἀνωτέρω.

Ἐξακολουθοῦμεν ταύτην τὴν σειρὰν τῶν πράξεων, ἕως οὗ νὰ κατεβάσωμεν τὸ τελευταῖον ψηφίον, προσέχοντες εἰς κάθε πρᾶξιν νὰ γράφωμεν τὸ πηλίκον, τὸ ὁποῖον συνάγομεν, εἰς τὰ δεξιὰ τῶν προτέρων, (καὶ τοῦτο διὰ νὰ δώσωμεν εἰς ἐκείνους τὴν ἀληθινήν τους τιμήν). Ἐὰν ὕστερον ἀπὸ ὅλας ταύτας τὰς πράξεις δὲν μένῃ τίποτε, ἡ διαίρεσις καλεῖται ἀκριβής· ἐὰν εὕρωμεν ὑπόλοιπον, προσθέτομεν αὐτὸ, ὅταν ἐκτελοῦμεν τὴν βάσανον, εἰς τὸ γινόμενον τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸ εὑρεθὲν πηλίκον.

§. 34. Ἀφ' οὗ οἰκειώθημεν μὲ τὸν τρόπον τῶν διαφόρων τούτων πράξεων, δυνάμεθα προσέτι νὰ συντέμνωμεν πολὺ τὰς μερικὰς πράξεις, ἐκτελοῦντες τοὺς πολλαπλασιασμοὺς καὶ τὰς ἀφαιρέσεις εἰς τὸν αὐτὸν

καιρὸν, ὡς θέλομεν τὸ ἰδεῖ εἰς τὸ ἀκόλουθον παράδειγμα, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ πλέον δύσκολον, ἀπὸ ὅσα εἶναι δυνατὸν νὰ μᾶς προβάλλωσι.

Νὰ διαιρέσωμεν 9639475 διὰ 2789.

Λαμβάνομεν κατὰ πρῶτον τὰ πρῶτα τέσσαρα ψηφία εἰς τὰ ἀριστερὰ τοῦ διαιρετέου, ἐπειδὴ ἡ ἕνωσίς των περιέχει τὸν διαιρέτην, καὶ διαιροῦμεν 9639 διὰ 2789, ἢ ἁπλῶς 9 διὰ 2, καὶ εὑρίσκομεν 4 διὰ πηλίκον. Τὸ τοιοῦτον ψηφίον ἐκφράζει ποσότητα ὑπὲρ τὸ πρέπον· ἐπειδὴ θεωροῦντες μόνον τὰ δύο πρῶτα ψηφία εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ διαιρέτου, βλέπομεν, ὅτι 4 φοραῖς 27 δίδει 108, ἀριθμὸς μεγαλήτερος τοῦ 96· δοκιμάζομεν 3; καὶ ἐπειδὴ τρεῖς φοραῖς 27 δίδει 81, ἀριθμὸν πολὺ μικρότερον τοῦ 96, εἴμεθα σχεδὸν βέβαιοι ὅτι τὸ 3 εἶναι τὸ ἀληθινὸν ψηφίον τῶν χιλιάδων τοῦ πηλίκου, τὸ ὁποῖον γράφομεν ὑπὸ τὸν διαιρέτην.

9639475	2789
12724	3453
15617	
17425	

ὑπόλοιπον 691.

Τούτου τεθέντος, ἀντὶ νὰ πολλαπλασιάσωμεν 2789 ἐπὶ 3, καὶ νὰ γράψωμεν τὸ γινόμενον ὑπὸ τῶν 9639, διὰ νὰ πράξωμεν τὴν ἀφαίρεσιν, πράττομεν, ὡς ἐδῶ ἀκολουθεῖ· λέγομεν 3 φοραῖς 9 δίδει 27, 27 ἀπὸ 9 δὲν δύναται, ὑποθέτω 9· αὐξανόμενον ἀπὸ 2 δεκάδας, ὥστε κατασταίνεται 29, καὶ ἀφαιροῦντες 27 ἀπὸ τὸ 29, ἔχομεν 2., τὸ ὁποῖον γράφομεν ὑπὸ τὰς 4639, ἀφ' οὗ ὑπογραμμίσωμεν τὸν τελευταῖον ἀριθμόν· παρατηροῦμεν δὲ τώρα, ὅτι τὰς δύο δεκάδας, τὰς ὁποίας ἐπροσθέσαμεν, τὰς ἐδανείσθημεν ἐκ τοῦ ψηφίου 3, τὸ ὁποῖον πλέον ἀξίζει 1, ἀλλὰ (ἀριθμ. 14) φθάνομεν προδήλως εἰς τὸ

αὐτὸ, καὶ εἶναι πλέον σύντομος ἡ πρᾶξις, νὰ κρατήσωμεν τὰς δύο δεκάδας, διὰ νὰ τὰς προσθέσωμεν εἰς τὸ γινόμενον τῶν δεκάδων τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸ πηλίκον 3, καὶ νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸ ὅλον ἀπὸ τὰς δεκάδας τοῦ διαιρετέου 9639 ὁλικῶς λαμβανομένου.

Λέγομεν μετὰ ταῦτα 3 φοραῖς 8 κάμνουν 24, καὶ 2 δεκάδες αἱ κρατηθεῖσαι κάμουν 26, 26 ἀπὸ 3 εἶναι ἀδύνατον, ἀλλὰ δανειζόμενοι 3 ἑκατοντάδας ἀπὸ τὸ ψηφίον τῶν ἑκατοντάδων σχηματίζομεν 33 δεκάδας, καὶ ἀφαιροῦντες 28 ἀπὸ 33 ἔχομεν ὑπόλοιπον 7, τὸ ὁποῖον γράφομεν ὑπὸ τοῦ 3, τοῦ μερικοῦ διαιρετέου, καὶ κρατοῦμεν τὰς τρεῖς ἑκατοντάδας.

3 φοραῖς 7 κάμνει 21· καὶ 3 τὰ κρατηθέντα κάμνουν 24, 24 ἀπὸ 6 εἶναι ἀδύνατον, ἀλλὰ 24 ἀπὸ 26 μένουσι 2, τὸ ὁποῖον γράφομεν ὑπὸ τὸν 6· τοῦ μερικοῦ διαιρετέου, καὶ κρατοῦμεν 2 χιλιάδας.

Τέλος πάντων 3 φοραῖς 2 κάμνουν 6, καὶ 2 τὰ κρατηθέντα σχηματίζουν 8, 8 ἀπὸ 9 μένει 1, τὸ ὁποῖον γράφω ὑπὸ τὸν 9. μένει λοιπὸν 1272· εἰς τὸ πλευρὸν τοῦ τοιούτου ἀριθμοῦ κατεβάζομεν τὸ ψηφίον 4 τοῦ διαιρετέου, καὶ ἔχομεν τὸν δεύτερον μερικὸν διαιρετέον 12724, ἐπὶ τοῦ ὁποίου πράττομεν, ὡς ἀνωτέρω.

Εἰς 12724 ποσάκις εἰσέρχεται ὁ 2789, ἢ εἰς τὸ 12 ποσάκις εἰσέρχεται τὸ 2; εἰσέρχεται 6 φοραῖς, ἀλλὰ 6 καὶ 5 εἶναι μείζονα τοῦ πρέποντος, ὡς δυνάμεθα νὰ καταλάβωμεν, διὰ τοῦτο γράφομεν 4 εἰς τὰ δεξιὰ τούτου εἰς τὸ πηλίκον, καὶ λέγομεν 4 φοραῖς 9 κάμνει 36, 36 ἀπὸ τὸ 4 εἶναι ἀδύνατον, ἀλλὰ 36 ἀπὸ 44 μένει 8, τὸ ὁποῖον γράφομεν ὑπὸ τὸν 4, καὶ κρατοῦμεν 4· 4 φοραῖς 8 κάμνουν 32 καὶ 4 τὰ κρατηθέντα κάμνουν 36, 36 ἀπὸ 2 εἶναι

ἀδύνατον, ἀλλὰ 36 ἀπὸ 42 μένει 6, τὸ ὁποῖον γράφομεν ὑπὸ τοῦ 2, καὶ κρατοῦμεν 4.

4 φοραῖς 7 κάμνουν 28, καὶ 4 τὰ κρατηθέντα κάμνουν 32, 32 ἀπὸ 37 μένουν 5, τὰ ὁποῖα γράφω ὑπὸ τοῦ 7, καὶ κρατῶ τὸ 3.

Τέλος πάντων 4 φοραῖς 2 κάμνουν 8, καὶ 3 τὰ κρατηθέντα κάμνουν 11, 11 ἀπὸ 12 μένει 1, τὸ ὁποῖον γράφομεν ὑπὸ τὸν 2.

Τὸ ὑπόλοιπον ταύτης τῆς νέας πράξεως εἶναι 1568, εἰς τὸ πλευρὸν τοῦ ὁποίου κατεβάζω τὸ ἀκόλουθον ψηφίον τοῦ διαιρετέου, καὶ οὕτως ἔχω 15687, τρίτον μερικὸν διαιρετέον, ἐπὶ τοῦ ὁποίου πράττω κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, ὡς καὶ ἐπὶ τῶν μετ' αὐτὸν, καὶ εὑρίσκω τέλος πάντων πηλίκον 3456 μὲ τὸ ὑπόλοιπον 691. Ἰδοὺ ὁ πίναξ τῶν πράξεων δι' ἓν νέον παράδειγμα.

200658969	39837
147396	5037
278859	
0.	

§. 35. Πρώτη παρατήρησις ἐπὶ τῆς διαιρέσεως. Τὸ τελευταῖον τοῦτο παράδειγμα δίδει αἰτίαν ἀξιολόγου τινὸς παρατηρήσεως.

Ἀφ' οὗ εὑρήκαμεν διὰ πρῶτον πηλίκον 5, καὶ πρῶτον ὑπόλοιπον 1473, κατεβάζομεν εἰς τὸ πλευρὸν τοῦ τοιούτου ὑπολοίπου τὸ ἀκόλουθόν ψηφίον, καὶ οὕτως ἔχομεν δεύτερον μερικὸν διαιρετέον 14739· τώρα οὗτος ὁ μερικὸς διαιρετέος δὲν περιέχει τὸν διαιρέτην, λοιπὸν τὸ ὅλον πηλίκον δὲν ἔχει ἑκατοντάδας, ἐπειδὴ ἂν μόνον ἤθελεν ἔχει μίαν, τὸ γινόμενον ἐπὶ 39837 ἔπρεπε νὰ ἀφαιρῆται ἀπὸ τοῦ μερικοῦ διαιρετέου 14739, τὸ ὁποῖον εἶναι ἀδύνατον· ἀλλὰ διὰ

νὰ φυλάξωμεν εἰς τὸ ψηφίον 5 τοῦ πηλίκου τὴν τιμὴν, τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ ἔχῃ, πρέπει νὰ γράψωμεν εἰς τὸ πηλίκον μηδὲν, τὸ ὁποῖον κρατεῖ τὸν τόπον τῶν ἑκατοντάδων, καὶ κατεβάζοντες μετὰ ταῦτα εἰς τὸ πλευρὸν τῶν 14739 τὸ ἀκόλουθον ψηφίον 6 τοῦ διαιρετέου, ἀκολουθοῦμεν τὴν πρᾶξιν, καὶ οὕτως θέλομεν ἔχει διαδοχικῶς τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων καὶ μονάδων.

Ἐν γένει ὁσάκις κατεβάσωμεν εἰς τὸ πλευρὸν τοῦ ὑπολοίπου τὸ ἀκόλουθον ψηφίον, καὶ ὁ συναγόμενος μερικὸς διαιρετέος δὲν περιέχει τὸν διαιρέτην, τοῦτο φανερόνει, ὅτι τὸ πηλίκον δὲν ἔχει μονάδας τῆς τάξεως τοῦ κατεβαζομένου ψηφίου, καὶ τότε θέτομεν 0 εἰς τὸ πηλίκον, διὰ νὰ βαστάξῃ τὴν θέσιν τῶν μονάδων, αἱ ὁποῖαι λείπουσι, καὶ εἰς τὸν αὐτὸν καιρὸν νὰ φυλάττῃ τὴν σχετικὴν τιμὴν τῶν ἤδη εὑρεθέντων σημαντικῶν χαρακτήρων, καὶ μετὰ ταῦτα εἰς τὸ πλευρὸν τοῦ τοιούτου μερικοῦ διαιρουμένου κατεβάζομεν τὸ ἀκόλουθον ψηφίον, καὶ ἐξακολουθοῦμεν τὴν πρᾶξιν.

§. 36. Δευτέρα παρατήρησις. Ὅταν μερική τις πρᾶξις ἐπράχθη καλῶς, τουτέστιν ὅταν τὸ ψηφίον τοῦ πηλίκου σχετικῶς πρὸς ταύτην τὴν πρᾶξιν ἐπροσδιωρίσθη μὲ ἀκρίβειαν, δὲν δυνάμεθα πλέον εἰς τὴν ἀκόλουθον πρᾶξιν νὰ εὕρωμεν πλέον ἀπὸ 9 εἰς τὸ πηλίκον· ἐπειδὴ ἐὰν εὕρωμεν μόνον 10, φανερόνει, ὅτι τὸ προηγούμενον ψηφίον ἦτον μικρότερον μιᾶς μονάδος.

Ἔχομεν δὲ σημεῖόν τι βέβαιον, διὰ μέσου τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν, ὅτι ἓν ψηφίον τοῦ πηλίκου ἐπροσδιορίσθη μὲ ἀκρίβειαν, δηλαδὴ ὅταν ἀφαιρέσωμεν τὸ μερικὸν γινόμενον τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τοῦ τοιούτου ψηφίου, τὸ ὑπόλοιπον, τὸ ὁποῖον συνάγομεν νὰ εἶναι μικρότερον τοῦ διαιρέτου· ἐὰν τὸ τοιοῦτον ὑπόλοιπον

εἶναι μεγαλήτερον ἢ ἴσον τῷ διαιρέτῃ, πρέπει νὰ αὐξήσωμεν ἀπὸ μίαν μονάδα τὸ εὑρεθὲν ψηφίον.

§. 37. — Ἐπειδὴ εἰς τὰς πρώτας τρεῖς ἀριθμητικὰς ἐργασίας ἐκτελοῦμεν τοὺς ὑπολογισμοὺς ἀρξάμενοι ἀπὸ τὰ δεξιὰ, φυσικὰ δύναταί τις νὰ ζητήσῃ διὰ ποῖον δίκαιον εἰς τὴν διαίρεσιν ἀρχίζομεν ἐξ ἐναντίας ἀπὸ τὰ ἀριστερά; Διὰ νὰ ἀποκριθῶμεν εἰς τὸ τοιοῦτον ζήτημα, πρέπει νὰ παρατηρήσωμεν, ὅτι μὲ τὸ νὰ εἶναι ὁ διαιρετέος τὸ ἄθροισμα τῶν μερικῶν γινομένων τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὰς μονάδας, δεκάδας, ἑκατοντάδας καὶ ἐφεξῆς τοῦ πηλίκου, ὅλα ταῦτα τὰ μερικὰ γινόμενα ἑνόνονται ἀναμεταξύ των, καὶ εἶναι ἀδύνατον νὰ χωρίσωμεν τὸ γινόμενον τοῦ διαιρέτου ἀπὸ τὰς μονάδας, ἢ τὸ γινόμενον αὐτοῦ ἀπὸ τὰς δεκάδας, ἐν ᾧ, καθὼς ἀνωτέρω ἐδείξαμεν, φθάνομεν, ἂν ὄχι εἰς τὸ νὰ ἀνακαλύψωμεν μὲ ἀκρίβειαν τὸ γινόμενον ἐκ τῶν ἀνωτέρω μονάδων, κἂν εἰς τὸ νὰ προσδιορίζωμεν εἰς ποῖον μέρος τοῦ διαιρετέου εὑρίσκεται.

Ἐπομένως δυνάμεθα νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν πρᾶξιν ἀπὸ τὰ δεξιὰ ἐκτελοῦντες αὐτὴν διὰ μέσου ἀφαιρέσεων, ὡς ἐδιδάξαμεν εἰς τὸν ἀριθμ. 28.

§. 38. Ἃς δώσωμεν τώρα χρήσεις τινὰς τοῦ πολλαπλασιασμοῦ καὶ τῆς διαιρέσεως.

Πρῶτον ζήτημα. Ζητεῖται ἡ τιμὴ 2564 πηχῶν ἑνὸς εἴδους ὑφάσματος, ὑποτιθεμένου, ὅτι ἡ πῆχη ἀξίζει 47 φράγκα.

Ἐπειδὴ ἑκάστη πῆχη ἔχει 47 φράγκα, εἶναι φανερὸν, ὅτι λαμβάνοντες ταύτην τὴν τιμὴν 2564 φοραῖς, θέλομεν ἔχει τὴν τιμὴν τῶν 2564 πήχων· οὕτως ἀρκεῖ νὰ ἐκτελέσωμεν τὸ γινόμενον τοῦ 47 ἐπὶ 2564, ἢ (ἀριθμ. 26) τὸ γινόμενον τοῦ 2564 ἐπὶ 47, καὶ τὸ τοιοῦτον θέλει ἐκφράζει τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν τῶν φράγκων.

Ἰδοὺ ἡ πρᾶξις καὶ ἡ βάσανος αὐτῆς μὲ τὴν διαίρεσιν.

```
  2564        120508|47
    47         265  |2564
 -----         300
 17948          188
 10256          000
------
120508
```

Λοιπὸν 2564 ἔχουσι 120508 φράγκα.

Δεύτερον ζήτημα. Ἡ πήχη ἑνὸς τινὸς ἔργου οἰκοδόμων ἔχει 39 φράγκα. Ζητεῖται πόσας πήχας ἤθελαν κατασκευάσει διὰ 8395 φράγκα· εἶναι φανερὸν, ὅτι ὁσάκις 39 περιέχεται εἰς τὰς 8395, τόσας πήχας ἤθελον κατασκευάσει. Διὰ τοῦτο ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν 8395 διὰ 39, καὶ τὸ πηλίκον, τὸ ὁποῖον θέλομεν εὕρῃ, θέλει εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν ζητουμένων πηχῶν.

Βάσανος.

```
8395|39                       215
 59 |215  πηχ: 10              39
 205           39            1935
  10                         645
                               10
                             8395
```

καὶ ἐπειδὴ εὑρίσκομεν πηλίκον 215, καὶ ὑπόλοιπον 10, πρέπει νὰ ἐξεύρωμεν ποίαν χρῆσιν μέλλομεν νὰ κάμωμεν ἐπάνω εἰς τὸ τοιοῦτον ὑπόλοιπον.

Παρατηροῦμεν, ὅτι ἐὰν ὁ διαιρετέος περιεῖχε 10 ὀλιγώτερα φράγκα, οὗτος ἤθελεν εἶσθαι τὸ ἀκριβὲς γινόμενον τοῦ 39 ἐπὶ 215, οὕτως ὁ ἀριθμὸς τῶν ζητουμένων πηχῶν ἤθελεν εἶσθαι 215, ἀλλ' ἐπειδὴ περιέχει 10 φράγκα περισσότερον, πρόκειται νὰ προσδιορίσωμεν τὸ κλάσμα τῆς πήχης, τὸ ὁποῖον δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν μὲ τὰ τοιαῦτα 10 φράγκα.

Τώρα μὲ ἓν φράγκον ἠθέλαμεν ἔχει $\frac{1}{39}$ τῆς πήχης, ἐπειδὴ ἔχομεν 1 πῆχην διὰ 39 φράγκα. Λοιπὸν μὲ 10 φράγκα πρέπει νὰ ἔχωμεν 10 φοραῖς $\frac{1}{39}$ ἢ $\frac{10}{39}$ τῆς πήχης (ὅρα ἀριθμ. 8). Οὕτως 215 πήχαι πλέον $\frac{10}{39}$ τῆς πήχης εἶναι τὸ ζητούμενον ἀποτέλεσμα. Οὕτως ἐν γένει πρέπει νὰ μεταχειριζώμεθα τὸ ὑπόλοιπον μιᾶς διαιρέσεως, ὅταν ἐκτελῶμεν ταύτην τὴν πρᾶξιν, καὶ ἔχωμεν σκοπὸν νὰ λύσωμεν ἓν ζήτημα σχετικὸν πρὸς συγκεκριμένους ἀριθμούς.

Ἐννοοῦμεν τὴν μονάδα τοῦ πηλίκου (τῆς ὁποίας ἡ φύσις προσδιορίζεται ἐκ τῆς ἐκφράσεως τοῦ ζητήματος) διῃρημένην εἰς τόσα ἴσα μέρη, ὅσας μονάδας περιέχει ὁ διαιρέτης, καὶ λαμβάνομεν ἐκ τῶν τοιούτων μερῶν τοσάκις, ὅσας μονάδας ἔχει τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως, καὶ μετὰ ταῦτα προσθέτομεν τὸ συναγόμενον κλάσμα εἰς τὸ ἀκέραιον πηλίκον, τὸ ὁποῖον ἤδη ἐπροσδιορίσαμεν.

Τρίτον ζήτημα. Ἐπληρώσαμεν 21478 φράγκα διὰ 895 πήχας ἑνὸς ὑφάσματος, καὶ ζητοῦμεν τὴν τιμὴν μιᾶς πήχης.

Ἐὰν ἠξεύραμεν τὴν τιμὴν μιᾶς πήχης, ἐπαναλαμβάνοντές τας 895 φοραῖς, ἔπρεπε νὰ προκύψουν 21478 φράγκα. Διὰ τοῦτο ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν 21478 διὰ 895.

21478	895	Βάσανος.	895
3578	23 φράγκα	893	23
893		895	2685
			1790
			893
			21478

Ἰδοὺ ἡ πρᾶξις καὶ ἡ βάσανος αὐτῆς μὲ τὴν διαίρεσιν.

```
   2564          120508|47
     47           265  |2564
  -----           ---
  17948            300
 10256             ---
 ------             188
 120508             ---
                    000
```

Λοιπὸν 2564 ἔχουσι 120508 φράγκα.

Δεύτερον ζήτημα. Ἡ πήχη ἑνὸς τινὸς ἔργου οἰκοδόμων ἔχει 39 φράγκα. Ζητεῖται πόσας πήχας ἤθελαν κατασκευάσει διὰ 8395 φράγκα· εἶναι φανερὸν, ὅτι ὁσάκις 39 περιέχεται εἰς τὰς 8395, τόσας πήχας ἤθελον κατασκευάσει. Διὰ τοῦτο ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν 8395 διὰ 39, καὶ τὸ πηλίκον, τὸ ὁποῖον θέλομεν εὕρῃ; θέλει εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν ζητουμένων πηχῶν.

Βάσανος.

```
8395|39                          215
 59 |215  πῆχ: 10.                39
 205           39               ----
  10                            1935
                                645
                                  10
                                ----
                                8395
```

καὶ ἐπειδὴ εὑρίσκομεν πηλίκον 215, καὶ ὑπόλοιπον 10, πρέπει νὰ ἐξεύρωμεν ποίαν χρῆσιν μέλλομεν νὰ κάμωμεν ἐπάνω εἰς τὸ τοιοῦτον ὑπόλοιπον.

Παρατηροῦμεν, ὅτι ἐὰν ὁ διαιρετέος περιεῖχε 10 ὀλιγώτερα φράγκα, οὗτος ἤθελεν εἶσθαι τὸ ἀκριβὲς γινόμενον τοῦ 39 ἐπὶ 215, οὕτως ὁ ἀριθμὸς τῶν ζητουμένων πηχῶν ἤθελεν εἶσθαι 215, ἀλλ' ἐπειδὴ περιέχει 10 φράγκα περισσότερον, πρόκειται νὰ προσδιορίσωμεν τὸ κλάσμα τῆς πήχης, τὸ ὁποῖον δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν μὲ τὰ τοιαῦτα 10 φράγκα.

Τώρα μὲ ἓν φράγκον ἠθέλαμεν ἔχει $\frac{1}{39}$ τῆς πήχης, ἐπειδὴ ἔχομεν 1 πήχην διὰ 39 φράγκα. Λοιπὸν μὲ 10 φράγκα πρέπει νὰ ἔχωμεν 10 φοραῖς $\frac{1}{39}$ ἢ $\frac{10}{39}$ τῆς πήχης (ὅρα ἀριθμ. 8). Οὕτως 215 πήχαι πλέον $\frac{10}{39}$ τῆς πήχης εἶναι τὸ ζητούμενον ἀποτέλεσμα. Οὕτως ἐν γένει πρέπει νὰ μεταχειριζώμεθα τὸ ὑπόλοιπον μιᾶς διαιρέσεως, ὅταν ἐκτελῶμεν ταύτην τὴν πρᾶξιν, καὶ ἔχωμεν σκοπὸν νὰ λύσωμεν ἓν ζήτημα σχετικὸν πρὸς συγκεκριμένους ἀριθμούς.

Ἐννοοῦμεν τὴν μονάδα τοῦ πηλίκου (τῆς ὁποίας ἡ φύσις προσδιορίζεται ἐκ τῆς ἐκφράσεως τοῦ ζητήματος) διῃρημένην εἰς τόσα ἴσα μέρη, ὅσας μονάδας περιέχει ὁ διαιρέτης, καὶ λαμβάνομεν ἐκ τῶν τοιούτων μερῶν τοσάκις, ὅσας μονάδας ἔχει τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως, καὶ μετὰ ταῦτα προσθέτομεν τὸ συναγόμενον κλάσμα εἰς τὸ ἀκέραιον πηλίκον, τὸ ὁποῖον ἤδη ἐπροσδιορίσαμεν.

Τρίτον ζήτημα. Ἐπληρώσαμεν 21478 φράγκα διὰ 895 πήχας ἑνὸς ὑφάσματος, καὶ ζητοῦμεν τὴν τιμὴν μιᾶς πήχης.

Ἐὰν ηὑρίσκαμεν τὴν τιμὴν μιᾶς πήχης, ἐπαναλαμβάνοντές τας 895 φοραῖς, ἔπρεπε νὰ προκύψουν 21478 φράγκα. Διὰ τοῦτο ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν 21478 διὰ 895.

```
 21478 | 895           Βάσανος.            895
 -----  ---------                           23
  3578 | 23 φράγκα     893                ----
  ----                 ---                2685
   893                 895               1790
                                           893
                                         -----
                                         21478
```

Καὶ ἐπειδὴ ὁ διαιρούμενος ἐκτὸς τοῦ γινομένου τοῦ 895 ἐπὶ 23 περιέχει καὶ πλέον 893 φράγκα, ἕπεται ὅτι ἡ τιμὴ μιᾶς πήχης εἶναι 23 πλέον ἕνα κλάσμα, τὸ ὁποῖον πρόκειται νὰ προσδιορίσωμεν.

Πρὸς τοῦτο παρατηροῦμεν, ὅτι $\frac{1}{895}$ ἐπαναλαμβανόμενον 895 φοραῖς δίδει 1. Οὕτως $\frac{893}{895}$ ἐπαναλαμβανόμενον 895, δίδει 893, καὶ διὰ τοῦτο 23 πλέον $\frac{893}{895}$ εἶναι εἷς ἀριθμὸς, ὅς τις πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ 895 ἀποτελεῖ 21478. Λοιπὸν τέλος πάντων ἡ ζητουμένη τιμὴ εἶναι 23 φράγκα πλέον $\frac{893}{895}$ τοῦ φράγκου.

Τὸ τοιοῦτον ἐξαγόμενον συμφωνεῖ μὲ τὸν εἰς τὸ προηγούμενον παράδειγμα συστηθέντα κανόνα.

Τέταρτον ζήτημα. Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι 498 ἄνθρωποι ἔχουν νὰ μερισθῶσιν ἰσάκις κεφάλαιόν τι ἀπὸ 1348708 φράγκα, καὶ ζητεῖται τὸ ἀναλογοῦν εἰς καθένα μέρος.

1348708	498		2708
3527	2708 φράγκα	124	498
4108		498	21664
124			24372
			10832
			124
			1348708

Ἐπειδὴ τὸ πηλίκον ταύτης τῆς διαιρέσεως εἶναι 2708, καὶ τὸ ὑπόλοιπον 124, δυνάμεθα νὰ συμπεράνωμεν, ὅτι ἐὰν τὸ μεριστέον κεφάλαιον ἠλαττοῦτο

ἀπὸ 124 φράγκα, ἕκαστος ἤθελεν ἔχει διὰ τὸ μερίδιόν του 2708 φράγκα· ἀλλ' ἐπειδὴ τὸ κεφάλαιον περιέχει 124 φράγκα περισσότερον παρὰ τὸ γινόμενον 2708 ἐπὶ 498, ἕπεται, ὅτι ἕκαστος πρέπει νὰ λάβῃ 2708 πλέον ἓν μέρος τῶν 124 φράγκων. Διὰ νὰ λάβωμεν μίαν ἰδέαν τοῦ τοιούτου μέρους, ἂς θεωρήσωμεν κατὰ πρῶτον τὸν ἀριθμὸν 124 ὡς ἓν ὅλον, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ διαιρέσωμεν εἰς 498 μέρη ἴσα, καὶ ἓν τῶν τοιούτων μερῶν εἶναι τὸ κλάσμα, τὸ ὁποῖον θέλει καταστήσει πλῆρες τὸ ἄνω εὑρεθὲν πηλίκον. Ἀλλὰ εἶναι πλέον εὔληπτον νὰ ἐννοήσωμεν (ὡς ἀριθμ. 8) τὴν μονάδα, ἥτις εἶναι ἐδῶ τὸ φράγκον, ὅτι διαιρεῖται εἰς 498 μέρη ἴσα, καὶ νὰ λάβωμεν 124 ἀπὸ τὰ τοιαῦτα μέρη, τὸ ὁποῖον μᾶς δίδει $\frac{124}{498}$ διὰ τὸ κλάσμα, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸ ἀκέραιον πηλίκον.

§. 39. Σ. Κ. Τὸ τελευταῖον τοῦτο παράδειγμα μᾶς ἄγει εἰς μίαν παρατήρησιν, τὴν ὁποίαν συχνὰ θέλομεν μεταχειρισθῆ, τουτέστι νὰ διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμὸν 124 εἰς 498 μέρη ἴσα, ἄλλο δὲν εἶναι, παρὰ τὸ νὰ λάβωμεν 124 φοραῖς τὸ 498 μέρος τῆς μονάδος. Τῷ ὄντι, ἐὰν ἀντὶ τοῦ 124 εἴχαμεν μόνον 1 νὰ διαιρεθῇ εἰς 498 μέρη ἴσα, κάθε μέρος ἤθελεν εἶναι $\frac{1}{498}$· ἀλλ' ἐπειδὴ ὁ ἀριθμός, ὅστις μέλλει νὰ ἀφαιρεθῇ εἶναι 124 φοραῖς μεγαλήτερος τῆς μονάδος, ἐννοεῖται, ὅτι τὸ ἀποτέλεσμα τοῦ μερισμοῦ πρέπει νὰ εἶναι 124 φοραῖς μεγαλήτερον, ἢ ἴσον μὲ 124 φοραῖς $\frac{1}{498}$, ἢ τέλος πάντων μὲ $\frac{124}{498}$.

Παρομοίως νὰ διαιρέσωμεν 15 εἰς 28 μέρη ἴσα, ἄλλο δὲν εἶναι, παρὰ τὸ νὰ λάβωμεν 15 φο-

ραῖς τὸ εἰκοστὸν ὄγδοον μέρος τῆς μονάδος· ἐπειδὴ ἐὰν μόνον εἴχαμεν 1 νὰ διαιρέσωμεν εἰς 28 μέρη ἴσα, κάθε μέρος ἤθελεν εἶσθαι $\frac{1}{28}$· ἀλλ' ἐπειδὴ ἔχομεν νὰ μερίσωμεν 15, ἢ ἕνα ἀριθμὸν 15 φοραῖς πλέον μεγαλήτερον, τὸ ἐξαγόμενον πρέπει νὰ εἶναι ἴσον μὲ 15 φοραῖς $\frac{1}{28}$, ἢ μὲ $\frac{15}{28}$.

Ἐν γένει διὰ νὰ διαιρέσωμεν ἀριθμὸν εἰς τόσα μέρη ἴσα, ὅσαι μονάδες εἶναι εἰς ἄλλον τινὰ, ἀπαιτεῖται νὰ διαιρέσωμεν τὴν μονάδα εἰς τόσα μέρη ἴσα, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ δεύτερος, καὶ νὰ ἐπάρωμεν ἓν τούτων τῶν μερῶν τόσαις φοραῖς, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ πρῶτος.

§. 40. Ἀπὸ τὰς δύο ἀποδεδειγμένας προτάσεις εἰς τοὺς ἀριθμοὺς 25 καὶ 26 ἐξάγομεν μερικὰς συνεπείας, τὰς ὁποίας εἶναι καλὸν νὰ γνωρίσωμεν, ἐπειδὴ αὗται συχνότατα μεταχειρίζονται εἰς τὴν ἀριθμητικήν.

Παρατηροῦντες πρῶτον ἀπὸ ὅλα, ὅτι ὕστερον ἀπὸ τοὺς ὁρισμοὺς τοῦ πολλαπλασιασμοῦ καὶ τῆς διαιρέσεως τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν, κατασταίνομεν ἕνα ἀκέραιον ἀριθμὸν τόσαις φοραῖς μεγαλήτερον, ἢ μικρότερον, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ ἄλλος, πολλαπλασιασιαζομένου ἢ διαιρουμένου τοῦ πρώτου διὰ τοῦ δευτέρου.

Οὕτως, ὅταν πολλαπλασιάζωμεν 24 ἐπὶ 6, τὸ γινόμενον εἶναι 6 φοραῖς μεγαλήτερον τοῦ 24, ἐπειδὴ συνάγεται ἐκ τῆς προσθέσεως 6 ἀριθμῶν, τῶν ὁποίων ἕκαστος εἶναι ἴσος μὲ τὸ 24. Παρομοίως ἐὰν διαιρέσωμεν 24 διὰ τοῦ 6, τὸ πηλίκον εἶναι 6 φοραῖς μικρότερον τοῦ 24, ἐπειδὴ τὸ πηλίκον τοῦτο λαμβανόμενον 6 φοραῖς ἀποτελεῖ τὸ 24.

Τούτου τεθέντος, λέγω κατὰ πρῶτον, ὅτι ἐὰν εἰς ἕνα πολλαπλασιασμὸν καταστήσω τὸν πολλαπλασιαστὴν, ἢ τὸν πολλαπλασιαστέον μὲ ἕνα τινὰ ἀριθμὸν φορῶν μεγαλήτερον, ἢ μικρότερον, τὸ γινόμενον καθισταίνεται διὰ ταύτην τὴν μεταβολὴν, τόσαις φοραῖς μεγαλήτερον ἢ μικρότερον.

Ἔστω π. χ. νὰ πολλαπλασιάσωμεν 47 ἐπὶ 6, καὶ ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἀντὶ νὰ ἐκτελέσωμεν ταύτην τὴν πρᾶξιν, πολλαπλασιάζομεν 47 ἐπὶ 24, τὸ ὁποῖον εἶναι τετράκις μεγαλήτερον τοῦ 6, καὶ ἐπειδὴ, ἐκ τῶν ὅσα εἴπομεν εἰς τὸν ἀριθμὸν 25, διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν 47 ἐπὶ 24 ἀπαιτεῖται νὰ πολλαπλασιάσωμεν 47 ἐπὶ 6, καὶ τὸ προκύπτον γινόμενον ἐπὶ 4, ἕπεται ὅτι τὸ γινόμενον τοῦ 47 ἐπὶ 24 εἶναι ἴσον μὲ τέσσαρες φοραῖς τὸ γινόμενον τοῦ 47 ἐπὶ 6, ἢ τέσσαρες φοραῖς μεγαλήτερον τοῦ γινομένου τοῦ 47 ἐπὶ 6.

Καὶ ἀνάπαλιν, ἐπειδὴ τὸ γινόμενον τοῦ 47 ἐπὶ 6 (τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ τέταρτον τοῦ 24) εἶναι τετράκις μικρότερον τοῦ γινομένου τῶν 47 ἐπὶ 24, ἕπεται ὅτι ἐὰν καταστήσωμεν τὸν πολλαπλασιαστέον τετράκις μικρότερον, τουτέστιν ἂν διαιρέσωμεν αὐτὸν διὰ τοῦ 4, τότε τὸ γινόμενον διὰ ταύτην τὴν μεταβολὴν θέλει γένῃ τετράκις μικρότερον.

Εἴδομεν ἀλλαχοῦ (ἀριθμ. 26) ὅτι εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν δύο παραγόντων δυνάμεθα νὰ ἀντιστρέφωμεν τὴν τάξιν τῶν παραγόντων. Λοιπὸν τὸ ὅ, τι εἴπομεν σχετικῶς πρὸς τὸν πολλαπλασιαστὴν, ἐφαρμόζεται παρομοίως καὶ εἰς τὸν πολλαπλασιαστέον.

Ἐκ τούτου ἕπεται, ὅτι δὲν ἀλλάττει ἡ τιμὴ τοῦ γινομένου, ὅταν γενῇ ὁ πολλαπλασιαστέος ἕνα ἀριθμὸν φοραῖς μεγαλήτερος, ἀρκεῖ εἰς τὸν αὐτὸν καιρὸν νὰ καταστήσωμεν τὸν πολλαπλασιαστὴν ἕνα ἀριθμὸν

φοραῖς μικρότερον, τουτέστι πολλαπλασιάζοντες τὸν πρῶτον παράγοντα ἐπὶ ἀριθμόν τινὰ, καὶ διαιροῦντες τὸν δεύτερον διὰ τοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ· ἐπειδὴ μὲ τὴν πρώτην πρᾶξιν καθασταίνομεν τὸ γινόμενον ἕνα ἀριθμὸν φορῶν μεγαλήτερον, καὶ μὲ τὴν δευτέραν ἕνα ἴσον ἀριθμὸν φορῶν μικρότερον, καὶ οὕτως γίνεται ἡ ἀνταμοιβή.

Εἰς ταύτην τὴν τελευταίαν συνέπειαν ἐπιστηρίζεται ἓν μέσον, τὸ ὁποῖον πολλάκις μεταχειριζόμεθα, διὰ νὰ βεβαιόνωμεν τὸν πολλαπλασιασμόν.

Ἔστω 347, νὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 72. Ἀλλὰ τὸ νὰ πολλαπλασιάσωμεν 347 ἐπὶ 72 ἄλλο δὲν εἶναι, παρὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν δύο φοραῖς τὸ 347 ἢ 694 ἐπὶ τὸ ἥμισυ τοῦ 72, ἢ ἐπὶ 36· οὕτως ἀφ' οὗ πολλαπλασιάσωμεν 347 ἐπὶ 72, δυνάμεθα μετὰ ταῦτα νὰ πολλαπλασιάσωμεν 694 ἐπὶ 36, καὶ ἐὰν ἡ πρώτη ἐργασία εἶναι ἀκριβὴς, πρέπει νὰ ἐξαναεύρωμεν τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.

Ἤδη ἐπειδὴ εἰς τὴν διαίρεσιν ὁ διαιρετέος εἶναι τὸ γινόμενον, τοῦ ὁποίου ὁ διαιρέτης καὶ τὸ πηλίκον εἶναι οἱ δύο παράγοντες, ἕπεται ὅτι ἐὰν καταστήσωμεν τὸν διαιρετέον ἕνα τινὰ ἀριθμὸν φορῶν μεγαλήτερον ἢ μικρότερον, τουτέστιν ἐὰν τὸν πολλαπλασιάσωμεν ἢ διαιρέσωμεν δι' ἑνὸς ἀριθμοῦ ἀκεραίου, τὸ πηλίκον διὰ ταύτης τῆς τροπῆς πολλαπλασιάζεται ἢ διαιρεῖται διὰ τοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ.

Τῷ ὄντι ἐπειδὴ μετὰ τὴν τροπὴν τὸ πηλίκον πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ τὸν διαιρέτην χρεωστεῖ νὰ ἀποτελέσῃ ἕνα διαιρετέον καθ' ἕνα τινὰ ἀριθμὸν φορῶν μεγαλήτερον ἢ μικρότερον παρὰ τὸν πρῶτον, πρέπει ἐξ ἀνάγκης, τοῦ διαιρετέου μένοντος τοῦ αὐτοῦ, νὰ εἶναι τὸ πηλίκον μεγαλήτερον ἢ μικρότερον κατὰ τὸν αὐτὸν τοῦτον ἀριθμὸν τῶν φορῶν.

Καὶ ἀντιστρόφως, ἐὰν ἀμελοῦντες τὸν διαιρετέον καταστήσωμεν τὸν διαιρέτην ἕνα τινὰ ἀριθμὸν φορῶν μεγαλήτερον ἢ μικρότερον, τὸ πηλίκον διὰ ταύτης τῆς πράξεως κατασταίνεται ἕνα ἴσον ἀριθμὸν μικρότερον ἢ μεγαλήτερον. Τῷ ὄντι εἶναι ἡ μόνη ὑπόθεσις, τὴν ὁποίαν ἠμποροῦμεν νὰ δεχθῶμεν, ὥστε ὁ πολλαπλασιασμὸς νὰ δώσῃ τὸ αὐτὸ γινόμενον, ἢ τὸν αὐτὸν διαιρούμενον.

Λοιπὸν πολλαπλασιαζομένου ἢ διαιρουμένου τοῦ διαιρετέου καὶ τοῦ διαιρέτου διὰ τοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ, τὸ πηλίκον δὲν ἀλλάττει· ἐπειδὴ ἐὰν ἐκ τῆς εἰς τὸν διαιρετέον γινομένης μεταβολῆς, πολλαπλασιάζομεν ἢ διαιροῦμεν τὸ πηλίκον ἐπὶ ἕνα ἀριθμὸν, ἡ δευτέρα μεταβολὴ κατασταίνει αὐτὸ ἕνα ἀριθμὸν φορῶν μικρότερον ἢ μεγαλήτερον, καὶ οὕτω γίνεται ἡ ἀνταμοιβή.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β′.

Περὶ Κλασμάτων.

§. 41. Εἴδομεν ἤδη (εἰς τὸν ἀριθμ. 1 καὶ 8) τί ἐστὶ κλάσμα, καὶ ποίαν ἰδέαν πρέπει νὰ λάβωμεν αὐτοῦ. Πάντοτε διακρίνονται δύο ὅροι εἰς ἕνα κλάσμα, ὁ παρονομαστὴς καὶ ὁ ἀριθμητής· ὁ παρονομαστὴς δεικνύει εἰς πόσα ἴσα μέρη ἐδιαιρέθη ἡ μονὰς, καὶ ὁ ἀριθμητὴς πόσα λαμβάνομεν ἀπὸ ταῦτα τὰ μέρη· ἡ ἕνωσις τῶν λαμβανομένων μερῶν συσταίνει τὸ ὅλον.

Οὕτως εἰς τὸ κλάσμα $\frac{3}{4}$, τὸ ὁποῖον ἐκφράζομεν τρία

τέταρτα, 4 εἶναι ὁ παρονομαστὴς καὶ φανερόνει, ὅτι ἡ μονὰς ἐδιαιρέθη εἰς 4 μέρη ἴσα, 3 εἶναι ὁ ἀριθμητὴς καὶ φανερόνει, ὅτι λαμβάνομεν τρία ἀπὸ τὰ τοιαῦτα μέρη. Παρομοίως τὸ κλάσμα $\frac{11}{12}$, τὸ ὁποῖον ἐκφράζομεν ἕνδεκα δωδέκατα, δηλοῖ, ὅτι ἡ μονὰς ἐδιαιρέθη εἰς 12 μέρη ἴσα, καὶ ὅτι ἐλάβομεν τὰ 11.

Εἴδομεν παρομοίως (εἰς τὸν ἀριθμ. 39), ὅτι ἓν κλάσμα, ὡς τὸ $\frac{13}{15}$, εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ δέκατον πέμπτον μέρος ἑνὸς ὅλου, ἐκφραζομένου διὰ 13· τουτέστιν ἓν κλάσμα δύναται νὰ θεωρηθῇ καὶ ὡς τὸ πηλίκον τοῦ ἀριθμητοῦ του, διαιρουμένου διὰ τοῦ παρονομαστοῦ του, ὥστε δεκατρεῖς φοραῖς τὸ δέκατον πέμπτον τῆς μονάδος, ἢ δεκατρία δέκατα πέμπτα, καὶ καὶ τὸ δέκατον πέμπτον μέρος τοῦ δεκατρία ἢ 13 διαιρούμενον διὰ 15 εἶναι ἐκφράσεις ταυτοσήμαντοι.

§. 42. Ἀπὸ τὸν ὁρισμὸν, τὸν ὁποῖον ἐδώκαμεν εἰς τὸν ἀριθμητὴν καὶ παρονομαστὴν πορίζεται ἡ ἀκόλουθος συνέπεια.

1ον. Ἐὰν μὴ ἐγγίζοντες τὸν παρονομαστὴν ἑνὸς κλάσματος πολλαπλασιάσωμεν ἢ διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμητήντου δι' ἑνὸς ἀριθμοῦ, τὸ νέον κλάσμα θέλει εἶναι τόσαις φοραῖς μεγαλήτερον ἢ μικρότερον τοῦ πρώτου, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ τοιοῦτος ἀριθμός.

Τῷ ὄντι, ὅταν πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμητὴν ἐπὶ 2, 3, 4, κτλ. δεικνύομεν ἐκ τούτου, ὅτι λαμβάνομεν 2, 3, 4, κτλ. φοραῖς περισσότερα μέρη τῶν πρώτων, καὶ ἐπειδὴ τὰ μέρη εἶναι τὰ αὐτὰ, τὸ νέον κλάσμα εἶναι 2, 3, 4 κτλ. φοραῖς μεγαλήτερον· οὕτως ἔστω τὸ κλάσμα $\frac{6}{25}$, εἶναι φανερὸν, ὅτι

$\frac{12}{25}$, $\frac{18}{25}$, $\frac{24}{25}$ κ.τ.λ. εἶναι κλάσματα 2, 3, 4 φοραῖς μεγαλήτερα τοῦ πρώτου.

Ἐκ τοῦ ἐναντίου, ἐὰν διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμητὴν διὰ τοῦ 2, 3, 4 κ. τ. λ. δείχνομεν, ὅτι λαμβάνομεν 2, 3, 4 φοραῖς ὀλιγώτερα μέρη· λοιπὸν κ. τ. λ.

Οὕτως $\frac{3}{25}$, $\frac{2}{25}$ εἶναι 2, 3 φοραῖς μικρότερα τοῦ $\frac{6}{25}$.

2^{ον}. Ἐὰν μὴ ἐγγίζοντες τὸν ἀριθμητὴν, πολλαπλασιάσωμεν ἢ διαιρέσωμεν τὸν παρονομαστὴν ἑνὸς κλάσματος δι' ἑνὸς ἀριθμοῦ, διαιροῦμεν ἢ πολλαπλασιάζομεν τὸ κλάσμα ἐπὶ τοῦτον τὸν ἀριθμόν.

Τῷ ὄντι ὅταν πολλαπλασιάζωμεν ἐπὶ 2, 3, 4 τὸν παρονομαστὴν, τότε διαιροῦμεν τὴν μονάδα εἰς 2, 3, 4 μέρη περισσότερα τῶν πρότερον, καὶ τὸ εἶδος τούτων τῶν τελευταίων μερῶν τῆς μονάδος εἶναι 2, 3, 4 μικρότερα, καὶ ἐπειδὴ λαμβάνομεν πάντοτε τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν τούτων τῶν μερῶν, ἕπεται, ὅτι τὸ κλάσμα εἶναι 2, 3, 4 μικρότερον τοῦ πρώτου.

Ἐξ ἐναντίας, ἐὰν διαιρέσωμεν τὸν παρονομαστὴν διὰ τοῦ 2, 3, 4, ἡ μονὰς εὑρίσκεται διαιρημένη εἰς 2, 3, 4 φοραῖς ὀλιγώτερα μέρη, καὶ οὕτως τὸ εἶδος τῶν τοιούτων μερῶν τῆς μονάδος εἶναι 2, 3, 4 φοραῖς μεγαλήτερον τοῦ εἴδους τῶν πρώτων μερῶν. Λοιπὸν κ. τ. λ.

3^{ον}. Δὲν τρέπεται ποσῶς ἡ τιμὴ ἑνὸς κλάσματος, ὅταν πολλαπλασιάζωμεν ἢ διαιρῶμεν τοὺς δύο του ὅρους διὰ τοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ.

Τῷ ὄντι ἡ τροπὴ τοῦ ἀριθμητοῦ καταστaίνει τὸ κλάσμα ἕνα τινὰ ἀριθμὸν φορῶν μεγαλήτερον ἢ μικρό-

τερον, ἀλλ' ἡ τροπὴ ἡ γινομένη ἐπὶ τοῦ παρονομαστοῦ, τὸ καταστaίνει ἐξ ἐναντίας τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν φορῶν μικρότερον ἢ μεγαλήτερον, λοιπὸν γίνεται ἡ ἀνταμοιβὴ, καὶ ἡ τιμὴ τοῦ κλάσματος ἔμεινεν ἡ αὐτή.

Οὕτως τὰ κλάσματα $\frac{6}{8}$, $\frac{9}{12}$, $\frac{12}{16}$, $\frac{15}{20}$ εἶναι ὅλα ἰσοδύναμα μὲ τὸ κλάσμα $\frac{3}{4}$, ἐπειδὴ αὐτὰ συνάγονται ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἑκάστου τῶν δύο ὅρων του ἐπὶ 2, 3, 4, 5. Παρομοίως τὸ κλάσμα $\frac{24}{36}$ εἶναι ἴσον μὲ τὸ κλάσμα $\frac{12}{18}$, ἢ $\frac{8}{18}$, ἢ $\frac{6}{9}$, ἐπειδὴ εὑρίσκομεν αὐτὰ διαιροῦντες τοὺς δύο ὅρους τοῦ $\frac{24}{36}$ διὰ 2, 3, 4.

Αὗται αἱ διάφοροι προτάσεις δύνανται νὰ θεωρηθῶσιν, ὡς συνέπειαι τοῦ δευτέρου τρόπου τοῦ θεωρεῖν τὰ κλάσματα (ὅρ. ἀριθμ. 41.) καὶ τῶν ἀρχῶν, τὰς ὁποίας ἐπάνω εἰς τὴν διαίρεσιν (ἀριθ. 40.) ἐσυστήσαμεν.

§. 43. Ἐπειδὴ ἡ ἀνάγκη τῆς ἐφαρμογῆς τῆς τρίτης προτάσεως ἀπαντᾶται συχνὰ, νομίζομεν χρέος νὰ δώσωμεν δεῖξιν τινὰ αὐτῆς εὐθεῖαν καὶ ἀνεξάρτητον ἀπὸ τὰς δύο πρώτας.

Ἂς λάβωμεν πρὸς παράδειγμα τὸ κλάσμα $\frac{5}{8}$, καὶ ἂς πολλαπλασιάσωμεν τοὺς δύο ὅρους 5 καὶ 8 ἐπὶ 3, ἐντεῦθεν ἔχομεν $\frac{15}{24}$. λέγω, ὅτι τὸ τελευταῖον τοῦτο κλάσμα εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ πρῶτον.

Τῷ ὄντι ἀφ' οὗ ἡ ἀρχικὴ μονὰς διῃρέθη εἰς 8 ἴσα μέρη, ἂς διαιρέσωμεν ἕκαστον ὄγδοον εἰς τρία ἴσα

μέρη, ἡ μονὰς εὑρίσκεται οὕτω διῃρημένη εἰς εἰκοσιτέσσαρα μέρη ἴσα, ἕκαστον δὲ ὄγδοον ἀξίζει τρία εἰκοστὰ τέταρτα, καὶ πέντε ὄγδοα ἀξίζουν πεντάκις τρία, ἢ δεκαπέντε εἰκοστὰ τέταρτα, δηλαδὴ τὰ κλάσματα $\frac{5}{8}$ καὶ $\frac{15}{24}$ ἔχουν ἀκολούθως τὴν αὐτὴν τιμήν. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἠθέλαμεν δείξει, ὅτι τὰ $\frac{11}{12}$, καὶ $\frac{55}{60}$, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ τελευταῖον σχηματίζεται πολλαπλασιαζομένων τῶν δύο ὅρων 11 καὶ 12 τοῦ πρώτου ἐπὶ 5, εἶναι ἴσα.

Ἐπειδὴ ἀντιστρόφως περνοῦμεν ἀπὸ τὸ κλάσμα $\frac{15}{24}$ εἰς τὸ κλάσμα $\frac{5}{8}$, ἀφ' οὗ ληφθῇ τὸ τρίτον ἑκάστου τῶν ὅρων τοῦ πρώτου, καὶ ἀπὸ τὸ κλάσμα $\frac{55}{60}$ εἰς τὸ κλάσμα $\frac{11}{12}$, ἀφ' οὗ ληφθῇ τὸ πέμπτον τῶν δύο ὅρων τοῦ πρώτου, συμπεραίνομεν, ὅτι τὸ κλάσμα δὲν ἀλλάττει τιμὴν, ὅταν πολλαπλασιασθῶσιν ἢ διαιρεθῶσιν οἱ δύο του ὅροι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ.

Ἂς περάσωμεν τώρα εἰς τὰς διαφόρους ἐργασίας, τὰς ὁποίας δυνάμεθα νὰ πράξωμεν ἐπὶ τῶν κλασμάτων, διὰ τὴν λύσιν ἑνὸς ζητήματος, τοῦ ὁποίου τὰ διδόμενα εἶναι κλάσματα ἢ κλασματικοὶ ἀριθμοί.

Ἀλλὰ πρὶν ἐκθέσωμεν τὰς τέσσαρας θεμελιώδεις ἐργασίας, θέλομεν γνωστοποιήσει δύο μεταμορφώσεις αὐτῶν τῶν κλασμάτων, αἵτινες εἶναι μεγαλωτάτης χρήσεως, καὶ σχηματίζουν δύο εἴδη μερικῶν πράξεων τοῦ ὑπολογισμοῦ τῶν κλασμάτων.

Ἀναγωγὴ τῶν κλασμάτων εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστήν.

§. 44. Ἡ μεταμόρφωσις αὕτη ἔχει σκοπὸν νὰ ἀνάξῃ εἰς τὸ αὐτὸ εἶδος εἴτε εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν δύο δοθέντα κλάσματα διαφόρου εἴδους, ἢ διαφορετικῶν παρονομαστῶν· τώρα ἡ ἀρχὴ, κατὰ τὴν ὁποίαν δὲν τρέπεται ἡ τιμὴ ἑνὸς κλάσματος, ἀφ' οὗ πολλαπλασιασθοῦν οἱ δύο του ὅροι ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν, μᾶς προμηθεύει ἁπλούστατόν τι μέσον, διὰ νὰ ἐκτελέσωμεν ταύτην τὴν μεταμόρφωσιν.

Ἔστωσαν π. χ. τὰ κλάσματα $\frac{3}{4}$ καὶ $\frac{5}{7}$, τὰ ὁποῖα πρόκειται νὰ ἀνάξωμεν εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστήν.

Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τοὺς δύο ὅρους 3 καὶ 4 τοῦ πρώτου κλάσματος ἐπὶ τὸν 7 παρονομασὴν τοῦ δευτέρου, καὶ τοὺς δύο ὅρους 5 καὶ 7. τοῦ δευτέρου ἐπὶ 4 παρονομαστὴν τοῦ πρώτου, θέλει προκύψει $\frac{21}{28}$ καὶ $\frac{20}{28}$ διὰ τὰ δύο ζητούμενα κλάσματα.

Τὰ κλάσματα ταῦτα ἔχουν τὴν αὐτὴν τιμὴν μὲ τὰ δεδομένα κλάσματα, κατὰ τὴν ἀρχὴν, τὴν ὁποίαν ἐφανερώσαμεν, περιπλέον ἐξ ἀνάγκης ἔχουσι τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν, ἐπειδὴ ὁ παρονομαστὴς ἑκάστου πορίζεται ἐκ τοῦ πολλπλασιασμοῦ τῶν δύο πρώτων παρονομαστῶν 4 καὶ 7.

Ἔστωσαν προσέτι τὰ κλάσματα $\frac{4}{7}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{6}{11}$ νὰ ἀναχθῶσιν εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστήν.

Πολλαπλασιάζομεν τοὺς δύο ὅρους 4 καὶ 7 τοῦ πρώτου κλάσματος ἐπὶ 88 γινόμενον τῶν παρονομαστῶν 8 καὶ 11 τοῦ δευτέρου καὶ τρίτου κλάσματος, μετὰ ταῦτα τοὺς δύο ὅρους 5 καὶ 8 τοῦ δευτέρου κλάσματος ἐπὶ 77 γινόμενον τῶν παρονομαστῶν 7 καὶ 11 τοῦ πρώτου καὶ τρίτου κλάσματος, τέλος τοὺς δύο ὅρους 6 καὶ 11 τοῦ τρίτου κλάσματος ἐπὶ 56 γινόμενον τῶν παρονομαστῶν 7 καὶ 8 τοῦ πρώτου καὶ δευτέρου. Οὕτως ἔχομεν τὰ νέα κλάσματα $\frac{352}{616}$, $\frac{385}{616}$, $\frac{336}{616}$.

Τὰ κλάσματα ταῦτα ἔχουν τὴν αὐτὴν τιμὴν, ὡς τὰ πρῶτα, καὶ ἔχουν τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν, ἐπειδὴ συνάγονται ἐκ τοῦ γινομένου τῶν τριῶν παρονομαστῶν, 7, 8 καὶ 11.

Σ. Κ. Ἀληθῶς ἐδέχθημεν μίαν ἀρχὴν, ὅτι τὸ γινόμενον ἑνὸς ὁποιουδήποτε ἀριθμοῦ παραγόντων εἶναι πάντοτε τὸ αὐτὸ καθ' ὁποιανδήποτε τάξιν λάβωμεν τοὺς παράγοντας εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν, ἐν ᾧ ἡ τοιαύτη ἀρχὴ δὲν ἀπεδείχθη (εἰς τὸν ἀριθμ. 26), παρὰ μόνον εἰς τὴν περίστασιν δύο μόνον παραγόντων, ἀλλὰ ἡμεῖς θέλομεν τὴν ἀποδείξει εἰς ὅλην της τὴν ἔκτασιν εἰς τὸ $\overline{\varepsilon}^{ον.}$ κεφάλαιον.

Γενικὸς Κανών. Διὰ νὰ ἀνάξωμεν ἕνα τινὰ ἀριθμὸν κλασμάτων εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν, πολλαπλασιάζομεν διαδοχικῶς τοὺς δύο ὅρους ἑκάστου κλάσματος ἐπὶ τὸ γινόμενον τὸ ἀποτελεσθὲν ἐξ ὅλων τῶν ἄλλων παρονομαστῶν.

Ἔστω διὰ νέον παράδειγμα τὰ πέντε κλάσματα $\frac{3}{8}$, $\frac{7}{11}$, $\frac{10}{13}$, $\frac{13}{25}$ καὶ $\frac{29}{43}$. Διὰ πλειοτέραν ἁπλότητα διατάττομεν οὕτω τὴν πρᾶξιν.

$\frac{3}{8}$	$\frac{7}{11}$	$\frac{10}{13}$	$\frac{23}{25}$	$\frac{29}{43}$
153725 ·	111800 ·	94600 ·	49192 ·	28600 ·

$$\frac{461175}{1229800},\ \frac{782600}{1229800},\ \frac{946000}{1229800},\ \frac{1131416}{1229800},\ \frac{829400}{1229800}.$$

Καὶ ἀφ' οὗ σχηματίσωμεν τὸ γινόμενον τῶν πέντε παρονομαστῶν, 8, 11, 13, 25 καὶ 43, οἵτινες δίδουσι διὰ γινόμενον 1229800, διαιροῦμεν διαδοχικῶς τὸ γινόμενον τοῦτο δι' ἑκάστου τῶν παρονομαστῶν, καὶ λαμβάνομεν τὰ πέντε πηλίκα 153725, 111800, 94600, 49192, 28600, τὰ ὁποῖα γράφομεν ἀμοιβαίως ὑπὸ τὰ πέντε δεδομένα κλάσματα, μετὰ ταῦτα πολλαπλασιάζομεν τοὺς δύο ὅρους ἑκάστου κλάσματος ἐπὶ τὸ πηλίκον τὸ ἀνταποκρινόμενον εἰς αὐτοὺς, καὶ ὅλα τὰ κλάσματα οὕτως ἄγονται εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστήν.

Ὁ λόγος ταύτης τῆς πράξεως εὐκόλως γίνεται καταληπτός. Ἐπειδὴ ὁ ἀριθμὸς 1229800 μὲ τὸ νὰ εἶναι τὸ γινόμενεν τῶν πέντε παρονοματᾶν, τὸ πηλίκον 153725 τῆς διαιρέσεως τοῦ 1229800 διὰ 8 ἐκφράζει ἀναγκαίως τὸ γινόμενον τῶν ἄλλων τεσσάρων παρονομαστῶν 11, 13, 25, 43. Παρομοίως 111800 ἐπειδὴ εἶναι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ 1229800 ἐπὶ τὸν δεύτερον παρονομαστὴν 11, εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενεν τῶν τεσσάρων ἄλλων παρονομαστῶν, 8, 13, 25 καὶ 43. Τοὺς αὐτοὺς συλλογισμοὺς ἐκτελοῦμεν καὶ διὰ τὰ ἄλλα πηλίκα.

Ἡ τοιαύτη πρᾶξις εἶναι χωρὶς ἀμφιβολίαν πλέον σύντομος, παρὰ ἐκείνην, διὰ τῆς ὁποίας ἔπρεπε διὰ κάθε κλάσμα νὰ πολλαπλασιάζωμεν τοὺς τέσσαρας

παρονομαστὰς τῶν ἄλλων τεσσάρων κλασμάτων· καὶ διὰ τοῦτο πρέπει νὰ μεταχειριζώμεθα ταύτην τὴν πρᾶξιν, ὁσάκις ἔχομεν περισσότερον παρὰ τρία κλάσματα νὰ ἄξωμεν εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστήν.

§. 45. Εἶναι μία περίστασις εἰς τὴν ὁποίαν ἡ ἀγωγὴ τῶν κλασμάτων εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν ἐκτελεῖται μὲ τρόπον ἁπλούστατον· συμβαίνει δὲ, ὅταν ὁ μεγαλήτερος τῶν παρονομαστῶν περιέχῃ ἐντελῶς ὅλους τοὺς ἄλλους, τουτέστι διαιρῆται ἀκριβῶς δι' ὅλων τῶν ἄλλων.

Ἔστωσαν π. χ. τὰ κλάσματα.

$$\frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{5}{6},\ \frac{7}{12},\ \frac{23}{36}.$$

$$12 \quad 9 \quad 6 \quad 3 \quad 1.$$

$$\frac{24}{36},\ \frac{27}{36},\ \frac{30}{36},\ \frac{21}{36},\ \frac{23}{36}.$$

Εὐκόλως βλέπομεν, ὅτι 36 διαιρεῖται ἐντελῶς διὰ τῶν τεσσάρων ἄλλων παρονομαστῶν, 3, 4, 6, 12.

Τούτου τεθέντος ἐκτελοῦμεν διαδοχικῶς ταύτας τὰς διαιρέσεις. καὶ θέτομεν τὰ πηλίκα 12, 9, 6 καὶ 3 ὑποκάτω τῶν τεσσάρων πρώτων κλασμάτων, μετὰ ταῦτα πολλαπλασιάζομεν τοὺς δύο ὅρους ἑκάστου ἐπὶ τὸ ἀντικείμενον εἰς αὐτὸ πηλίκον, ἀφίνοντες τὸ κλάσμα $\frac{23}{36}$, ὡς ὑπάρχει, καὶ οὕτως ὅλα τὰ κλάσματα ἀνάγονται εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν 36.

Μερικαῖς φοραῖς χωρὶς νὰ διαιρῆται ὁ μεγαλήτερος παρονομαστὴς δι' ὅλων τῶν ἄλλων, δυνάμεθα νὰ ἐννοῶμεν, ὅτι πολλαπλασιάζοντές τον ἐπὶ 2, 3, 4 . . . συνάγομεν ἓν γινόμενον διαιρετὸν ἐντελῶς δι' ὅλων

τῶν παρονομαστῶν. Εἰς ταύτην τὴν περίστασιν ἀκόμη ὑπάρχει συντομία.

Ἔστωσαν τὰ κλάσματα.

$$\frac{3}{4}\quad\frac{7}{8}\quad\frac{11}{12}\quad\frac{13}{18}\quad\frac{17}{24}\quad\frac{25}{36}$$

18	9	6	4	3	2

$$\frac{54}{72},\quad\frac{63}{72},\quad\frac{66}{72},\quad\frac{52}{72},\quad\frac{51}{72},\quad\frac{50}{72}.$$

Ὁ παρονομαστὴς 36 δὲν διαιρεῖται ἐντελῶς δι' ὅλων τῶν ἄλλων, ἀλλὰ διπλασιαζόμενος δίδει 72, ἀριθμὸς, ὅστις προδήλως διαιρεῖται διὰ 4, 8, 12, 18, 24, 36.

Τούτου τεθέντος, σχηματίζομεν τὰ πηλίκα τῆς διαιρέσεως 72 διὰ τῶν παρονομαστῶν, τὰ ὁποῖα θέτομεν ἀμοιβαίως ὑποκάτω τῶν κλασμάτων, καὶ μετὰ ταῦτα πολλαπλασιάζομεν τοὺς δύο ὅρους ἑκάστου ἐπὶ τὸ ἀνταποκρινόμενον πηλίκον. Ὅλα ταῦτα τὰ κλάσματα λαμβάνουσιν οὕτω τὸ αὐτὸν παρονομαστὴν 72.

Αὗται αἱ ἁπλότητες ἀπαιτοῦν πολλὴν γύμνασιν, ἀλλὰ θέλομεν δώσει μετὰ ταῦτα (κεφάλαιον ε΄.) τὸ μέσον τοῦ νὰ ἀνάγωμεν ἕνα ὁπιονδήποτε ἀριθμὸν κλασμάτων εἰς τὸν ἁπλούστερον παρονομαστήν.

Ἰδοὺ μερικαὶ ἐφαρμογαὶ τῆς ἀνωτέρω μεταμορφώσεως.

§. 46. Ζήτημα πρῶτον. Ζητεῖται ἐκ τῶν δύο κλασμάτων $\frac{3}{5}$ καὶ $\frac{7}{12}$ ποῖον εἶναι τὸ μεγαλήτερον.

Κατὰ πρῶτον εἶναι δύσκολον νὰ ἀποκριθῶμεν εἰς τοῦτο τὸ ζήτημα· ἐπειδὴ ἐὰν ἀπὸ ἓν μέρος ἡ μονὰς εἶναι εἰς τὸ δεύτερον κλάσμα διῃρημένη εἰς μεγαλήτε-

ρου τινὰ ἀριθμὸν μερῶν, παρὰ εἰς τὸ πρῶτον. ἀπὸ τὸ ἄλλο μέρος λαμβάνομεν περισσότερα μέρη, ἐπειδὴ ὁ ἀριθμητὴς 4 εἶναι μεγαλήτερος ἀπὸ τὸν ἀριθμητὴν 3, ἀλλ' ἀφαιρεῖται ἡ δυσκολία, ὅταν τὰ ἀνάξωμεν εἰς τὸν ἴδιον παρονομαστὴν, ἐπειδὴ εἶναι φανερὸν, ὅτι ἀπὸ δύο κλάσματα, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν, ἐκεῖνο θέλει εἶσθαι τὸ μεγαλήτερον, τὸ ὁποῖον ἔχει τὸν μεγαλήτερον ἀριθμητήν.

Πραχθείσης ταύτης τῆς ἀναγωγῆς προκύπτει $\frac{36}{60}$ διὰ τὸ πρῶτον, καὶ $\frac{35}{60}$ διὰ τὸ δεύτερον. Λοιπὸν τὸ κλάσμα $\frac{3}{5}$ εἶναι τὸ μεγαλήτερον, καὶ $\frac{1}{60}$ εἶναι ἡ μεταξύτων διαφορά.

Γνωρίζομεν παρομοίως, ὅτι ἐκ τῶν τριῶν κλασμάτων $\frac{4}{7}$, $\frac{6}{11}$, $\frac{8}{13}$, τὸ μεγαλήτερον εἶναι τὸ $\frac{8}{13}$, καὶ τὸ μικρότερον εἶναι τὸ $\frac{6}{11}$, καὶ τὸ μέσον τὸ $\frac{4}{7}$. ἐπειδὴ ἀγόμενα εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν τρέπονται εἰς $\frac{572}{1001}$ $\frac{546}{1001}$ $\frac{616}{1001}$.

Δυνάμεθα νὰ ἀνάξωμεν καὶ τὰ κλάσματα εἰς τὸν αὐτὸν ἀριθμητὴν (τὸ ὁποῖον ἤθελεν ἐκτελεσθῇ πολλαπλασιαζομένων τῶν δύο ὅρων ἑκάστου ἐπὶ τὸ γινόμενον ὅλων τῶν ἄλλων ἀριθμητῶν), καὶ ἐκ τῶν κλασμάτων τούτων τὸ μεγαλήτερον ἤθελεν εἶσθαι ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον ἤθελεν ἔχει τὸν μικρότερον παρονομαστήν· ἐπειδὴ μὲ τὸ νὰ εἶναι τὸ εἶδος τῶν μερῶν μεγαλήτερον τοῦ εἴδους τῶν ἄλλων, ἠθέλαμεν ἔχει τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.

Ζήτημα Δεύτερον. Ποίαν τροπὴν φέρει εἰς ἓν κλάσμα ἡ πρόσθεσις ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ εἰς τοὺς δύο του ὅρους.

Ἔστω π. χ. τὸ κλάσμα $\frac{7}{12}$, εἰς τοὺς δύο ὅρους τοῦ ὁποίου προσθέτεται 6, ἐκ τούτου προκύπτει $\frac{13}{18}$ διὰ τὸ νέον κλάσμα.

Ἤδη ἀναγομένων τῶν δύο κλασμάτων εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν τὸ πρῶτον γίνεται $\frac{126}{216}$, καὶ τὸ δεύτερον $\frac{156}{216}$. Λοιπὸν τὸ προτεθὲν κλάσμα αὐξήθη κατὰ τὴν τιμὴν, καὶ ἡ αὔξησις αὐτοῦ εἶναι $\frac{30}{216}$.

Διὰ νὰ δώσωμεν τὸν λόγον τούτου ἄνευ τινὸς ὑπολογισμοῦ, ἂς παρατηρήσωμεν, ὅτι, ἐπειδὴ ἡ μονὰς εἶναι ἴση μὲ $\frac{12}{12}$, ἡ διαφορὰ μεταξὺ τῆς μονάδος καὶ $\frac{7}{12}$, ἐκφράζεται διὰ $\frac{5}{12}$, παρομοίως ἡ διαφορὰ μεταξὺ τῆς μονάδος καὶ $\frac{13}{18}$, ἐκφράζεται διὰ $\frac{5}{18}$, οἱ δὲ ἀριθμηταὶ τῶν δύο τούτων διαφορῶν εἶναι οἱ αὐτοί· καὶ τῷ ὄντι, ἐπειδὴ 13 καὶ 18 ἐσχηματίσθησαν διὰ τῆς προσθέσεως τοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ 6 εἰς τοὺς δύο ὅρους 7 καὶ 12· ὅθεν ἕπεται, ὅτι εἶναι ἡ αὐτὴ διαφορὰ μεταξὺ 18 καὶ 13, καὶ μεταξὺ 12 καὶ 7· ἀλλὰ ἡ διαφορὰ $\frac{5}{18}$ εἶναι ἐξ ἀνάγκης μικροτέρα τῆς $\frac{5}{12}$, ἐπειδὴ ὁ παρονομαστής του εἶναι μεγαλήτερος· λοι-

πὸν τὸ κλάσμα $\frac{13}{18}$ διαφέρει ὀλιγώτερον τῆς μονάδος παρὰ $\frac{7}{12}$. Λοιπὸν τοῦτο εἶναι μεγαλήτερον.

Καταλαμβάνομεν προσέτι, ὅτι ὅσον πλέον ὁ προσθετόμενος ἀριθμὸς εἰς τοὺς δύο ὅρους τοῦ κλάσματος εἶναι μεγαλήτερος, τόσον περισσότερον ἡ διαφορὰ μεταξὺ τῆς μονάδος καὶ τοῦ νέου κλάσματος εἶναι μικροτέρα· ἐπειδὴ ὁ ἀριθμητὴς ταύτης τῆς διαφορᾶς μὲ τὸ νὰ εἶναι πάντοτε 5, ὁ παρονομαστὴς αὐξάνει διαδοχικῶς, καὶ τοιουτοτρόπως τὸ κλάσμα γίνεται μεγαλήτερον.

Ἐπειδὴ ὁ τοιοῦτος συλλογισμὸς δύναται νὰ ἐφαρμοσθῇ εἰς κάθε ἄλλο κλάσμα, ἠμποροῦμεν νὰ συνάξωμεν, ὅτι ἐὰν εἰς τοὺς δύο ὅρους ἑνὸς κλάσματος προσθέσωμεν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν, τὸ συναγόμενον κλάσμα θέλει εἶναι μεγαλήτερον τοῦ προτεθέντος κλάσματος, καὶ τόσον μεγαλήτερον, ὅσον μεγαλήτερος εἶναι ὁ προσθετόμενος ἀριθμός.

Κατ' ἀντίστροφον συλλογισμὸν ἓν κλάσμα σμικρύνει κατὰ τὴν τιμὴν, ὅταν ἀφαιρῶμεν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ἀπὸ τοὺς δύο του ὅρους.

Ἐπιστεύσαμεν ὡς χρέος μας νὰ ὁμιλήσωμεν περὶ ταύτης τῆς προτάσεως, διὰ νὰ πιστεύσουν καὶ οἱ ἀρχάριοι, ὅτι ἀκολουθεῖ ἡ περίστασις αὕτη εἰς τὰ κλάσματα, ὡς ἀκολουθεῖ καὶ ἡ περίστασις καθ' ἣν πολλαπλασιάζομεν, ἢ διαιροῦμεν διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ τοὺς δύο ὅρους ἑνὸς κλάσματος. Εἰς τὴν τελευταίαν ταύτην περίστασιν δὲν μεταβάλλεται ἡ τιμὴ τοῦ κλάσματος· ἀλλὰ προσθέτοντες ἢ ἀφαιροῦντες τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν, αὐξάνομεν ἢ ἐλαττοῦμεν τὸ κλάσμα.

Ἀναγωγὴ τῶν κλασμάτων εἰς τοὺς ἐλαχίστους ὅρους των.

§. 47. Συμβαίνει συχνὰ εἰς τὸν ὑπολογισμὸν τῶν κλασμάτων νὰ ἀπαντήσωμεν κλάσμα ἐκφραζόμενον διὰ μεγαλωτάτων ἀριθμῶν· τώρα ὅσον ὁ ἀριθμητὴς καὶ ὁ παρονομαστὴς εἶναι μεγάλοι, τόσον πλειοτέραν δυσκολίαν ἀπαντῶμεν εἰς τὸ νὰ λάβωμεν μίαν καθαρὰν ἰδέαν τοῦ κλάσματος.

Π. χ. Διὰ νὰ ἐκτιμήσωμεν $\frac{12}{15}$, πρέπει νὰ διαιρέσωμεν τὴν μονάδα εἰς δεκαπέντε ἴσα μέρη, καὶ νὰ λάβωμεν 12 ἀπὸ τὰ τοιαῦτα μέρη, ἀλλὰ ἐὰν παρατηρήσωμεν, ὅτι 12 καὶ 15 διαιροῦνται ἐν ταυτῷ διὰ τοῦ 3, ἐκτελοῦντες ταύτην τὴν πρᾶξιν συνάγομεν $\frac{4}{5}$, κλάσμα ἰσοδύναμον τοῦ διδομένου (ἀριθμ. 42), καὶ διὰ νὰ λάβωμεν μίαν ἰδέαν τούτου τοῦ κλάσματος, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν τὴν μονάδα εἰς 5 ἴσα μέρη, καὶ νὰ λάβωμεν 4, τὸ ὁποῖον εἶναι εὐκολώτερον τοῦ πρώτου.

Διὰ τοῦτο, ὅταν μᾶς παῤῥησιάζηται ἓν κλάσμα, τοῦ ὁποίου οἱ ὅροι εἶναι ἀρκετὰ μεγάλοι, εἶναι ὠφέλιμον νὰ τὸ ἀνάγωμεν εἰς μίαν ἔκφρασιν πλέον ἁπλουστέραν, ἐὰν εἶναι δυνατόν.

Τὸ πρῶτον μέσον, τὸ ὁποῖον μᾶς παῤῥησιάζεται, εἶναι νὰ διαιρῶμεν τοὺς δύο του ὅρους διὰ τῶν ἀριθμῶν 2, 3, 4, ἕως οὗ εἶναι δυνατόν.

Ἔστω π. χ. τὸ κλάσμα $\frac{108}{144}$, τὸ ὁποῖον ἔχομεν νὰ ἀνάξωμεν εἰς τοὺς μικροτέρους του ὅρους.

Εἶναι φανερὸν, ὅτι οἱ δύο του ὅροι εἶναι διαιρετοὶ διὰ τοῦ 2, καὶ ἐκτελουμένης τῆς πράξεως συνάγομεν $\frac{54}{72}$ διὰ πρῶτον ἀποτέλεσμα.

Οἱ δύο ὅροι τούτου τοῦ νέου κλάσματος διαιροῦνται ἀκόμη διὰ τοῦ 2, καὶ συνάγομεν δι' ἐξαγόμενον $\frac{27}{36}$.

Δοκιμάζοντες τώρα τὴν διαίρεσιν διὰ τοῦ 3, εὑρίσκομεν $\frac{9}{12}$, κλάσμα τοῦ ὁποίου οἱ δύο ὅροι διαιροῦνται ἀκόμη διὰ τοῦ 3, καὶ συνάγομεν τέλος πάντων $\frac{3}{4}$ διὰ τὸ κλάσμα $\frac{108}{144}$, ἠγμένον εἰς τὴν ἁπλουστέραν του μορφήν.

Αὕτη ἡ μέθοδος εἶναι εὔκολος καὶ ὠφέλιμος εἰς τὰς πράξεις, ὅμως δὲν εἶναι πολλὰ γενικὴ, ἄλλως δὲ συμβαίνει τὸ ἄτοπον, ὅταν οἱ ὅροι τοῦ κλάσματος εἶναι πολλὰ μεγάλοι, νὰ ἀφίνωμεν νὰ μᾶς ἐκφεύγωσι κοινοὶ διαιρέται εἰς τοὺς δύο ὅρους.

Ἰδοὺ ἀκριβής τις καὶ βεβαία μέθοδος τοῦ νὰ ἀνάγωμεν δεδομένον τι κλάσμα εἰς τὴν ἁπλουστέραν του ἔκφρασιν. Αὕτη συνίσταται εἰς τὸ νὰ προσδιορίσωμεν κατ' εὐθεῖαν τὸν μεγαλήτερον ἀριθμὸν, ὅστις δύναται εἰς τὸν αὐτὸν καιρὸν νὰ διαιρῇ καὶ τοὺς δύο ὅρους τοῦ κλάσματος. Ἡ μέθοδος αὕτη, τὴν ὁποίαν ἤδη ἀναπτύσσομεν, εἶναι γνωστὴ ὑπὸ τὸ ὄνομα, *Μέγιστος κοινὸς Διαιρέτης*.

§. 48. Ἃς γνωσθοῦν δὲ πρότερον προοιμιώδεις τινὲς γνώσεις.

Εἷς ἀριθμὸς πολλαπλάσιος ἄλλου ἀριθμοῦ καλεῖται, ὅταν τὸν περιέχῃ ἕνα ἀκέραιον ἀριθμὸν φορῶν, τουτέστιν ὅταν ὁ πρῶτος ἀριθμὸς διαιρῆται ἐντελῶς διὰ τοῦ δευτέρου.

Καὶ ἀντιστρόφως, ὁ δεύτερος ἀριθμὸς εἶναι ὑποπολλαπλάσιος, ἢ διαιρέτης τοῦ πρώτου.

Οὕτως 24 εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 6, ἐπειδὴ 4 φοραῖς 6 κάμνει τὸ 24, καὶ ἀντιστρόφως 4 καὶ καὶ 6 εἶναι διαιρέται, ἢ ὑποπολλαπλάσιοι τοῦ 24. Παρομοίως 60 εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 12, ἐπειδὴ 5 φοραῖς 12 δίδει 60, καὶ ἀντιστρόφως 5 καὶ 12 εἶναι διαιρέται, ἢ ὑποπολλαπλάσιοι τοῦ 60.

Καλεῖται ἀριθμὸς πρῶτος κάθε ἀριθμὸς, ὁ ὁποῖος δὲν διαιρεῖται ἐντελῶς, παρὰ διὰ τοῦ ἑαυτοῦ του, ἢ διὰ τῆς μονάδος, ἥτις εἶναι διαιρέτης ὅλων τῶν ἀριθμῶν· οὕτως 2, 3, 5, 7, 11, 13 . . . . εἶναι πρῶτοι ἀριθμοὶ, ἀλλὰ 4, 6, 8, 9, 12 . . . . δὲν εἶναι ἀριθμοὶ πρῶτοι· ἐπειδὴ οὗτοι ἔχουσι διαιρέτας τὸν 2 καὶ 3.

Δύο ἀριθμοὶ καλοῦνται ἀναμεταξύ των πρῶτοι, ὅταν δὲν ἔχωσιν ἄλλον κοινὸν διαιρέτην, παρὰ τὴν μονάδα, οὕτως 4 καὶ 9, 7 καὶ 12, 12 καὶ 25, εἶναι ἀριθμοὶ πρῶτοι ἀναμεταξύ των· 8 καὶ 12 δὲν εἶναι ἀριθμοὶ πρῶτοι ἀναμεταξύ των, ἐπειδὴ διαιροῦνται εἰς τὸν αὐτὸν καιρὸν διὰ τοῦ 2 καὶ διὰ τοῦ 4.

Πρώτη ἀρχή. Κάθε ἀριθμὸς, ὅς τις διαιρεῖ ἐντελῶς ἕνα ἀριθμὸν, διαιρεῖ οὗτος καὶ ἕκαστον πολλαπλάσιον τοῦ τοιούτου δευτέρου ἀριθμοῦ.

Π. χ. 24 μὲ τὸ νὰ διαιρῆται διὰ τοῦ 8, καὶ δίδει διὰ πηλίκον 3, 5 φοραῖς 24, ἢ 120 διαιρούμενον διὰ τοῦ 8 δίδει (ἀριθμ. 40) διὰ πηλίκον 5 φοραῖς 3 ἢ 15. Παρομοίως 60 διαιρούμενον διὰ 12, δίδει διὰ πηλίκον 5, 7 φοραῖς 60 ἢ 420 διαιρούμε-

νου διὰ τοῦ 12, δίδει διὰ πηλίκον 7 φοραῖς 5, ἢ 35.

Δευτέρα ἀρχή. Κάθε ἀριθμὸς χωριζόμενος εἰς δύο μέρη, τὸ ἓν καὶ τὸ ἄλλο διαιρετὰ δι' ἄλλου δευτέρου ἀριθμοῦ, πρέπει καὶ αὐτὸς νὰ διαιρῆται ἐντελῶς διὰ τοῦ δευτέρου ἀριθμοῦ.

Τῷ ὄντι, τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ ὅλου ἀριθμοῦ μὲ τὸ νὰ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο μερικῶν πηλίκων, ἐὰν τὰ τοιαῦτα μερικὰ πηλίκα εἶναι ἀκέραια, τὸ ἄθροισμά των; τουτέστι τὸ ὅλον πηλίκον πρέπει νὰ εἶναι ἀκέραιον.

Τρίτη ἀρχή. Κάθε ἀριθμὸς, ὅς τις διαιρεῖ ἐντελῶς ἓν ὅλον ἀναλυόμενον εἰς δύο μέρη, καὶ ὅς τις διαιρεῖ παρομοίως τὸ ἓν τῶν μερῶν, πρέπει προσέτι νὰ διαιρῇ καὶ τὸ ἄλλο μέρος· ἐπειδὴ τὸ ὅλον πηλίκον μὲ τὸ νὰ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο μερικῶν πηλίκων, ἐὰν τὸ ἓν τῶν πηλίκων τούτων ἦτον κλασματικὸν, ἠθέλαμεν ἔχει ἀριθμόν τινα ἀκέραιον ἴσον μὲ ἕνα ἀριθμὸν κλασματικὸν (ἀριθμ. 1), τὸ ὁποῖον εἶναι ἄτοπον.

§. 49. Τούτου τεθέντος, ἔστωσαν οἱ δύο ἀριθμοὶ 360 καὶ 276, τῶν ὁποίων ζητοῦμεν τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην, ἢ τὸν μεγαλήτερον ἀριθμὸν, ὅς τις διαιρεῖ ἐν ταυτῷ καὶ τοὺς δύο.

Εἶναι κατὰ πρῶτον φανερὸν, ὅτι ὁ ζητούμενος μέγιστος κοινὸς διαιρέτης δὲν ὑπερβαίνει τὸν μικρότερον ἀριθμὸν 276, καὶ ἐπειδὴ 276 διαιρεῖ τὸν ἑαυτόν του, ἐὰν ἐδύνατο νὰ διαιρέσῃ καὶ τὸ 360, ἤθελεν εἶναι ὁ ζητούμενος μέγιστος κοινὸς διαιρέτης.

Ἂς δοκιμάσωμεν τὴν διαίρεσιν 360 διὰ 276, εὑρίσκομεν διὰ πηλίκον 1 καὶ διὰ ὑπόλοιπον 84, λοιπὸν 276 δὲν εἶναι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης. Λέγω τώρα, ὅτι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τοῦ 360 καὶ

τοῦ 276, εἶναι ὁ αὐτὸς μὲ τὸν τοῦ μικροτέρου ἀριθμοῦ 276, καὶ τοῦ ὑπολοίπου τῆς διαιρέσεως 84.

Τῷ ὄντι ὁ ζητούμενος μέγιστος κοινὸς διαιρέτης μέλλων νὰ διαιρέσῃ τὸ 360 καὶ ἓν τῶν μερῶν τὸν 276, θέλει διαιρέσει ἐξ ἀνάγκης (ἀριθμ. 48) τὸ ἄλλο μέρος 84. Διὰ τοῦτο συνάγομεν, ὅτι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τοῦ 360 καὶ 276, δὲν δύναται νὰ ὑπερβῇ ἐκεῖνον τοῦ 276 καὶ 84, ἐπειδὴ πρέπει νὰ διαιρῇ τοὺς τοιούτους δύο ἀριθμούς· ἀλλ' ἐπειδὴ ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τοῦ 276 καὶ 84 διαιρῶν τὰ δύο μέρη τοῦ ὅλου 360, πρέπει νὰ διαιρῇ ἐξ ἀνάγκης τοῦτον τὸν τελευταῖον ἀριθμὸν, καὶ ἐπειδὴ εἶναι διαιρέτης ἀκριβὴς τοῦ 360 καὶ 276, δὲν δύναται ὁ τοιοῦτος νὰ ὑπερβαίνῃ τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τοῦ 360 καὶ 276· λοιπὸν βλέπομεν, ὅτι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τοῦ 360 καὶ 276, καὶ ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τοῦ 276 καὶ 84 δὲν ὑπερβαίνει ὁ εἷς τὸν ἄλλον· λοιπὸν εἶναι ἴσοι.

Οὕτως τὸ ζήτημα ἤχθη εἰς τὸ νὰ ζητήσωμεν τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τῶν 276 καὶ 84 ἀριθμῶν, οἵτινες εἶναι ἁπλούστεροι τῶν 360 καὶ 276.

Πρὸς τοῦτο συλλογιζόμεθα περὶ τοῦ 276 καὶ 84, ὡς ἐσυλλογίσθημεν περὶ τῶν πρώτων ἀριθμῶν, τουτέστι δοκιμάζοντες τὴν διαίρεσιν τοῦ 276 διὰ 84· ἐπειδὴ ἐὰν ἡ τοιαύτη διαίρεσις ἐκτελῆται ἀκριβῶς, τότε τὸ 84 ἤθελεν εἶναι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης μεταξὺ 376 καὶ 84, καὶ ἑπομένως τοῦ 360 καὶ 276.

Ἐκτελοῦντες ταύτην τὴν νέαν διαίρεσιν, εὑρίσκομεν 3 διὰ πηλίκον, καὶ 24 διὰ ὑπόλοιπον, λοιπὸν 84 δὲν εἶναι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης, ἀλλὰ δι' ἑνὸς συλλογισμοῦ ἀναλογοῦντος μὲ τὸν ὁποῖον ἐκάμαμεν ἀνωτέρω, ἀποδεικνύομεν, ὅτι ὁ μέγιστος κοι-

νὸς διαιρέτης τοῦ 276 καὶ 84, εἶναι ἐκεῖνος τοῦ πρώτου ὑπολοίπου 84, καὶ τοῦ δευτέρου 24.

Ἄς ἐπαναλάβωμεν αὐτὸν τὸν συλλογισμόν. Ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τοῦ 276 καὶ 84, μέλλων νά διαιρέσῃ τὸ 84, διαιρεῖ ἐξ ἀνάγκης τὸ πολλαπλάσιόν του 3 φοραῖς 84· οὕτω διαιρῶν ἓν ὅλον 276, καὶ ἓν τῶν μερῶν του 3 φοραῖς 84, διαιρεῖ καὶ τὸ ἄλλο μέρος 24. Ἤδη λοιπὸν ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης 276 καὶ 84 δὲν δύναται νὰ ὑπερβαίνῃ ἐκεῖνον τοῦ 84 καὶ 24· ἀπὸ τὸ ἄλλο μέρος ὁ μέγιστος κοινος διαιρέτης τοῦ 84 καὶ 24 διαιρῶν 3 φοραῖς 84 καὶ 24, τὰ ὁποῖα εἶναι τὰ δύο μέρη τοῦ 276, διαιρεῖ ἐξ ἀνάγκης καὶ τὸ 276· οὕτως διαιρῶν τὸ 84 καὶ 276 δὲν δύναται νὰ ὑπερβῇ τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τοῦ 84 καὶ 276· λοιπὸν ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τοῦ 276 καὶ τοῦ 84 εἶναι ἐκεῖνος, ὅς τις ὑπάρχει μεταξὺ τοῦ 84 καὶ τοῦ 24, καὶ δὲν δύναται νὰ ὑπερβαίνῃ ὁ εἷς τὸν ἄλλον, διὰ τοῦτο εἰσὶν ἴσοι.

Τὸ ζήτημα τώρα ἐφέρθη εἰς τὸ νὰ ἀναζητήσωμεν τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τοῦ 84 καὶ 24, τουτέστι πρέπει νὰ διαιρέσωμεν 84 διὰ 24. Ἐκτελοῦντες ταύτην τὴν νέαν διαίρεσιν εὑρίσκομεν 3 διὰ πηλίκον καὶ 12 διὰ ὑπόλοιπον· λοιπὸν 24 δὲν εἶναι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης. Ἀλλ' ἐπειδὴ ὁ τοιοῦτος μέγιστος κοινὸς διαιρέτης εἶναι ὁ αὐτὸς μὲ τὸν ὅς τις ὑπάρχει μεταξὺ τοῦ ὑπολοίπου 24 καὶ τοῦ ὑπολοίπου 12, διαιροῦμεν 24 διὰ 12 καὶ εὑρίσκομεν ἀκριβὲς πηλίκον 2. Λοιπὸν 12 εἶναι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τοῦ 24 καὶ 12, καὶ εἶναι παρομοίως ἐκεῖνος τοῦ 84 καὶ 24 καὶ τοῦ 276 καὶ 84, καὶ τοῦ 360 καὶ τοῦ 276. Λοιπὸν 12 εἶναι ὁ ζητούμενος μέγιστος κοινὸς διαιρέτης.

Εἰς τὰς πράξεις διατάττεται οὕτως ἡ ἐργασία.

	1	3	3	2
360	276	84	24	12
84	24	12	0	

Ἀφ' οὗ διαιρέσωμεν 360 διὰ 276, ὡς συνειθίζομεν, ἡ ὁποία πρᾶξις δίδει 1 διὰ πηλίκον, τὸ ὁποῖον γράφομεν ἄνω τοῦ διαιρέτου (ἀντὶ νὰ τὸ γράφωμεν ὑποκάτω αὐτοῦ) καὶ ἓν ὑπόλοιπον 84, γράφομεν τὸ ὑπόλοιπον τοῦτο εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ μικροτέρου ἀριθμοῦ 276, καὶ διαιροῦμεν 276 διὰ 84· συνάγομεν ἓν πηλίκον, τὸ ὁποῖον γράφομεν ἄνω τοῦ διαιρέτου 84, καὶ ἓν ὑπόλοιπον 24, τὸ ὁποῖον γράφομεν εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ 84, καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

Κανὼν Γενικός. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην δύο ἀριθμῶν, διαιροῦμεν τὸν μεγαλήτερον ἀριθμὸν διὰ τοῦ μικροτέρου, καὶ ἐὰν δὲν εὕρωμεν ὑπόλοιπον, τότε ὁ μικρότερος ἀριθμὸς εἶναι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης.

Ἐὰν ὑπάρχῃ ὑπόλοιπον, διαιροῦμεν τὸν μικρότερον ἀριθμὸν δι' αὐτοῦ τοῦ ὑπολοίπου, καὶ ἐὰν ἡ διαίρεσις ἐκτελεσθῇ μὲ ἀκρίβειαν, τότε τὸ πρῶτον ὑπόλοιπον εἶναι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης.

Ἐὰν εἰς ταύτην τὴν δευτέραν διαίρεσιν εὑρεθῇ ἓν ὑπόλοιπον, διαιροῦμεν τὸ πρῶτον ὑπόλοιπον διὰ τοῦ δευτέρου, ἐξακολουθοῦντες νὰ διαιρῶμεν πάντοτε τὸ προευρεθὲν ὑπόλοιπον διὰ τοῦ ἀκολούθου, ἕως οὗ νὰ εὕρωμεν μίαν ἀκριβῆ διαίρεσιν· τότε ὁ τελευταῖος διαιρέτης, τὸν ὁποῖον ἐμεταχειρίσθημεν, εἶναι ὁ ζητούμενος μέγιστος κοινὸς διαιρέτης.

Ἐὰν ὁ τελευταῖος διαιρέτης εἶναι ἡ μονάς, τοῦτο φανερόνει, ὅτι οἱ δύο δεδομένοι ἀριθμοὶ εἶναι πρῶτοι ἀναμεταξύ των, ἐπειδὴ δὲν ἔχουσι ἄλλον διαιρέτην κοινόν, παρὰ τὴν μονάδα.

Ἀντιστρόφως, ἐὰν δύο δεδομένοι ἀριθμοὶ εἶναι πρῶτοι ἀναμεταξύ των, καὶ εἰς τοὺς ὁποίους ἐφαρμόζομεν τὰς ἄνω εἰρημένας πράξεις, πρέπει ἐξ ἀνάγκης νὰ εὕρωμεν τὸ τελευταῖον ὑπόλοιπον ἴσον μὲ τὴν μονάδα· ἐπειδὴ ἐκ τῆς φύσεως τῶν πράξεων τὰ ὑπόλοιπα πηγαίνουν ἐλαττούμενα· προσέτι δὲν δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἓν ὑπόλοιπον ἴσον μὲ τὸ μηδὲν, προτοῦ νὰ ἀπαντήσωμεν ἓν ὑπόλοιπον ἴσον μὲ τὸ 1· ἐπειδὴ ὁ διαιρέτης ὁ διαφορετικὸς ἀπὸ τὴν μονάδα, ὅς τις ἤθελε δώσει ὑπόλοιπον μηδὲν, ἤθελεν εἶναι κοινὸς διαιρέτης τῶν δύο δεδομένων ἀριθμῶν· διὰ τοῦτο ἀναγκαίως πρέπει, ἐὰν ἐκτελέσωμεν ἕνα ἀριθμὸν πράξεων, νὰ εὕρωμεν τὴν μονάδα διὰ ὑπόλοιπον.

§. 50. Ἰδοὺ καὶ ἄλλαι ἐφαρμογαὶ τῆς ἰδίας μεθόδου.

Νὰ ἀνάξωμεν εἰς τὴν ἁπλουστέραν ἔκφρασιν τὸ κλάσμα $\frac{592}{999}$.

Ἂς ἐφαρμόσωμεν τὴν μέθοδον τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου εἰς τοὺς δύο ἀριθμοὺς 999 καὶ 592. Ἀφ' οὗ εὕρωμεν τὸν μεγαλήτερον ἀριθμὸν, ὅς τις νὰ διαιρῇ εἰς τὸν αὐτὸν καιρὸν τοὺς δύο ὅρους του, ἡμεῖς ἐκτελοῦμεν διὰ τούτου τοῦ ἀριθμοῦ, καὶ οὕτω συνάγομεν τὸ ζητούμενον κλάσμα.

	1	1	2	5
999	592	407	185	37
407	185	37	00	

999	37
259	27
0	

592	37
222	16
00	

Εὑρίσκομεν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην 37. Οὕτως διαιροῦντες 999 καὶ 592 διὰ 37 συνάγομεν $\frac{16}{27}$ διὰ

τὴν τιμὴν τοῦ $\frac{592}{999}$, ἠγμένον εἰς τοὺς μικροτέρους του ὅρους.

Ἔστω διὰ νέον παράδειγμα τὸ κλάσμα $\frac{912}{3072}$.

	3	2	1	2	2
3072	912	336	240	96	48
336	240	96	48	0	

3072	48
192	64
0	

912	48
432	19
0	

Ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης εἶναι ἐδῶ 48, καὶ διαιροῦντες τοὺς δύο ὅρους τοῦ κλάσματος διὰ 48 εὑρίσκομεν $\frac{19}{64}$ τὸ ἠγμένον κλάσμα.

§. 51. Ἔστω διὰ τελευταῖον παράδειγμα τὸ $\frac{317}{873}$ κλάσμα.

	2	1	3	15	1	1	2
873	317	239	78	5	3	2	1
239	78	5	28	2	1	0	
			3				

Ἡ μέθοδος μᾶς ἄγει εἰς τοῦτο τὸ παράδειγμα εἰς ἓν ὑπόλοιπον ἴσον μὲ 1, τοῦτο φανερόνει, ὅτι 873 καὶ 317 εἶναι ἀριθμοὶ πρῶτοι αναμεταξύ των. Εἰς ταύτην τὴν περίστασιν τὸ κλάσμα $\frac{317}{873}$ καλεῖται ἀνάγωγον, ἐπειδὴ δὲν ἄγεται εἰς ἁπλουστέραν τινὰ ἔκ-

φρασιν διὰ τῆς διαιρέσεως τῶν δύο του ὅρων δι᾽ ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ.

Παρατήρησις. Εἰς τὴν τρίτην πρᾶξιν εὑρήκαμεν τὸ ὑπόλοιπον 5, ὅς τις εἶναι ἕνας πρῶτος ἀριθμὸς (ἀριθμ. 48). Τώρα ἐπειδὴ 5 δὲν διαιρεῖ τὸ πρὸ αὐτοῦ 78, δυνάμεθα, χωρὶς νὰ ἦναι ἀνάγκη νὰ προχωρήσωμεν, νὰ συμπεράνωμεν, ὅτι οἱ δύο δεδομένοι ἀριθμοὶ εἶναι πρῶτοι ἀναμεταξύ των. Τῷ ὄντι ἐγνωρίσαμεν εἰς τὴν ἀπόδειξιν τῆς μεθόδου, ὅτι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης δύο ἀριθμῶν διαιρεῖ ἀναγκαίως τὸ ὑπόλοιπον ἑκάστης διαιρέσεως· οὕτως 5 ὄντος ἀριθμοῦ πρώτου, δύο μόνον περιστάσεις δύνανται νὰ ἀκολουθήσωσιν, ἢ τὸ 5 διαιρεῖ τὸ πρὸ αὐτοῦ ὑπόλοιπον, καὶ τότε ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης εἶναι τὸ 5, ἢ δὲν τὸ διαιρεῖ, καὶ εἰς ταύτην τὴν περίστασιν δὲν ὑπάρχει ἄλλος κοινὸς διαιρέτης ἀναμεταξύ των παρὰ ἡ μονάς.

Ἐν γένει, ὅταν φθάσωμεν εἰς τὸν δρόμον τῶν πράξεων, εἰς ἀριθμὸν, τὸν ὁποῖον γνωρίζομεν, ὅτι εἶναι πρῶτος, καὶ μὴ διαιροῦντα τὸ πρὸ αὐτοῦ ὑπόλοιπον, εἶναι βέβαιον, ὅτι οἱ δύο δεδομένοι ἀριθμοὶ εἶναι πρῶτοι ἀναμεταξύ των, καὶ εἶναι ἀνωφελὲς νὰ προχωρήσωμεν εἰς τὴν πρᾶξιν.

Ἡμεῖς πάλιν θέλομεν ἀναφέρει τὴν πρᾶξιν τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου (κεφ. ε^{ον}), ἥτις εἶναι μία ἀπὸ τὰς πλέον ἀξιολόγους ἐργασίας τῆς ἀριθμητικῆς.

Ἄς περάσωμεν κατὰ τὸ παρὸν εἰς τὰς τέσσαρας θεμελιώδεις ἐργασίας τῶν κλασμάτων.

Περὶ προσθέσεως τῶν κλασμάτων.

§. 52. Ὁ σκοπὸς τῆς ἀθροίσεως τῶν κλασμάτων εἶναι ὁ αὐτὸς. ὡς ἐκεῖνος τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν,

τούτέστι νὰ εὕρωμεν ἕνα μόνον, ἔχοντα τὴν αὐτὴν τιμὴν μὲ τὰ προσθετέα κλάσματα.

Δύο περιστάσεις δύνανται νὰ παῤῥησιασθῶσιν, ἢ τὰ κλάσματα, τὰ ὁποῖα πρέπει νὰ προσθέσωμεν, εἶναι ὁμοειδῆ, τουτέστιν ἔχουσι τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν, ἢ ἑτεροειδῆ, τουτέστιν ἔχουν παρονομαστὴν διαφορετικόν· εἰς τὴν πρώτην περίστασιν ἐκτελοῦμεν τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμητῶν, μετὰ ταῦτα δίδομεν εἰς αὐτὸ τὸ ἄθροισμα τὸν κοινὸν παρονομαστήν.

Εἰς τὴν δευτέραν περίστασιν πρότερον τὰ ἄγομεν εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν κατὰ τὸν κανόνα τοῦ ἀριθμ. 43, καὶ ὕστερον πράττομεν ἐπὶ τῶν νέων κλασμάτων, ὡς ἀνωτέρω εἴπομεν.

Οὕτως τὸ ἄθροισμα τῶν κλασμάτων $\frac{2}{11}$, πλέον $\frac{3}{11}$, πλέον $\frac{4}{11}$ εἶναι ἴσον μὲ $\frac{9}{11}$. Παρομοίως τὸ ἄθροισμα τῶν κλασμάτων $\frac{5}{23}$, $\frac{2}{25}$, $\frac{7}{23}$, $\frac{4}{23}$ εἶναι ἴσον μὲ $\frac{18}{23}$.

Προστεθήτωσαν ἤδη τὰ τρία

κλάσματα· $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{8}$

32, 24, 12

$\frac{64}{96}$, $\frac{72}{96}$, $\frac{84}{96}$

Ἀφ' οὗ ἄξωμεν τὰ τοιαῦτα κλάσματα εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν κατὰ τὸν κανόνα τοῦ (ἀριθμ. 43) κάμνομεν τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμητῶν, τὸ ὁποῖον εἶ-

ναι 220· περιπλέον δίδομεν εἰς τὸ 220 τὸν παρονομαστὴν 96, καὶ οὕτως ἔχομεν $\frac{220}{46}$ διὰ τὸ ζητούμενον κεφάλαιον.

§. 53. Τὸ τελευταῖον τοῦτο παράδειγμα μᾶς ἄγει εἰς ἓν ἐξαγόμενον, τὸ ὁποῖον ἔχει ἀνάγκην νὰ ἐξηγηθῇ.

Καθὼς εἶναι ἀνάγκη ἀπὸ δύο μισὰ, τρία τρίτα, τέσσαρα τέταρτα, πέντε πέμπτα, διὰ νὰ σχηματίσωμεν τὴν μονάδα, οὕτω πρέπει διὰ νὰ σχηματίσωμεν τὴν μονάδα νὰ ἔχωμεν ἐννενήκοντα ἓξ ἐννενηκοστὰ ἕκτα· λοιπὸν ὅσαις φοραῖς 220 περιέχει 96, τόσαι μονάδες ἀκέραιοι εὑρίσκονται εἰς τὸ $\frac{220}{96}$· καὶ ἐπειδὴ διαιροῦντες 220 διὰ 96 συνάγομεν διὰ πηλίκον 2, καὶ διὰ ὑπόλοιπον 28, ἕπεται ἐκ τούτου, ὅτι $\frac{220}{96}$ εἶναι ἕνας ἀριθμὸς κλασματικὸς σύνθετος ἀπὸ δύο μονάδας, πλέον τὸ κλάσμα $\frac{28}{96}$, ἢ $\frac{7}{24}$ (ἐξαλειφομένου τοῦ παράγοντος 4 ἀπὸ τοὺς δύο ὅρους).

Ἐν γένει ὁσάκις εὕρωμεν ἐξαγόμενον κλασματικὸν, τοιοῦτον, ὥστε ὁ ἀριθμητὴς νὰ εἶναι μεγαλήτερος τοῦ παρονομαστοῦ, διὰ νὰ ἐξάξωμεν τὰς ἀκεραίας μονάδας, τὰς περιεχομένας εἰς ταύτην τὴν ἔκφρασιν διαιροῦμεν τὸν ἀριθμητὴν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ, καὶ τὸ πηλίκον ἐκφράζει τὸ ἀκέραιον, καὶ τὸ ὑπόλοιπον εἶναι ὁ ἀριθμητὴς τοῦ κλάσματος, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ ἑνωθῇ μὲ τὸν ἀκέραιον ἀριθμόν.

Εὑρίσκομεν διὰ τούτου τοῦ μέσου $\frac{17}{12}$ ἴσον μὲ

$1\frac{5}{12}$, $\frac{153}{15}$ ἴσον μὲ $10\frac{3}{15}$ ἢ 10 καὶ $\frac{1}{5}$. $\frac{954}{89}$ εἶναι ἴσον μὲ 7 καὶ $\frac{31}{89}$.

Καὶ ἀντιστρόφως, ὅταν ἔχωμεν ἕνα ἀκέραιον ἀριθμὸν ἡνωμένον μὲ ἓν κλάσμα, διὰ νὰ σχηματίσωμεν ἕνα ἀριθμὸν κλασματικὸν, τὸ ὁποῖον εἶναι πολλάκις ὠφέλιμον, πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀκέραιον ἀριθμὸν ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν τοῦ κλάσματος, καὶ προσθέτομεν εἰς τὸ γινόμενον τὸν ἀριθμητήν του, καὶ δίδομεν εἰς τὸ κεφάλαιον τὸν παρονομαστὴν τοῦ προτεθέντος κλάσματος.

Π. χ. 3 καὶ $\frac{2}{5}$ ἀνάγεται εἰς $\frac{15}{5}$ πλέον $\frac{2}{5}$, ἢ $\frac{17}{5}$.

11 καὶ $\frac{7}{12}$ εἶναι ἴσον $\frac{11 \text{ φοραῖς } 12}{12}$ πλέον $\frac{7}{12}$ ἢ $\frac{139}{12}$.

8 καὶ $\frac{17}{24}$ εἶναι ἴσον μὲ $\frac{209}{24}$.

Περὶ Ἀφαιρέσεως τῶν Κλασμάτων.

§. 54. Ἡ ἀφαίρεσις τῶν κλασμάτων ἔχει διὰ σκοπὸν νὰ εὕρῃ τὴν ὑπεροχὴν ἑνὸς μεγαλητέρου κλάσματος ἐπὶ ἑνὸς μικροτέρου

Ἐὰν τὰ δύο κλάσματα ἔχωσι τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν, ἀφαιροῦμεν τοὺς δύο ἀριθμητὰς, τὸν ἕνα ἀπὸ τὸν ἄλλον, καὶ δίδομεν εἰς τὴν διαφορὰν τὸν κοινὸν παρονομαστήν.

Ἐὰν δὲν ἔχωσι τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν, τὰ ἄγομεν, καὶ μετὰ ταῦτα ἐργαζόμεθα, ὡς εἴπομεν.

Οὕτως ἀπὸ $\frac{11}{12}$ νὰ ἀφαιρέσωμεν $\frac{5}{12}$, τὸ ὑπόλοι-

που εἶναι $\frac{6}{12}$, ἢ $\frac{1}{2}$. Παρομοίως ἀπὸ $\frac{17}{24}$ νὰ ἀφαιρέσωμεν $\frac{7}{24}$, μένουν $\frac{10}{24}$ ἢ $\frac{5}{12}$.

Ἔστω τώρα νὰ ἀφαιρέσωμεν $\frac{2}{3}$ ἀπὸ $\frac{7}{8}$.

Τὰ τοιαῦτα δύο κλάσματα ἄγομεν εἰς $\frac{16}{24}$ καὶ $\frac{21}{24}$, καὶ δίδουσι $\frac{5}{24}$ διὰ διαφοράν των. Εὑρίσκομεν παρομοίως, ὅτι ἐὰν ἀπὸ τὸ κλάσμα $\frac{19}{20}$ ἀφαιρέσωμεν $\frac{13}{17}$, μένει $\frac{63}{340}$.

Δυνατὸν εἶναι νὰ ἔχωμεν ἀκέραιον ἡνωμένον μὲ κλάσμα, νὰ τὸ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ ἀκέραιον ἡνωμένον μὲ κλάσμα.

Π. χ. ἀπὸ τὸν κλασματικὸν

ἀριθμὸν $13\frac{3}{4} \ldots \frac{39}{52} \ldots \frac{91}{52}$

νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸν ἀριθμὸν $5\frac{11}{13} \ldots \frac{44}{52}$

$7\frac{47}{52}$

Διὰ νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν πρᾶξιν ἀρχίζομεν νὰ ἄξωμεν τὰ κλάσματα εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν, καὶ οὕτως ἔχομεν $\frac{39}{52}$ διὰ τὸ πρῶτον, καὶ $\frac{44}{52}$ διὰ τὸ δεύτερον. Μετὰ ταῦτα μὴ δυνάμενοι νὰ ἀφαιρέσω-

μεν $\frac{44}{52}$ ἀπὸ $\frac{39}{52}$ δανειζόμεθα ἀπὸ τὸν ἀκέραιον 13 τοῦ ἀνωτέρου ἀριθμοῦ μίαν μονάδα, τὴν ὁποίαν ἄγομεν ὁμοῦ μὲ τὸ $\frac{39}{52}$ εἰς ἕνα μόνον κλασματικὸν ἀριθμὸν, καὶ συνάγομεν $\frac{91}{52}$, ἐκ τοῦ ὁποίου ἀφαιροῦντες $\frac{44}{52}$ ἔχομεν $\frac{47}{52}$. Ἂς ἔλθωμεν τώρα εἰς τὴν ἀφαίρεσιν τῶν ἀκεραίων. Θεωροῦμεν 13 ἐλαττούμενον ἀπὸ μίαν μονάδα, ἐξαιτίας ἐκείνης τὴν ὁποίαν ἐδανείσθημεν, καὶ λέγομεν 5 ἀπὸ 12 μένει 7. Λοιπὸν τὸ ζητούμενον ἐξαγόμενον εἶναι 7 καὶ $\frac{47}{52}$, ὡς ἀνωτέρω φαίνεται.

§. 55. Ἰδοὺ ζήτημά τι, εἰς τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται ἑνωμένη ἡ πρόσθεσις καὶ ἡ ἀφαίρεσις τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν ἡνωμένων μὲ κλάσματα.

Εἷς ἔμπορος ὑφασμάτων ἐπώλησε διὰ πωλητοῦ εἰς διαφόρους φοραῖς ἓν τμῆμα ὑφάσματος, τὸ ὁποῖον περιεῖχε πήχας 30 καὶ $\frac{7}{8}$, τουτέστιν ἐπώλησε 7 καὶ $\frac{3}{4}$, 9 καὶ $\frac{2}{3}$, 11 καὶ $\frac{5}{12}$, ἐπιθυμεῖ νὰ μάθῃ τί τοῦ ἔμεινεν ἀπὸ τὸ ὕφασμα, διὰ νὰ βεβαιωθῇ ἐὰν ὁ πωλητής του ἦτον πιστός.

Πρέπει κατὰ πρῶτον νὰ γίνῃ τὸ ἄθροισμα τῶν ὅσων πηχῶν ἐπωλήθησαν, καὶ μετὰ ταῦτα νὰ ἀφαιρεθῇ τὸ τοιοῦτον ἄθροισμα ἀπὸ 30 καὶ $\frac{7}{8}$, καὶ τὸ ἐξαγόμενον ταύτης τῆς ἀφαιρέσεως πρέπει νὰ ἐκφράζῃ τὸ μῆκος τοῦ ὑφάσματος, τὸ ὁποῖον ἔμεινε.

Διὰ περισσοτέραν εὐκολίαν πρέπει νὰ ἐκθέσωμεν, ὡς ἐδῶ ἀκολουθεῖ, τὰς πράξεις.

	12		π.	
$7\frac{3}{4}$		9	$30\frac{7}{8}$	$\frac{21}{24}$
$9\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	8	$28\frac{10}{12}$	$\frac{20}{24}$
$11\frac{5}{12}$	1	$\frac{5}{22}$	$2\frac{1}{14}$	
$28\frac{10}{12}$				

Ἀφ' οὗ θέσωμεν ὑπ' ἀλλήλους τοὺς τρεῖς προσθετέους ἀριθμοὺς, παρατηροῦμεν, ὅτι τὰ κλάσματα αὐτῶν τῶν ἀριθμῶν δύνανται νὰ ἀχθῶσιν εἰς παρονομαστὴν 12, θέτομεν αὐτὸν τὸν ἀριθμὸν εἰς τὰ δεξιὰ, ὀλίγον τι παράνω τῶν κλασμάτων, καὶ ὑπογραμμίζομεν· μετὰ ταῦτα γράφομεν ὑπὸ τὸν 12, καὶ ἀμοιβαίως ὑπὸ τῆς ἰδίας ὁριζοντίου γραμμῆς τριῶν κλασμάτων τὰ πηλίκα 3, 4 καὶ 1 ἐξαγόμενα ἐκ τῆς διαιρέσεως τοῦ 12 διὰ τῶν τριῶν παρονομαστῶν, μετὰ ταῦτα πολλαπλασιάζομεν μόνον τοὺς ἀριθμητὰς τῶν τοιούτων κλασμάτων διὰ 3, 4 καὶ 1, καὶ συνάγομεν 9, 8 καὶ 5, καὶ μετὰ ταῦτα κάμνομεν τὸ ἄθροισμα 22 τῶν τριῶν νέων ἀριθμητῶν, ὥστε θέλομεν ἔχει διὰ ἄθροισμα τῶν τριῶν κλασμάτων $\frac{22}{12}$ ἢ 1 καὶ $\frac{10}{12}$, γράφομεν $\frac{10}{12}$ ὑπὸ τῶν τριῶν κλασμάτων, καὶ κρατοῦμεν ἓν διὰ νὰ τὸ φέρωμεν εἰς τὴν στήλην τῶν ἀκεραίων μονάδων, τὰς ὁποίας ἑνόνομεν κατὰ τὸν

σύνηθη τρόπον, καὶ τότε ἔχομεν 28 καὶ $\frac{10}{12}$ διὰ τὸ κεφάλαιον τῶν τριῶν ἀριθμῶν τῶν πηχῶν, τὰς ὁποίας ἐπώλησε.

Γράφομεν αὐτὸ τὸ ἄθροισμα ὑπὸ τὸν 30 καὶ $\frac{7}{8}$, καὶ ἐκτελοῦμεν τὴν ἀφαίρεσιν, ὡς ἀνωτέρω δέδεικται, παρατηροῦντες, ὅτι τὰ δύο κλάσματα δύνανται νὰ φερθῶσιν εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν διὰ 2 φοραῖς 12 ἢ 24.

Εὑρίσκομεν τέλος πάντων 2 καὶ $\frac{1}{24}$ ὑπόλοιπον τοῦ ὑφάσματος, τὸ ὁποῖον μὲ εὐκολίαν ὁ ἔμπορος δύναται νὰ βεβαιωθῇ, μετρῶν τὸ τμῆμα τὸ ἀποτελούμενον ἀπὸ τὰς τρεῖς πωλήσεις.

Περὶ Πολλαπλασιασμοῦ τῶν κλασμάτων.

§. 56. Ὁ πολλαπλασιασμὸς ἔχει ἐν γένει σκοπὸν (ἀρ. 9), δεδομένων δύο ἀριθμῶν, νὰ συνθέσῃ ἕνα τρίτον ἀριθμὸν μὲ τὸν πρῶτον, κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, καθ' ὃν ὁ δεύτερος σύγκειται ἐκ τῆς μονάδος.

Τούτου τεθέντος, παρατηροῦμεν πολλὰς περιστάσεις εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν τῶν κλασμάτων. Δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν·

αον Ἓν κλάσμα νὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ ἕνα ἀκέραιον ἀριθμόν. Ἔστω π. χ. $\frac{7}{12}$ νὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 5.

Κατὰ τὸν προειρημένον ὁρισμὸν, ἐπειδὴ ὁ πολλαπλασιαστὴς 5 περιέχει 5 φοραῖς τὴν μονάδα, ἔπε-

-ται ὅτι τὸ γινόμενον πρέπει νὰ εἶναι μὲ 5 φοραῖς τὰ $\frac{7}{12}$, ἢ πρέπει νὰ εἶναι 5 φοραῖς μεγαλήτερον τῶν $\frac{7}{12}$. Ἀλλ' εἴδομεν (εἰς τὸν ἀριθμ. 42) ὅτι καθασταίνομεν ἓν κλάσμα 5 φοραῖς μεγαλήτερον, πολλαπλασιάζοντες τὸν ἀριθμητὴν ἐπὶ 5, καὶ οὕτως γίνεται $\frac{5 \text{ φοραῖς } 7}{12}$ ἢ $\frac{35}{12}$ τὸ ζητούμενον γινόμενον.

Λοιπὸν διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἓν κλάσμα ἐπὶ ἀκέραιον τινὰ ἀριθμὸν, πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμητὴν ἐπὶ τὸν ἀκέραιον, καὶ νὰ δώσωμεν εἰς τὸ γινόμενον τὸν παρονομαστὴν τοῦ κλάσματος.

Τὸ γινόμενον $\frac{35}{12}$ τρέπεται εἰς 2 καὶ $\frac{11}{12}$, ὅταν ἐξάξωμεν τὰ ἀκέραια, τὰ ὁποῖα περιέχει τὸ κλάσμα (ἀριθμ. 53).

Εὑρίσκομεν παρομοίως, ὅτι τὸ γινόμενον τοῦ $\frac{13}{24}$ ἐπὶ 29 εἶναι ἴσον μὲ $\frac{377}{24}$ ἢ $15\frac{17}{24}$.

Ἔστω προσέτι νὰ πολλαπλασιασθῇ $\frac{11}{18}$ ἐπὶ 9, κατὰ πρῶτον προκύπτει, κατὰ τὸν κανόνα $\frac{99}{18}$ διὰ τὸ γινόμενον, ἢ ἐὰν ἐξάξωμεν τὰ ἀκέραια, $5\frac{9}{18}$, δηλαδὴ $5\frac{1}{2}$.

Τὸ ἀποτέλεσμα τοῦτο ἐσυνάγετο πλέον ἁπλούστερα· ἐπειδὴ νὰ πολλαπλασιάσωμεν $\frac{11}{18}$ ἐπὶ 9, δυ-

νάμεθα (ἀριθμ. 24) ἀντὶ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμητὴν διὰ 9, νὰ διαιρέσωμεν τὸν παρονομαστὴν διὰ τοῦ 9, ἡ ὁποία πρᾶξις ἤθελε μᾶς δώσει $\frac{11}{2}$, ἢ 5 καὶ $\frac{1}{2}$.

Ἡ τελευταία αὕτη πρᾶξις ἐφαρμόζεται εἰς τὸ προτεθὲν παράδειγμα· ἐπειδὴ ὁ παρονομαστὴς διαιρεῖται ἐντελῶς διὰ τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, τὸ ὁποῖον δὲν ἀκολουθεῖ πάντοτε, ἐν ᾧ ὁ συσταθεὶς κανὼν πάντοτε ἐφαρμόζεται εἰς πράξεις· τοῦτο εἶναι μία συντομία, τὴν ὁποίαν λαμβάνομεν ἀπὸ τὴν μεγάλην γύμνασιν.

$\overline{\beta}^{ον}$ Εἷς ἀκέραιος ἀριθμὸς νὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ ἓν κλάσμα. Ἔστω νὰ πολλαπλασιασθῇ 12 ἐπὶ $\frac{4}{7}$.

Ἐπειδὴ εἰς ταύτην τὴν περίστασιν ὁ πολλαπλασιαστὴς $\frac{4}{7}$. εἶναι ἴσος μὲ 4 φοραῖς $\frac{1}{7}$ τῆς μονάδος, τὸ γινόμενον πρέπει νὰ εἶναι καὶ αὐτὸ 4 φοραῖς $\frac{1}{7}$ τοῦ 12· τώρα τὸ ἕβδομον τοῦ 12 καταντᾷ (ἀριθμ. 41) εἰς $\frac{12}{7}$, καὶ διὰ νὰ λάβωμεν αὐτὸν τὸν ἀριθμὸν 4 φοραῖς, ἢ διὰ νὰ λάβωμεν ἕνα ἀριθμὸν 4 φοραῖς μεγαλήτερον ἀπὸ $\frac{12}{7}$, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμητὴν ἐπὶ 4· ὅθεν συνάγομεν $\frac{48}{7}$ ἢ 6 $\frac{6}{7}$ διὰ τὸ ζητούμενον γινόμενον.

Λοιπὸν διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἕνα ἀκέραιον ἀριθμὸν ἐπὶ ἓν κλάσμα, πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀκέραιον ἀριθμὸν διὰ τοῦ ἀριθμητοῦ, καὶ νὰ δώσωμεν εἰς τὸ γινόμενον τὸν παρονομαστὴν τοῦ κλάσματος, καὶ μετὰ ταῦτα νὰ ἐξάξωμεν τὰς ἀκεραίας μονάδας, ἐὰν τὸ τοιοῦτον γινόμενον περιέχῃ.

Οὕτως τὸ γινόμενον τοῦ 29 ἐπὶ $\frac{7}{8}$ εἶναι ἴσον μὲ $\frac{203}{8}$, ἢ 25 $\frac{3}{8}$. Παρομοίως τὸ γινόμενον τοῦ 24 ἐπὶ $\frac{5}{6}$, εἶναι ἴσον μὲ $\frac{120}{6}$, ἢ 20, ἐξαγόμενον, τὸ ὁποῖον δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν διαιροῦντες κατὰ πρῶτον τὸ 24 διὰ 6, τὸ ὁποῖον ἤθελε προκύψει 4, καὶ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο ἐπὶ 5, ἀλλὰ λέγομεν πάλιν, ὅτι αἱ ἁπλότητας αὗται δὲν εἶναι πάντοτε δυναταί.

$\overline{\gamma}^{ον}$. Ἓν κλάσμα νὰ πολλαπλασθῇ ἐπὶ ἄλλο τι κλάσμα.

Ἔστω νὰ πολλαπλασιασθῇ $\frac{3}{4}$ ἐπὶ $\frac{5}{8}$.

Ὁ συλλογισμὸς εἶναι ἀνάλογος μὲ ἐκεῖνον τῆς ἄνω περιστάσεως. Ἐπειδὴ ὁ πολλαπλασιαστὴς $\frac{5}{8}$ εἶναι ἴσος μὲ 5 φοραῖς $\frac{1}{8}$ τῆς μονάδος, τὸ γινομενον πρέπει λοιπὸν νὰ εἶναι καὶ αὐτὸ 5 φοραῖς $\frac{1}{8}$ τοῦ πολλαπλασιαστέου $\frac{3}{4}$· τώρα διὰ νὰ λάβωμεν τὸ ὄγδοον μέρος τῶν $\frac{3}{4}$ πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν παρονο-

μαστὴν ἐπὶ 8 (ἀριθμ. 42), τὸ ὁποῖον δίδει $\frac{3}{32}$, καὶ διὰ νὰ λάβωμεν ἓν κλάσμα 5 φοραῖς μεγαλήτερον τοῦ $\frac{3}{32}$, πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμητὴν ἐπὶ 5, τὸ ὁποῖον θέλει μᾶς προκύψει $\frac{15}{32}$, διὰ τὸ . . . . ζητούμενον γινόμενον.

Λοιπὸν διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἓν κλάσμα ἐπὶ ἄλλο τι κλάσμα, πολλαπλασιάζομεν ἀριθμητὴν ἐπὶ ἀριθμητὴν, καὶ παρονομαστὴν ἐπὶ παρονομαστὴν, μετὰ ταῦτα εἰς τὸ πρῶτον γινόμενον δίδομεν παρονομαστὴν τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν.

Οὕτως τὸ γινόμενον τοῦ $\frac{7}{12}$ ἐπὶ $\frac{5}{6}$ εἶναι ἴσον μὲ $\frac{35}{72}$. Παρομοίως τὸ γινόμενον τῶν $\frac{8}{15}$ ἐπὶ $\frac{3}{4}$ εἶναι ἴσον μὲ $\frac{24}{60}$, ἢ μετὰ τὴν ἀναγωγὴν $\frac{2}{5}$.

§. 57. Σ. Κ. Εἰς τὰ δύο ἀνωτέρω παραδείγματα, τὸ γινόμενον εἶναι πάντοτε μικρότερον τοῦ πολλαπλασιαστέου, καὶ οὕτως πρέπει νὰ εἶναι, ἐπειδὴ ἡ πρᾶξις ἄλλο δὲν εἶναι, παρὰ τὸ νὰ λάβωμεν ἀπὸ τὸν πολλαπλασιαστέον ἓν μέρος σημειωμένον ἀπὸ τὸν παράγοντα πολλαπλασιαστήν.

§. 58. Τέλος πάντων εἷς τῶν δύο παραγόντων τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, ἢ καὶ οἱ δύο δύνανται νὰ εἶναι ἀκέραιοι ἑνωμένοι μὲ κλάσματα, ἀλλ' ἄγομεν αὐτὴν τὴν περίστασιν εἰς τὴν ἀνωτέρω.

Ἔστω π. χ. νὰ πολλαπλασιάσωμεν $7\ \frac{2}{3}$ ἐπὶ $5\ \frac{7}{58}$.

Οἱ τοιοῦτοι ἀριθμοὶ (ἀριθμ. 53) ἀνάγονται εἰς $\frac{23}{3}$ καὶ $\frac{47}{8}$, καὶ ἐκτελοῦντες τὸν πολλαπλασιασμὸν, κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα, συνάγομεν διὰ γινόμενον $\frac{1081}{24}$, ἢ ἐξαγομένων τῶν ἀκεραίων 45 καὶ $\frac{1}{24}$.

Ἠδυνάμεθα ἀκόμη νὰ ἐκτελέσωμεν τὸν πολλαπλασιασμὸν κατὰ μέρος, τουτέστι νὰ πολλαπλασιάσωμεν κατὰ πρῶτον 7 ἐπὶ 5, $\frac{2}{3}$ ἐπὶ 5, 7 ἐπὶ $\frac{7}{8}$ καὶ $\frac{2}{7}$ ἐπὶ $\frac{7}{8}$, μετὰ ταῦτα νὰ ἑνώσωμεν τὰ τοιαῦτα τέσσαρα γινόμενα, ἀλλὰ ἡ τοιαύτη πρᾶξις εἶναι ἐπίπονος καὶ μακρά.

Περὶ Διαιρέσεως τῶν κλασμάτων.

§. 59. Τὸ νὰ διαιρέσωμεν ἀριθμὸν δι᾽ ἄλλου συνίσταται (ἀριθμ. 9), εἰς τὸ νὰ εὕρωμεν ἕνα τρίτον ἀριθμὸν, ὅς τις πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν δεύτερον νὰ προκύψῃ τὸν πρῶτον.

Ἕπεται ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τούτου καὶ ἀπὸ ἐκεῖνον τοῦ πολλαπλασιασμοῦ (ἀριθμ. 56), ὅτι ὁ πρῶτος ἀριθμὸς καλούμενος διαιρετέος, συντίθεται ἐκ τοῦ τρίτου, ὅς τις καλεῖται πηλίκον, κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, μὲ τὸν ὁποῖον ὁ δεύτερος, καλούμενος διαιρέτης, συντίθεται ἐκ τῆς μονάδος.

Τούτου τεθέντος εἰς τὴν διαίρεσιν, καθὼς καὶ εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν τῶν κλασμάτων, παριστάνονται τρεῖς ἀρχικαὶ περιστάσεις. Δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν

α^{ον} Νὰ διαιρέσωμεν ἓν κλάσμα δι' ἑνὸς ἀκεραίου, π. χ. τὸ κλάσμα $\frac{5}{7}$ νὰ διαιρεθῇ διὰ τοῦ 6.

Ἐπειδὴ ὁ διαιρέτης 6 εἶναι ἴσος μὲ 6 φοραῖς τὴν μονάδα, ἕπεται ὅτι ὁ διαιρετέος $\frac{5}{7}$ πρέπει νὰ εἶναι ἴσος μὲ 6 φοραῖς τὸ ζητούμενον πηλίκον, ἢ τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ αὐτὸ, τὸ πηλίκον πρέπει νὰ εἶναι τὸ ἕκτον μέρος τῶν $\frac{5}{7}$. Τώρα διὰ νὰ λάβωμεν τὸ ἕκτον ἑνὸς κλάσματος, ἢ διὰ νὰ εὕρωμεν ἓν κλάσμα 6 φοραῖς μικρότερον, πρέπει (ἀριθμ. 42) νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν παρονομαστὴν ἐπὶ 6, οὕτως συνάγομεν $\frac{5}{6 \text{ φοραῖς } 7}$, ἢ $\frac{5}{42}$ διὰ τὸ ζητούμενον πηλίκον.

Κανὼν Γενικός. Διὰ νὰ διαιρέσωμεν κλάσμα δι' ἀκεραίου, πολλαπλασιάζομεν τὸν παρονομαστὴν τοῦ κλάσματος ἐπὶ τὸν ἀκέραιον, καὶ παραιτοῦμεν, ὡς ὑπάρχει, τὸν ἀριθμητήν.

Οὕτω $\frac{11}{12}$ διαιρεθὲν διὰ 8 δίδει $\frac{11}{96}$ πηλίκον· $\frac{23}{30}$ νὰ διαιρεθῇ διὰ 12 δίδει $\frac{23}{360}$.

Τὸ πηλίκον τοῦ $\frac{18}{25}$ διὰ 6 εἶναι $\frac{18}{150}$, ἀλλὰ δυνάμεθα προσέτι νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν τοῦ $\frac{18}{25}$ διὰ τοῦ 6, λαμβάνοντες τὸ ἕκτον τοῦ ἀριθμητοῦ; ὅθεν προκύπτει $\frac{3}{25}$, ἐξαγόμενον, εἰς τὸ ὁποῖον ἄγε-

ται καὶ τὸ $\frac{18}{150}$, ἐξαλειφομένου τοῦ παράγοντος 6 κοινοῦ εἰς τοὺς δύο ὅρους.

β^{ον}. Νὰ διαιρέσωμεν ἀκέραιον δι' ἑνὸς κλάσματος.

Ἔστω νὰ διαιρεθῇ τὸ 12 διὰ $\frac{7}{9}$.

Ἐπειδὴ ὁ διαιρέτης $\frac{7}{9}$ εἶναι ἴσος μὲ 7 φοραῖς τὸ 9^{ον} τῆς μονάδος, συνάγομεν, ὅτι ὁ διαιρετέος 12 εἶναι ἴσος μὲ 7 φοραῖς τὸ 9^{ον} τοῦ ζητουμένου πηλίκου. Λοιπὸν λαμβάνοντες τὸ 7^{ον} τοῦ 12, τὸ ὁποῖον δίδει $\frac{12}{7}$, θέλομεν ἔχει τὸ 9^{ον} τοῦ ζητουμένου πηλίκου· καὶ διὰ νὰ προσδιορίσωμεν τὸ ζητούμενον πηλίκον, ἀρκεῖ νὰ λάβωμεν $\frac{12}{7}$, 9 φοραῖς, τὸ ὁποῖον ἐκτελοῦμεν πολλαπλασιάζοντες τὸν ἀριθμητὴν ἐπὶ 9, καὶ ἐκ τούτου συνάγομεν $\frac{9 \text{ φοραῖς } 12}{7}$ ἢ $\frac{128}{7}$, ἢ ἐξάγοντες τὰς ἀκεραίας μονάδας, 15 καὶ $\frac{3}{7}$.

Λοιπὸν διὰ νὰ διαιρέσωμεν ἕνα ἀκέραιον ἀριθμὸν δι' ἑνὸς κλάσματις, πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀκέραιον διὰ τοῦ παρονομαστοῦ, νὰ διαιρέσωμεν τὸ γινόμενον διὰ τοῦ ἀριθμητοῦ, καὶ νὰ ἐξάξωμεν τὰς ἀκεραίας μονάδας.

Ἂς παρατηρήσωμεν, ὅτι, ἐπειδὴ πρέπει νὰ λάβωμεν τὸ 7^{ον} τοῦ 12, καὶ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸ ἐξαγόμενον ἐπὶ 9, εἶναι τὸ αὐτὸ, ὡς νὰ πολλαπλασιάσωμεν 12 ἐπὶ $\frac{9}{7}$. Οὕτως δυνάμεθα προσέτι νὰ εἴπω-

μεν, ὅτι διὰ νὰ διαιρέσωμεν ἕνα ἀκέραιον ἀριθμὸν δι' ἑνὸς κλάσματος, πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀκέραιον ἀριθμὸν ἐπὶ τὸ κλάσμα, διαιρέτην ἀντεστραμμένον.

γ^{ον}. Νὰ διαιρέσωμεν κλάσμα δι' ἄλλου κλάσματος.

Ἔστω νὰ διαιρεθῇ $\frac{3}{5}$ διὰ $\frac{8}{11}$.

Ὁ συλλογισμὸς εἶναι ὅμοιος μὲ τὸν ἀνωτέρω. Ὁ διαιρέτης $\frac{8}{11}$ μὲ τὸ νὰ εἶναι ἴσος μὲ 8 φοραῖς τὸ $\overline{11}^{ον}$ τῆς μονάδος, ὁ διαιρέτης $\frac{3}{5}$ πρέπει νὰ εἶναι ἴσος μὲ 8 φοραῖς τὸ $\overline{11}^{ον}$ τοῦ πηλίκου. Λοιπὸν τὸ $\overline{8}^{ον}$ τοῦ $\frac{3}{5}$, ἢ $\frac{3}{40}$ εἶναι τὸ $\overline{11}^{ον}$ τοῦ πηλίκου, καὶ 11 φοραῖς $\frac{3}{40}$, ἢ $\frac{33}{40}$ εἶναι τὸ ζητούμενον πηλίκον.

Λοιπὸν διὰ νὰ διαιρέσωμεν κλάσμα δι' ἄλλου κλάσματος, πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμητὴν τοῦ διαιρετέου κλάσματος διὰ τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ διαιρέτου κλάσματος, μετὰ ταῦτα τὸν παρονομαστὴν τοῦ διαιρετέου κλάσματος διὰ τοῦ ἀριθμητοῦ τοῦ διαιρέτου κλάσματος, καὶ νὰ δώσωμεν τὸ δεύτερον γινόμενον διὰ παρονομαστὴν τοῦ πρώτου, ἢ πλέον ἁπλούστερα νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸ διαιρετέον κλάσμα ἐπὶ τὸ διαιροῦν κλάσμα ἀντεστραμμένον.

Οὕτως $\frac{3}{4}$ νὰ διαρεθῇ διὰ $\frac{5}{7}$ ἄγεται εἰς $\frac{3}{4}$ νὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ $\frac{7}{5}$, καὶ δίδει διὰ ἐξαγόμενον $\frac{21}{20}$ ἢ 1 καὶ $\frac{1}{20}$.

Παρομοίως $\frac{23}{30}$ διαιρούμενον διὰ $\frac{13}{15}$ ἄγεται εἰς $\frac{23}{30}$ νὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ $\frac{15}{13}$, καὶ δίδει διὰ ἐξαγόμενον $\frac{345}{390}$, ἢ $\frac{23}{26}$, ἐπειδὴ τὸ 15 εἶναι κοινὸς παράγων τῶν δύο ὅρων.

Τέλος πάντων, ἐὰν εἴχαμεν ἀκέραιον ἑνωμένον μὲ κλάσμα νὰ διαιρεθῇ δι' ἄλλου ἀκεραίου ἑνωμένου μὲ ἄλλο κλάσμα, ἄγομεν τὰ ἀκέραια εἰς κλάσματα, καὶ ἐκτελοῦμεν, ὡς ἀνωτέρω εἴπομεν.

Ἔστω π. χ. 12 καὶ $\frac{3}{7}$ νὰ διαιρεθῇ διὰ 6 καὶ $\frac{2}{3}$.

Οὗτοι οἱ δύο ἀριθμοὶ ἄγονται εἰς $\frac{51}{4}$ καὶ $\frac{20}{3}$, εἰς τὰ ὁποῖα ἐκτελοῦντες τὴν διαίρεσιν, ὡς ἀνωτέρω, συνάγομεν πηλίκον $\frac{153}{80}$, ἢ 1 $\frac{73}{80}$. Παρομοίως 4 καὶ $\frac{7}{11}$ νὰ διαιρεθῇ διὰ 15 καὶ $\frac{5}{8}$, δίδει διὰ πηλίκον $\frac{408}{1375}$.

§. 60. Σ. Κ. Ὁσάκις εἰς τὴν διαίρεσιν ὁ διαιρέτης εἶναι ἓν κλάσμα, τὸ πηλίκον εἶναι μεγαλήτερον τοῦ διαιρετέου· ἐπειδὴ αὐτὸ τὸ πηλίκον προκύπτει ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ διαιρετέου διὰ τοῦ διαιρέτου ἀντιστρεφομένου, ὅστις οὕτως γίνεται ἕνας ἀριθμὸς μείζων τῆς μονάδος.

§. 61. Ἃς ἐφαρμόσωμεν τὴν μέθοδον τοῦ πολλαπλασιασμοῦ καὶ τῆς διαιρέσεως τῶν κλασμάτων εἴς τινα ζητήματα.

1ον. Ἡ πῆχη ἑνὸς ὑφάσματος ἔχει 47 φράγκα καὶ $\frac{2}{5}$, ζητεῖται ἡ τιμὴ τῶν 12 καὶ $\frac{7}{8}$ πηχῶν.

Ἐπειδὴ μία μόνη πῆχη ἔχει τιμὴν 47 φράγκα καὶ $\frac{2}{8}$, εἶναι φανερὸν, ὅτι 12 $\frac{7}{8}$ πῆχαι θέλουν ἔχει τιμὴν 12 φοραῖς 47 καὶ $\frac{2}{5}$ φράγκου, περιπλέον $\frac{7}{8}$ τῶν 47 καὶ $\frac{2}{5}$ τοῦ φράγκου, τουτέστι πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν 47 καὶ $\frac{2}{5}$ ἐπὶ 12 καὶ $\frac{7}{8}$, καὶ τὸ γινόμενον ἐκφράζει εἰς φράγκα τὴν ζητουμένην τιμήν.

Τώρα 47 καὶ $\frac{2}{5}$ πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ 12 $\frac{7}{8}$ τρέπεται εἰς $\frac{237}{5}$ πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ $\frac{103}{8}$, καὶ δίδει διὰ γινόμενον $\frac{24411}{40}$, ἢ ἐξαγομένων τῶν ἀκεραίων μονάδων 610 $\frac{11}{40}$· οὕτως ἡ ζητουμένη τιμὴ εἶναι 610 φρ. καὶ $\frac{11}{40}$. Διὰ νὰ κάμωμεν τὴν βάσανον, διαιροῦμεν 610 $\frac{11}{40}$ διὰ 12 καὶ $\frac{7}{8}$, καὶ πρέπει νὰ εὕρωμεν 47 καὶ $\frac{2}{5}$· ἀλλ' εἶναι πλέον ἁπλούτερον (ἀριθμ. 40) νὰ διπλασιάσωμεν 47 καὶ $\frac{2}{5}$, καὶ νὰ πάρωμεν τὸ ἥμισυ τοῦ 12 καὶ $\frac{7}{8}$· τὸ διπλοῦν τοῦ 47 $\frac{2}{5}$ εἶναι 94 $\frac{4}{5}$, τὸ ἥμισυ τοῦ 12 καὶ $\frac{7}{8}$ εἶναι 6 καὶ $\frac{7}{16}$. Τώρα 97 $\frac{4}{5}$

πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ $6\frac{7}{16}$, ἄγεται εἰς $\frac{474}{5}$ πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ $\frac{103}{16}$, καὶ δίδει γινόμενον $\frac{48822}{80}$, ἢ ἐκτελεσθείσης τῆς διαιρέσεως $610\frac{22}{80}$, ἢ ἁπλούστερα $610\frac{11}{40}$.

2ον. Εἷς ἠγόρασε 23 πῆχες καὶ $\frac{5}{12}$ ἑνὸς εἴδους ὑφάσματος μὲ χρηματικήν τινα ποσότητα ἀπὸ 745 φράγκα καὶ $\frac{13}{20}$. Ζητεῖται πόσον ἔπρεπε νὰ πληρώσῃ διὰ κάθε πῆχην τοῦ τοιούτου ὑφάσματος.

Ἀφ' οὗ γενῇ ἡ τιμὴ τῆς πήχης γνωστὴ, πολλαπλασιάζομεν αὐτὴν ἐπὶ $23\frac{5}{12}$, καὶ πρέπει νὰ εὕρωμεν 745 φρ. $\frac{13}{20}$. Λοιπὸν διὰ νὰ λάβωμεν τὴν ζητουμένην τιμὴν, πρέπει νὰ διαιρέσωμεν 745 καὶ $\frac{13}{20}$ διὰ 23 καὶ $\frac{5}{12}$.

Τώρα 745 καὶ $\frac{13}{20}$ διαιρουμένων διὰ 23 καὶ $\frac{5}{12}$ προκύπτει $\frac{14913}{20}$ διαιρεθὲν διὰ $\frac{281}{12}$, καὶ ἐξάγεται $\frac{12 \text{ φορ. } 14913}{20 \text{ φορ. } 281}$ ἢ $\frac{178956}{5620}$, καὶ ἐξαχθεισῶν τῶν ἀκεραίων μονάδων λαμβάνομεν $31\frac{4736}{5620}$.

Λοιπὸν ἡ τιμὴ τῆς πήχης εἶναι 31 φράγκα πλέον $\frac{4736}{5620}$ τοῦ φράγκου.

Διὰ τὴν βεβαίωσιν ἀρκεῖ νὰ διπλασιάσωμεν τοὺς δύο ὅρους τῆς διαιρέσεως, καὶ τὸ πηλίκον (ἀριθμ. 40) δὲν πρέπει νὰ ἀλλάξῃ.

Τὸ διπλοῦν τοῦ 743 $\frac{13}{20}$ εἶναι 1491 $\frac{13}{10}$: τὸ διπλοῦν τοῦ 23 καὶ $\frac{5}{12}$ εἶναι 46 καὶ $\frac{5}{6}$.

Διαιροῦντες 1491 καὶ $\frac{3}{10}$, ἢ $\frac{14913}{10}$ διὰ 46 $\frac{5}{6}$ ἢ $\frac{281}{6}$, συνάγομεν διὰ πηλίκον $\frac{89478}{2810}$, ἢ ἐξάγοντες τὰς ἀκεραίας μονάδας, 31 καὶ $\frac{2368}{2810}$. Τὸ τελευταῖον τοῦτο κλάσμα ἐμβαίνει εἰς τὸ κλάσμα $\frac{4736}{5620}$, ὅταν πολλαπλασιάσωμεν τοὺς δύο του ὅρους ἐπὶ 2, ἢ ἐξαλείψωμεν τὸν κοινὸν παράγοντα ἐκ τῶν δύο ὅρων τοῦ $\frac{4736}{5620}$.

Κλάσματα Κλασμάτων.

§. 62. Εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν τῶν κλασμάτων προσκολλᾶται ἓν ἄλλο εἶδος ἐργασίας, ἥτις καλεῖται *κανὼν κλασμάτων τῶν κλασμάτων*.

Διὰ νὰ δώσωμεν καθαράν τινα ἰδέαν ταύτης τῆς ἐργασίας, ἂς ὑποθέσωμεν κατὰ πρῶτον, ὅτι ἀπὸ τὸ κλάσμα

$\frac{5}{7}$ ἔχομεν νὰ λάβωμεν ἓν μέρος, τὸ ὁποῖον νὰ ἐκφράζηται διὰ $\frac{2}{3}$, ἢ μὲ ἄλλας λέξεις ζητοῦμεν τὰ $\frac{2}{3}$ τῶν $\frac{5}{7}$.

Ἐπειδὴ διὰ νὰ ἐκτελέσωμεν ταύτην τὴν πρᾶξιν πρέπει νὰ λάβωμεν δύο φοραῖς τὸ τριτημόριον τῶν $\frac{5}{7}$. Τοῦτο ἀπαιτεῖ (ἀριθμ. 57) νὰ πολλαπλασιάσωμεν $\frac{5}{7}$ ἐπὶ $\frac{2}{3}$, τὸ ὁποῖον ἐκτελεῖται (ἀριθμ. 56) πολλαπλασιαζομένου ἀριθμητοῦ ἐπὶ ἀριθμητὴν, καὶ παρονομαστοῦ ἐπὶ παρονομαστὴν, καὶ συνάγομεν $\frac{10}{21}$ διὰ $\frac{2}{3}$ τῶν $\frac{5}{7}$.

Τώρα ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἀπὸ τὸ κλάσμα $\frac{10}{21}$ θέλομεν νὰ λάβωμεν ἓν μέρος ἐκφραζόμενον διὰ $\frac{8}{13}$. Εἰς ταύτην τὴν περίστασιν ἔχομεν σκοπὸν πραγματικῶς νὰ λάβωμεν τὰ $\frac{8}{13}$ τῶν $\frac{2}{3}$ τῶν $\frac{5}{7}$.

Τώρα διὰ νὰ εὕρωμεν τὰ $\frac{8}{13}$ τῶν $\frac{10}{21}$ πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν $\frac{10}{21}$ ἐπὶ $\frac{8}{13}$, τὸ ὁποῖον ἐκτελοῦμεν πολλαπλασιάζοντες ἀναμεταξύ των τοὺς δύο ἀριθ-

μητὰς καὶ τοὺς δύο παρονομαστάς· καὶ οὕτω συνάγομεν $\frac{80}{273}$ διὰ τὰ $\frac{10}{13}$ τῶν $\frac{2}{3}$ τῶν $\frac{5}{7}$.

Δυνάμεθα προσέτι, ἐὰν θέλωμεν νὰ λάβωμεν τὰ $\frac{3}{11}$ τῶν $\frac{80}{273}$, τουτέστι νὰ πολλαπλασιάσωμεν $\frac{80}{273}$ ἐπὶ $\frac{3}{11}$, καὶ τὸ νέον ἐξαγόμενον $\frac{240}{3003}$ ἐκφράζει τὰ $\frac{3}{11}$ τῶν $\frac{8}{13}$ τῶν $\frac{2}{3}$ τῶν $\frac{5}{7}$.

Ἂς ληφθοῦν διὰ δεύτερον παράδειγμα τὰ $\frac{2}{3}$ τῶν $\frac{3}{4}$ τῶν $\frac{5}{8}$ τῶν $\frac{6}{7}$ τοῦ 12.

Κατὰ πρῶτον νὰ λάβωμεν τὰ $\frac{6}{7}$ τοῦ 12 ἄλλο δὲν εἶναι, παρὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν 12 διὰ $\frac{6}{7}$. ὅθεν μᾶς προκύπτει $\frac{72}{7}$.

Μετὰ ταῦτα νὰ λάβωμεν τὰ $\frac{5}{8}$ τῶν $\frac{6}{7}$ τοῦ 12 ἦτον τὸ αὐτὸ ὡς νὰ λάβωμεν τὰ $\frac{5}{8}$ τῶν $\frac{72}{7}$ ἢ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὰ $\frac{72}{2}$ ἐπὶ $\frac{5}{8}$, τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖ $\frac{360}{56}$.

Διὰ νὰ λάβωμεν δὲ τὰ $\frac{3}{4}$ τῶν $\frac{5}{8}$ τῶν $\frac{6}{7}$ τοῦ

12 πρέπει νὰ λάβωμεν τὰ $\frac{3}{4}$ τῶν $\frac{360}{56}$ ἢ νὰ πολλαπλασιάσωμεν $\frac{360}{56}$ ἐπὶ $\frac{3}{4}$, τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖ $\frac{1080}{224}$.

Τέλος πάντων διὰ νὰ λάβωμεν τὰ $\frac{2}{3}$ τῶν $\frac{3}{4}$ τῶν $\frac{5}{8}$ τῶν $\frac{6}{7}$ τοῦ 12, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν $\frac{1080}{224}$ ἐπὶ $\frac{2}{3}$, καὶ συνάγομεν $\frac{2160}{672}$.

Καὶ ἐξάγοντες τὰς ἀκεραίας μονάδας, τὰς περιεχομένας εἰς αὐτὸ τὸ ἐξαγόμενον, εὑρίσκομεν 3 καὶ $\frac{144}{672}$, ἢ ἀνάγοντες τὸ κλάσμα, 3 καὶ $\frac{3}{14}$.

Παρατηροῦντες ὀλίγον τι τὴν ὁδὸν, τὴν ὁποίαν ἐξηκολουθήσαμεν, βλέπομεν, ὅτι διὰ νὰ λάβωμεν κλάσματα κλασμάτων, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τοὺς ἀριθμητὰς ἀναμεταξύ των, καὶ νὰ πράξωμεν τὸ αὐτὸ εἰς τοὺς παρονομαστὰς, καὶ νὰ δώσωμεν τὸ δεύτερον γινόμενον διὰ παρονομαστὴν τοῦ πρώτου. Ἐὰν ἔχωμεν νὰ λάβωμεν κλάσματα κλασμάτων ἑνὸς ἀκεραίου ἀριθμοῦ, ὡς εἰς τὸ δεύτερον παράδειγμα, πρέπει νὰ θέσωμεν τὸν τοιοῦτον ἀκέραιον ἀριθμὸν ὑπὸ τὴν μορφὴν κλάσματος, δίδοντίς του 1 διὰ παρονομαστὴν, καὶ ἐφαρμόζοντες τὸν κανόνα, τὸν ὁποῖον ἀνωτέρω ἐξηγήσαμεν.

Πρόβλημα. Ἠρώτησαν ἕνα γυμνασμένον ἀριθμητικὸν, ὁποία ὥρα εἶναι, καὶ αὐτὸς ἀπεκρίθη, εἶναι τὰ $\frac{3}{4}$ τῶν $\frac{5}{6}$ τῶν $\frac{7}{12}$ τῶν $\frac{6}{7}$ τῶν 24 ὡρῶν; ὁποία ἦτον ἐκείνη ἡ ὥρα;

Διὰ νὰ λύσωμεν τὸ τοιοῦτον ζήτημα, γράφομεν ἐπὶ μιᾶς πρώτης ὁριζοντίου γραμμῆς ὅλους τοὺς ἀριθ-

μητὰς καὶ τὸν ἀκέραιον ὁμοίως, καὶ ἐπὶ μιᾶς δευτέρας ὅλους τοὺς παρονομαστάς· 3, 5, 7, 6, 24
4, 6, 12, 7, 1.

Τούτου τεθέντος, σχηματίζομεν τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν τῆς πρώτης γραμμῆς, καὶ ἐκεῖνο τῶν ἀριθμῶν τῆς δευτέρας, μετὰ ταῦτα διαιροῦμεν τὸ πρῶτον γινόμενον διὰ τοῦ δευτέρου, καὶ οὕτω συνάγομεν $\frac{15120}{2016}$ διὰ ἐξαγόμενον, καὶ ἐξάγοντες τὰς ἀκεραίας μονάδας, εὑρίσκομεν 7 καὶ $\frac{1008}{2016}$, ἢ ἀνάγοντες, $7\frac{1}{2}$· λοιπὸν ἦτον 7 ὧραι καὶ $\frac{1}{2}$.

Ἐμποροῦμεν πολλάκις νὰ καταστaίνωμεν ἁπλουστέραν τὴν πρᾶξιν, παρατηροῦντες, ὅτι ὁ παράγων 7 εὑρίσκεται κοινὸς παράγων εἰς τὸ γινόμενεν τῶν ἀριθμητῶν καὶ τῶν παρονομαστῶν, ὅθεν δυνάμεθα νὰ ἐξαλείψωμεν αὐτὸν πρὸ τοῦ νὰ ἐκτελέσωμεν τὸν πολλαπλασιασμόν. Τὸ αὐτὸ ἀκολουθεῖ διὰ τὸν παράγοντα 6. οὕτω καὶ ὁ παράγων 12, ὅς τις εὑρίσκεται εἰς τὸν ἀριθμὸν τῶν παρονομαστῶν, εὑρίσκεται παρομοίως εἰς τὸ 24. Δυνάμεθα προσέτι νὰ ἐξαλείψωμεν τὸν παράγοντα 2, ὅς τις ἐπειδὴ εἶναι τὸ πηλίκον τοῦ 24 διὰ τοῦ 12, εὑρίσκεται εἰς τὸν παρονομαστὴν 4· καὶ τότε τρέπεται, ἐξαλειφομένων τῶν παραγόντων τούτων, εἰς $\frac{3 \text{ φοραῖς } 5}{2}$, ἢ $\frac{15}{2}$ ἢ $7\frac{1}{2}$, ὡς ἀνωτέρω εὕρηκαμεν.

Ἀλλὰ αἱ τοιαῦται ἁπλότητες τῶν πράξεων ἀπαιτοῦν μεγαλωτάτην γύμνασιν καὶ προσοχὴν, ἐν ᾧ ἡ συσταθεῖσα μέθοδος εἶναι γενικὴ, καὶ μᾶς ἄγει πάντοτε εἰς τὸν αὐτὸν σκοπόν.

Ἄλλαι ἐφαρμογαί. Τὰ $\frac{2}{3}$ τῶν $\frac{3}{4}$ ἑνὸς ἀριθμοῦ σχηματίζουσι $\frac{6}{12}$, ἢ τὸ ἥμισυ τούτου τοῦ ἀριθμοῦ. Παρομοίως τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ $\frac{1}{5}$ ἑνὸς ἀριθμοῦ εἶναι ἴσον μὲ $\frac{1}{15}$ τούτου τοῦ ἀριθμοῦ· τὸ $\frac{1}{2}$ τῶν $\frac{3}{4}$ εἶναι $\frac{3}{8}$ καὶ ἐφεξῆς.

§. 63. *Παρατήρησις Γενικὴ ἐπὶ τῶν κλασμάτων.* Ἕπεται προδήλως ἀπὸ τὴν φύσιν τῶν συσταθεισῶν ἰδιοτήτων διὰ τοῦ ὑπολογισμοῦ τῶν κλασμάτων, ὅτι αἱ τέσσαρες θεμελιώδεις ἐργασίαι, τὰς ὁποίας ἐκτελέσαμεν εἰς αὐτὰς, τουτέστιν ἡ Πρόσθεσις, ἡ Ἀφαίρεσις, ὁ Πολλαπλασιασμὸς καὶ ἡ Διαίρεσις ἀνάγονται πάντοτε, μὲ τὴν τελευταίαν ἀνάλυσιν, εἰς τὰς αὐτὰς πράξεις, τὰς ὁποίας ἐκτελέσαμεν ἐπὶ τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν.

Καθὼς π. χ. ἡ πρόσθεσις καὶ ἡ ἀφαίρεσις τῶν κλασμάτων ἄγεται διὰ τῆς ἀναγωγῆς τῶν κλασμάτων εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν, εἰς τὴν πρόσθεσιν καὶ ἀφαίρεσιν τῶν ἀριθμητῶν των.

Παρομοίως, ὁ πολλαπλασιασμὸς ἐκτελεῖται, πολλαπλασιαζομένων τῶν ἀριθμητῶν ἀναμεταξύτων, καὶ τῶν παρονομαστῶν ἀναμεταξύ των. Ἡ διαίρεσις ἄγεται εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν, ἀντιστρεφομένου τοῦ διαιροῦντος κλάσματος.

Συμπεραίνομεν ἐντεῦθεν, ὅτι αἱ συσταθεῖσαι ἀρχαὶ εἰς τὸν ἀριθμ. 25 καὶ 26. ἐπὶ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν, ἐφαρμόζονται παρομοίως καὶ εἰς τὰ κλάσματα, τουτέστι

1ον Νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἓν κλάσμα ἐπὶ τὸ γινόμενον πολλῶν ἄλλων ἄγεται εἰς πολλαπλασιασμὸν τοῦ πρώτου κλάσματος ἐφ' ἕκαστον τῶν παραγόντων τοῦ γινομένου διαδοχικῶς.

2ον Τὸ γινόμενον δύο ἢ περισσοτέρων κλασμάτων εἶναι πάντοτε τὸ αὐτὸ, καθ' ὁποίαν τάξιν ἐκτελέσωμεν τὸν πολλαπλασιασμόν.

Τέλος πάντων δυνάμεθα νὰ ἐφαρμόσωμεν ἐπὶ τῶν κλασμάτων ὅλας τὰς συσταθείσας ἀρχὰς εἰς τὸν ἀριθμὸν 40, ἐπὶ τῶν τροπῶν, τὰς ὁποίας δέχεται τὸ γινόμενον ἑνὸς πολλαπλασιασμοῦ, ἢ τὸ πηλίκον μιᾶς διαιρέσεως, ὅταν κάμωμεν μερικὰς μεταβολὰς εἰς ἕνα τῶν ὅρων τῆς ἐργασίας, τὴν ὁποίαν ἔχομεν σκοπὸν νὰ ἐκτελέσωμεν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ'.

Περὶ Συμμιγῶν ἀριθμῶν.

§. 64. Τοῦτο τὸ κεφάλαιον καὶ τὸ ἀκόλουθον εἰς κάποιον τρόπον ἄλλο τι δὲν εἶναι, παρὰ ἔκτασις τοῦ δευτέρου· ἐπειδὴ ἄλλο δὲν περιέχουν, παρὰ ἐφαρμογὰς τῆς γενικῆς θεωρίας τῶν κλασμάτων, εἰς ζητήματα, εἰς τὰ ὁποῖα θεωροῦμεν κλάσματα ἑνὸς μερικοῦ εἴδους.

Ἡ θεωρία τῶν συμμιγῶν ἀριθμῶν, ἥτις κάμνει τὸ ὑποκείμενον τούτου τοῦ κεφαλαίου (πρέπει νὰ τὸ ὁμολογή-

σωμεν) ἐστερήθη μέρος τῆς ἀξιολογότητος ὕστερον ἀπὸ τὴν στερέωσιν τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος τῶν βαρέων καὶ μέτρων, μ' ὅλον τοῦτο ἡμεῖς ἐνομίσαμεν ἀναγκαῖον νὰ ἐκθέσωμεν αὐτὴν εἰς ὅλην της τὴν ἔκτασιν, ὡς εὑρίσκεται εἰς τὰ παλαιὰ συγγράμματα, ἐπειδὴ ἡμεῖς τὴν θεωροῦμεν ἱκανὴν νὰ γυμνάσῃ τὴν νεολαίαν εἰς τὰς θεωρίας τῶν κλασμάτων, καὶ νὰ τῇ δώσῃ τὴν ἕξιν τούτου τοῦ ὑπολογισμοῦ, ἡ ὁποία δὲν εἶναι τόσον εὔκολος νὰ ἀποκτηθῇ. Ἀπὸ τὸ ἄλλο μέρος ἡ συμπλοκὴ τῶν πράξεων, τὰς ὁποίας ἡ τοιαύτη θεωρία περιέχει μᾶς κάμνει νὰ γνωρίσωμεν καλλίτερα τὴν ὠφέλειαν τοῦ νέου συστήματος τῶν βαρέων καὶ τῶν μέτρων συγκρινομένων μὲ τὰ παλαιά.

Εἴδομεν (εἰς τὸν ἀριθμ. 8), ὅτι διὰ νὰ ἐκτιμήσωμεν τὰς ποσότητας, τὰς πλέον μικροτέρας τῆς ἀρχικῆς μονάδος, ἐννοοῦμεν ταύτην τὴν μονάδα διῃρημένην εἰς μέρη μικρότερα, τὰ ὁποῖα θεωροῦμεν, ὡς νὰ ἐσχημάτιζον αὐτὰ ταῦτα μονάδας· ἀλλὰ διὰ νὰ καταστήσωμεν τὸν ὑπολογισμὸν πλέον εὔκολον, ἀντὶ νὰ διαιρέσωμεν τὴν μονάδα εἰς τόσον μέγαν ἀριθμὸν ἴσων μερῶν, τὴν διαιροῦμεν κατὰ πρῶτον εἰς προσδιορισμένον τινὰ ἀριθμὸν ἀπὸ μέρη, καὶ μετὰ ταῦτα ὑποδιαιροῦμεν αὐτὰ εἰς ἕνα ἄλλον, καὶ ἐκ νέου αὐτὰ εἰς ἄλλα μέρη, καὶ οὕτως ἐφεξῆς. Διὰ τοῦτο εἰς τὰ νομίσματα ἐδιαιροῦσαν ἄλλοτε τὴν λίτραν εἰς εἴκοσι ἴσα μέρη, τὰ ὁποῖα τὰ ὠνόμαζον σολδία, τὸ δὲ σολδίον εἰς δώδεκα μέρη, τὰ ὁποῖα τὰ ὠνόμαζον δηνάρια. Παρομοίως τὴν μονάδα τοῦ μήκους, ἢ τὴν ὀργυιὰν, τὴν ἐδιαιροῦσαν εἰς 6 πόδας, τὸν πόδα εἰς 12 δακτύλους· κ. τ. λ.

Ἑκάστη τέχνη ὑποδιαιροῦσε τὴν ἀρχικὴν μονάδα κατ' ἀρέσκειάν της. Ἰδοὺ ὁ κατάλογος, ὅς τις περιέχει

ἀρχικὰς μονάδας διαφορετικῆς φύσεως· καὶ τὰς ὑποδιαιρέσεις των.

Νομίσματα.

§. 65. Ἡ λίβρα ἀξίζει 20 σολδία, τὸ σολδίον 12 δηνάρια. Λοιπὸν ἡ λίβρα ἰσοδυναμεῖ μὲ 12 φοραῖς 20 ἢ 240 δηνάρια.

Λέγομεν ἀκόμη, ὅτι τὸ σολδίον εἶναι τὸ $\overline{20}^{ον}$ τῆς λίβρας, τὸ δηνάριον τὸ $\overline{12}^{ον}$ τοῦ σολδίου, ἢ $\overline{240}^{ον}$ τῆς λίβρας.

Περὶ τῶν μηκῶν.

Ἡ ὀργυιὰ δύναται 6 πόδας, ὁ ποῦς 12 δακτύλους, ὁ δάκτυλος 12 γραμμάς. Λοιπὸν ἡ ὀργυιὰ εἶναι ἴση μὲ 12 φοραῖς 6, ἢ 72 δακτύλους, ἢ 12 φοραῖς 72, εἴτε 864 γραμμάς.

Ἢ μᾶλλον, ὁ ποῦς εἶναι τὸ ἕκτον μέρος τῆς ὀργυιᾶς, ὁ δάκτυλος εἶναι τὸ $\overline{12}^{ον}$ τοῦ ποδός, ἢ $\overline{72}^{ον}$ τῆς ὀργυιᾶς, ἡ γραμμὴ τὸ $\overline{12}^{ον}$ τοῦ δακτύλου, ἢ $\overline{864}^{ον}$ τῆς ὀργυιᾶς.

Ὁδοιπορικὰ μέτρα.

Ἡ μέση λέγα εἶναι ἴση μὲ 2250 ὀργυιάς· αὕτη ὑποδιαιρεῖται εἰς ἡμίσεα, εἰς τέταρτα, εἰς ἡμιτέταρτα ἢ ὄγδοα τῆς λέγας.

Βάρη.

Ἡ λίτρα διαιρεῖται εἰς 2 ἡμίλιτρα, τὸ ἡμίλιτρον εἰς 8 οὐγγίας, ἡ οὐγγία εἰς 8 δραχμάς, ἡ δραχ-

μὴ εἰς 72 κόκκους. Λοιπὸν ἡ λίτρα ἰσοδυναμεῖ μὲ 8 φοραῖς 2, ἢ 16 οὐγγίας, 8 φοραῖς 16, ἢ 128 δραχμὰς, 72 φοραῖς 128, ἢ 9216 κόκκους.

Ἡ προσέτι τὸ ἡμίλιτρον εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς λίτρας, ἡ οὐγγία εἶναι τὸ 8ον τοῦ ἡμιλίτρου, ἢ τὸ 16ον τῆς λίτρας: ἡ δραχμὴ εἶναι τὸ 8ον τῆς οὐγγίας, ἢ τὸ 120ον τῆς λίτρας· ὁ δὲ κόκκος εἶναι τὸ 72ον τῆς δραχμῆς, ἢ τὸ 9216ον μέρος τῆς λίτρας.

Περὶ τοῦ χρόνου.

Ἡ ἡμέρα διαιρεῖται εἰς 24 ὥρας, ἡ ὥρα εἰς 60 λεπτὰ, τὸ λεπτὸν εἰς 60 δεύτερα, τὸ δεύτερον εἰς 60 τρίτα· ὁ χρόνος εἰς 365 ἡμέρας, ἢ εἰς 366, ὄντος τοῦ χρόνου ἐμβολιμαίου.

Καλεῖται ἀριθμὸς συμμιγὴς πᾶς, ὅστις σύγκειται ἀπὸ μέρη ἀναφερόμενα εἰς τὰς διαφόρους μονάδας, ἐκεῖνος δὲ, ὅστις περικλείει ἓν εἶδος μόνον μονάδων, καλεῖται ἀμιγὴς ἀριθμός· οὕτως 13 λίβρ. 17 σολδ. 9 δην, 25 δρ. 4 ποδ. 7 δακτ. 6 γραμ. 41 λιτρ. 1 ημιλ. 7 ουγ. 5 δραχ. 17 κοκ. κ. τ. λ. εἶναι ἀριθμοὶ συμμιγεῖς, ἀλλὰ 8 λιτρ. 17 οργ. 24 κοκ. εἶναι ἀριθμοὶ ἀμιγεῖς.

§. 66. Ἀρχίζομεν δὲ τὴν θεωρίαν τῶν συμμιγῶν ἀριθμῶν ἀναπτύσσοντες δύο ἰδιαζούσας εἰς αὐτοὺς ἐργασίας, καὶ αἱ ὁποῖαι θεωροῦνται, ὡς βάσις, εἰς τὰς τέσσαρας ἀρχικὰς ἐργασίας. Ἡ πρώτη ἔχει σκοπὸν, δεδομένου ἑνὸς σύμμιγοῦς νὰ τὸν ἀνάξωμεν εἰς ἕνα μόνον ἀριθμὸν κλασματικὸν τῆς ἀρχικῆς μονάδος. Ἡ δευτέρα εἶναι, δεδομένης ἀντιστρόφως ἐκ-

φράσεως τινὸς κλασματικῆς νὰ ἐξάξωμεν τὸν ὁποῖον αὐτὴ παριστᾷ συμμιγῆ ἀριθμόν.

1[ον] Ἂς ἀνάξωμεν 17 ὀργ. 5 ποδ. 7 δακτ. 11 γραμ. εἰς κλασματικὸν τινὰ ἀριθμὸν τῆς ὀργυιᾶς.

Εἶναι φανερὸν, ὅτι ἐὰν φθάσωμεν νὰ προσδιορίσωμεν τὸν ἀριθμὸν τῶν γραμμῶν, τὰς ὁποίας περιέχει ὁ δεδομένος ἀριθμὸς, τότε ἀρκεῖ εἰς τὸ τοιοῦτον ἐξαγόμενον νὰ δώσωμεν παρονομαστὴν τὸ 864, ἐπειδὴ κατὰ τὸν πίνακα (ἀριθ. 65.) ἡ γραμμὴ εἶναι ἴση μὲ $\frac{1}{864}$ τῆς ὀργυιᾶς.

ὀργ.	ποδ.	δακ.	γρ.
17	5	7	11
6			
107			
12			
1291			
12			
15503			

Ἂς ἄξωμεν λοιπὸν τὸν δεδομένον ἀριθμὸν εἰς γραμμὰς κατὰ πρῶτον. Ἐπειδὴ ἡ ὀργυιὰ δύναται 6 πόδας, ἄγομεν εἰς πόδας 17 ὀργ. . . . . ., καὶ 5 ποδ. . . . . . πολλαπλασιάζοντες τὸ 17 ἐπὶ 6, καὶ εἰς τὸ γινόμενον προσθέτοντες 5 ποδ. τοὺς ὁποίους ἤδη ἔχομεν, καὶ οὕτως εὑρίσκομεν 107 διὰ ἐξαγόμενον.

Τώρα ἐπειδὴ ὁ ποῦς εἶναι ἴσος μὲ 12 δακτύλους, ἄγομεν εἰς δακτύλους τοὺς 107 ποδ. καὶ 7 δακτ. πολλαπλασιάζοντες 107 ἐπὶ 12, καὶ προσθέτοντες εἰς τὸ γινόμενον 7 δακτ., καὶ ἔχομεν 1291 δακτ.

Τέλος πάντων, ἐπειδὴ ὁ δάκτυλος ἰσοδυναμεῖ μὲ 12 γραμμὰς, ἀρκεῖ διὰ νὰ ἄξωμεν 1291 δακτ. εἰς γραμμὰς, νὰ πολλαπλασιάσωμεν 1291 ἐπὶ 12, καὶ νὰ προσθέσωμεν 11 εἰς τὸ γινόμενον, καὶ οὕτως θέλομεν ἔχει 15503 γραμ. διὰ τὸν ὅλον ἀριθμὸν τῶν γραμμῶν, τὸν ὁποῖον περιέχει ὁ ἀριθμὸς 17 ὀργ. 5 ποδ. 7 δακ. 11 γραμ.

Δίδοντες λοιπὸν εἰς 15503 τὸν παρανομαστὴν 864 εὑρίσκομεν $\frac{15503}{864}$ τῆς ὀργυιᾶς διὰ τὸν ζητούμενον ἀριθμόν.

Σ. Κ. Εἰς ταύτην τὴν ἐργασίαν ἡμεῖς ἐπολλαπλασιάσαμεν 2 φοραῖς ἐπὶ τὸν 12. Ἐν γένει ὁ πολλαπλασιασμὸς ἐπὶ τὸν παράγοντα 12 εἶναι συχνοτάτης χρήσεως εἰς τὴν θεωρίαν τῶν συμμιγῶν ἀριθμῶν, καὶ πρέπει νὰ ἠξεύρωμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀριθμόν τινὰ ἐπὶ 12, ὡς πολλαπλασιάζομεν ἕνα ἀριθμὸν μὲ ἓν μόνον ψηφίον, μ᾽ ὅλον τοῦτο, ἕως νὰ γυμνασθῇ τὸ μνημονικὸν, ἠμποροῦμεν νὰ κάμωμεν χρῆσιν ἑνὸς πίνακος πολλαπλασιασμοῦ (ἀριθ. 18) ἐκτεινομένου ἕως εἰς 12.

Τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα μᾶς διδάσκει πῶς ἐκτελεῖται ἡ πρώτη ἐργασία. Καὶ ἰδοὺ εἰς τί συνίσταται. Πολλαπλασιάζομεν κατὰ πρῶτον τὸν ἀριθμὸν τῶν ἀρχικῶν μονάδων, τὰς ὁποίας περιέχει ὁ συμμιγὴς ἀριθμὸς ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν μονάδων τῆς ἀνωτέρας ὑποδιαιρέσεως, αἱ ὁποῖαι περιέχονται εἰς τὴν ἀρχικὴν μονάδα, καὶ προσθέτομεν εἰς τὸ γινόμενον τὰς μονάδας ταύτης τῆς ὑποδιαιρέσεως, τὰς ὁποίας ἔχομεν ἤδη. Πολλαπλασιάζομεν τὸ ἐξαγόμενον ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν μονάδων τῆς δευτέρας ὑποδιαιρέσεως, τὰς ὁποίας περιέχει ἡ πρώτη, καὶ προσθέτομεν εἰς τὸ γινόμενον τὰς μονάδας τῆς δευτέρας ὑποδιαιρέσεως, τὰς ὁποίας ἔχομεν ἤδη.

Πολλαπλασιάζομεν τὸ νέον ἐξαγόμενον ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν μονάδων τῆς τρίτης ὑποδιαιρέσεως, τὰς ὁποίας περιέχει ἡ δευτέρα, καὶ προσθέτομεν εἰς τὸ γινόμενον, καὶ ἐφεξῆς . . . ἀκολουθοῦντες οὕτως τὴν πρᾶξιν, ἕως νὰ φθάσωμεν εἰς τὴν τελευταίαν ὑποδιαίρεσιν.

Δίδομεν τέλος πάντων παρονομαστὴν εἰς τὸ τελευταῖον ἐξαγόμενον τὸν ἀριθμὸν τῶν μονάδων τῆς μικροτέρας ὑποδιαιρέσεως, τὰς ὁποίας περιέχει ἡ ἀρχικὴ μονὰς, ἀριθμὸν, ὅστις εὑρίσκεται εἰς τὸν πίνακα. (ἀριθμ. 65.)

§. 65. 2^{ον} Ἂς ἀναχθῇ ὁ κλασματικὸς ἀριθμὸς $\frac{615}{23}$ τῆς ὀργυιᾶς εἰς ἀριθμὸν τινὰ σύμμιγῆ.

Ἀρχίζομεν νὰ διαιρῶμεν τὸ 615 διὰ τοῦ 23, τὸ ὁποῖον δίδει πηλίκον 26, καὶ κατάλοιπον 17. Λοιπὸν δυνάμεθα ἤδη νὰ εἴπωμεν, ὅτι ὁ προτεθεὶς ἀριθμὸς εἶναι ἴσος μὲ 26$^{ὀργ.}$ πλέον $\frac{17}{23}$ τῆς ὀργυιᾶς· ἀλλ' ἐπειδὴ κάθε ὀργυιὰ ἰσοδυναμεῖ μὲ 6$^{ποδ.}$ ἕπεται, ὅτι $\frac{17}{23}$ τῆς ὀργυιᾶς ἰσοδυναμεῖ μὲ $\frac{17}{23}$ τῶν

615	23
155	ορ. ποδ. δακτ.
17	26 4 5
6	
102	
10	
12	
120	
5	
12	
60	
14	

6$^{ποδ.}$, τουτέστι (ἀριθμ. 62) μὲ $\frac{6 \text{ φοραῖς } 17}{23}$ ἢ $\frac{102}{23}$ τοῦ ποδὸς, καὶ ὅσαις φοραῖς τὸ 102 περιέχει τὸ 23, τόσους πόδας ἔχομεν εἰς τὸ πηλίκον. Λοιπὸν βλέπομεν, ὅτι φθάσαντες εἰς τὸ ὑπόλοιπον 17 διὰ νὰ συνάξωμεν τοὺς πόδας, πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸ 17 ἐπὶ 6 καὶ νὰ διαιρέσωμεν τὸ 102 διὰ τοῦ 23, καὶ οὕτω συνάγομεν πηλίκον 4$^{ποδ.}$ καὶ ὑπόλοιπον 10. Ὁ δεδομένος ἀριθμὸς λοιπὸν εἶναι ἴσος μὲ 26$^{ὀργ.}$ καὶ 4$^{ποδ.}$ πλέον $\frac{10}{23}$ τοῦ ποδός.

Καὶ συλλογιζόμενοι περὶ τούτου τοῦ νέου κλάσματος, ὡς περὶ τοῦ ἄνω, βλέπομεν, ὅτι διὰ νὰ τὸ ἀνάξωμεν εἰς δακτύλους ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸ ὑπόλοιπον 10 ἐπὶ 12, καὶ νὰ διαιρέσωμεν τὸ γινόμενον 120 ἐπὶ 23, καὶ οὕτω συνάγομεν πηλίκον 5 δακτύλους, καὶ ὑπόλοιπον 5.

Πολλαπλασιάζοντες τὸ νέον τοῦτο ὑπόλοιπον ἐπὶ 12, διὰ νὰ λάβωμεν τὰς γραμμὰς, ἔχομεν γινόμενον 60, τὸ ὁποῖον διαιρεθὲν ἐπὶ 23 δίδει πηλίκον 2γραμ. μὲ ὑπόλοιπον 14.

Λοιπὸν ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς εἶναι ἴσος μὲ 26ὀργ., 4ποδ., 5δακτ., 2γραμ., καὶ $\frac{14}{23}$ τῆς γραμμῆς. Ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον παραιτοῦμεν τὸ κλάσμα $\frac{14}{23}$ τῆς γραμμῆς, ἢ τοῦ δίδομεν μίαν ὡς ἔγγιστα τιμήν· ἐὰν π. χ. εἴχαμεν $\frac{14}{28}$ ἀντὶ $\frac{14}{23}$, τότε τὸ κλάσμα ἰσοδυναμεῖ μὲ $\frac{1}{2}$ γραμμῆς· ἀλλ' ἐπειδὴ ὁ παρονομαστὴς εἶναι μικρότερος ἀπὸ τὸ 28, διὰ τοῦτο $\frac{14}{23}$ εἶναι ὀλίγον τί μεγαλήτερον τῆς $\frac{1}{2}$ γραμμῆς.

Γενικὸς κανών. Διὰ νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν τελευταίαν ταύτην πρᾶξιν, διαιροῦμεν τὸν ἀριθμητὴν τοῦ προτεθέντος κλασματικοῦ ἀριθμοῦ διὰ τοῦ παρονομαστοῦ, καὶ οὕτως ἔχομεν πηλίκον ἐκφράζον τὰς ἀρχικὰς μονάδας, καὶ ἕν τι ὑπόλοιπον.

Πολλαπλασιάζομεν τὸ τοιοῦτον ὑπόλοιπον ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν μονάδων τῆς πρώτης ὑποδιαιρέσεως, τὰς ὁποίας περιέχει ἡ ἀρχικὴ μονὰς, καὶ διαιροῦμεν τὸ γι-

νόμενον διὰ τοῦ παρονομαστοῦ, ὅθεν συνάγομεν νέον τὶ πηλίκον, τὸ ὁποῖον ἐκφράζει τὰς μονάδας τῆς πρώτης ὑποδιαιρέσεως, καὶ νέοντι ὑπόλοιπον.

Πολλαπλασιάζομεν τὸ τοιοῦτον ὑπόλοιπον ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν μονάδων τῆς δευτέρας ὑποδιαιρέσεως, τὰς ὁποίας περιέχει ἡ πρώτη, καὶ διαιροῦμεν τὸ γινόμενον διὰ τοῦ παρονομαστοῦ· οὕτω συνάγομεν πηλίκον τὰς μονάδας τῆς δευτέρας ὑποδιαιρέσεως, καὶ ἓν νέον ὑπόλοιπον, ἐπὶ τοῦ ὁποίου ἐργαζόμεθα, ὡς καὶ ἐπὶ τῶν προηγουμένων· καὶ οὕτως ἐξακολουθοῦμεν τὴν πρᾶξιν, ἕως οὗ νὰ φθάσωμεν εἰς τὴν τελευταίαν ὑποδιαίρεσιν.

§. 68. Αὗται αἱ δύο πράξεις βεβαιοῦνται ἀναμεταξύ των, τουτέστιν ἡ μία ἀπὸ τὴν ἄλλην, ὡς μὲ εὐκολίαν δυνάμεθα νὰ ἴδωμεν.

Π. χ. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν συμμιγῆ ἀριθμὸν, ὁ ὁποῖος εἰς τὴν πρώτην μᾶς ἔδωκε τὸν ἀριθμὸν $\frac{15503}{864}$, ἐφαρμόζομεν εἰς ταύτην τὸν ἀνωτέρω κανόνα. Εὐχαρίστως δὲ δεικνύομεν ἐδῶ τὸν ἄνευ τινὸς δυσκολίας ὑπολογισμὸν τοῦτον.

```
15503 | 864
 6863 |---------------------------------
  815 | 17 ὀργ, 5 ποδ, 7 δακτ, 11 γρ.
    6
 4890
  570
   12
 6840
  792
   12
 9504
  864
    0
```

Ἡ βάσανος τῆς δευτέρας πράξεως ἔχει ἀνάγκην σαφηνείας.

Ἀφ' οὗ ἐφαρμόσωμεν εἰς τὸν ἀριθμὸν 26ὀργ, 4ποδ, 5δακ, 2γρ, τὸν τρόπον τῆς τρίτης ἐργασίας, εὑρίσκομεν ἐξαγόμενον 23102γρ ἢ $\frac{23102}{864}$ τῆς ὀργυιᾶς· ἀλλ' ἐπειδὴ εἰς τὰς 23102γρ εὑρίσκονται καὶ $\frac{14}{23}$ τῆς γραμμῆς, πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὰς 23102 ἐπὶ 23, διὰ νὰ ἄξωμεν αὐτὰ εἰς εἰκοστὰ τρίτα, καὶ μετὰ ταῦτα νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸ γινόμενον τὸ 14, ὅθεν λαμβάνομεν 531360 ἀριθμὸν, εἰς τὸν ὁποῖον πρέπει ἔπειτα νὰ δώσωμεν παρονομαστὴν 23 φοραῖς τὸ 864.

```
ὀρ   ποδ  δακ  γρ
26 . 4 .  5 .  2 . 14/23
 6
-------------------------
160
 12
-------------------------
1925
  12
--------
23102γρ
   23
--------
 69306
46204
    14
--------
531360
```

Ἀλλ' ἐπειδὴ $\frac{531360}{23 \text{ φορ. } 864}$ πρέπει νὰ ἦναι ἴσον μὲ $\frac{615}{23}$, ἕπεται ὅτι 531360 πρέπει νὰ διαιρῆται διὰ 864, τὸ ὁποῖον εὐκόλως γνωρίζομεν, καὶ τότε ἐξαλείφοντες τὸν κοινὸν παράγοντα 864 ἀνευρίσκομεν τῷ ὄντι $\frac{615}{23}$.

Ἰδοὺ ἄλλο παράδειγμα τῆς δευτέρας πράξεως μετὰ τῆς βασάνου.

Νὰ τρέψωμεν εἰς συμμιγῆ τινὰ ἀριθμὸν λιτρῶν, ἡμιλίτρων, οὐγγιῶν, δραχμῶν καὶ κόκκων τὸν κλασματικὸν ἀριθμὸν $\frac{12870}{365}$ τῆς λίτρας.

Ἐργασία.		Βάσανος.		
12870 | 365	λίτ. ημ. οὐγ. δρ. κόκ.	λίτ. ημ. ουγ. δρ. κόκ.		
1920	35, 0, 4, 1, 22, $\frac{250}{365}$.	35, 0, 4, 1, 22,		$\frac{150}{360}$.
95				
2		2		
190		70		
8		8		
1520		564		
60		8		
8		4513		
480		72	118609920 | 9216	12870
115		9026	26449	
72		31591	80179	
230		22	64512	
805		324958	00000	
8280		365		
980		1624790		
250		1949748		$\frac{12870}{365}$.
		974874		
		250		
		118609920		

Ἀφ' οὗ εὕρωμεν εἰς τὴν βάσανον τὸν ἀριθμὸν 118609920, ὅστις ἐκφράζει τὸ $\overline{365}^{ον}$ τοῦ κόκκου, διαιροῦμεν τοῦτον τὸν ἀριθμὸν διὰ 9216 ἀριθμοῦ κόκκων περιεχομένων εἰς τὴν λίτραν, καὶ συνάγομεν πη-

λίκον 12870· οὕτως εὑρίσκομεν τὸν δεδομένον ἀριθμὸν $\frac{12870}{365}$ τῆς λίτρας.

§: 69. Διὰ μέσου τῶν τοιούτων δύο προοιμιωδῶν κανόνων αἱ τέσσαρες πρῶται ἐργασίαι ἐπὶ τῶν συμμιγῶν ἀριθμῶν, ἀνάγονται εἰς τὰς ἐκτεθείσας εἰς τὸ ἀνωτέρω κεφάλαιον. Τῷ ὄντι ὁποιαδήποτε εἶναι ἡ δεδομένη πρᾶξις, δυνάμεθα κατὰ πρῶτον νὰ τρέφωμεν τοὺς συμμιγεῖς ἀριθμούς, ἐπὶ τῶν ὁποίων ἔχομεν νὰ πράξωμεν, ἕκαστον εἰς ἕνα μόνον ἀριθμὸν τῆς ἀρχικῆς μονάδος κατὰ τὸν κανόνα (τοῦ ἀριθμ. 66), μετὰ ταῦτα ἐκτελοῦμεν ἐπὶ τῶν οὕτω μεταμορφωθέντων ἀριθμῶν τὴν ζητουμένην πρᾶξιν, κατὰ τὸν κανόνα τῶν κλασμάτων. Ὅθεν ἔχομεν ἀριθμόν τινα κλασματικὸν, τὸν ὁποῖον τρέπομεν εἰς ἀριθμὸν συμμιγῆ· κατὰ τὸν κανόνα τοῦ ἀριθμ. 67, ἡ ὁποία πρᾶξις θέλει μᾶς δώσει τὸ ζητούμενον ἐξαγόμενον· ἀλλ' αὕτη ἡ τελευταία πρᾶξις εἶναι ὀλιγώτερον ἁπλῆ διὰ τὰς τρεῖς πρώτας πράξεις, παρὰ τὴν ὁποίαν ἤδη θέλομεν ἀναπτύξει.

Πρόσθεσις τῶν Συμμιγῶν ἢ Συμπεπλεγμένων ἀριθμῶν.

§. 70. Ἡ πρᾶξις αὕτη ἐκτελεῖται, ὡς ἡ τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν. Γράφομεν ὅλους τοὺς δεδομένους ἀριθμοὺς τὸν ἕνα ὑπὸ τὸν ἄλλον, εἰς τρόπον, ὥστε αἱ μονάδες τοῦ ἰδίου εἴδους, ἢ τῆς ἰδίας ὑποδιαιρέσεως νὰ εὑρίσκωνται εἰς τὴν αὐτὴν στήλην, καὶ ἀρχίζομεν νὰ προσθέτωμεν τὰς μονάδας τῆς μικροτέρας ὑποδιαιρέσεως. Ἐὰν τὸ ἄθροισμά των δὲν συγκροτῇ μίαν μονάδα τοῦ ἀμέσως ἀνωτέρου εἴδους, τὸ γράφομεν ὑποκάτω· ἐὰν ὅμως περιέχῃ πολλὰς μονάδας, ὥστε νὰ σχηματίζῃ μίαν ἢ πολλὰς μονάδας τῆς ὑποδιαιρέσεως τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας, γράφομεν ὑποκάτω τῆς στήλης τὴν ἐξ-

αχθεῖσαν ὑπεροχὴν τοῦ ἀθροίσματος ἐπὶ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν μονάδων τοῦ ἀνωτέρου εἴδους, καὶ κρατοῦμεν αὐτὰς, διὰ νὰ τὰς προσθέσωμεν μὲ τὰς ὁμοίας των, ὑπὸ τὰς ὁποίας ἐργαζόμεθα, ὡς ἀνωτέρω.

Πρῶτον παράδειγμα.

Προτείνεται νὰ προστεθῶσιν οἱ ἀριθμοί.

λίβρ.	σολ.	δην.	
765	19	7	
1279	17	6	
915	13	11	
2594	19	8	
589	8	6	
6145 λίβ.	19 σολ.	2 δην.	ἄθροισμα.
3333	33	0 ...	βάσανος.

Προσθέτοντες κατὰ πρῶτον τὰ δηνάρια εὑρίσκομεν κεφάλαιον 38, τὰ ὁποῖα περικλείουσι 3 φοραῖς 12 δηνάρια, ἢ 3 σολδία καὶ 2 δηνάρια, γράφομεν τὰ 2 δηνάρια, καὶ κρατοῦμεν 3 σολδία, διὰ νὰ τὰ προσθέσωμεν μὲ τὰς μονάδας τῶν σολδίων.

Εὑρίσκομεν δὲ νέον κεφάλαιον 39, γράφομεν 9 καὶ κρατοῦμεν τρεῖς δεκάδας, διὰ νὰ τὰς ἑνώσωμεν μὲ τὴν στήλην τῶν δεκάδων τῶν σολδίων, ὅθεν ἔχομεν 7 δεκάδας σολδίων· ἐπειδὴ δὲ δύο δεκάδες σολδίων κάμνουν μίαν λίβραν, πέρνομεν τὸ ἥμισυ τοῦ 7, τὸ ὁποῖον εἶναι 3 καὶ 1 ὑπόλοιπον· γράφομεν τὸ τοιοῦτον ὑπόλοιπον εἰς τὴν δεκάδα τοῦ σολδίου, καὶ κρατοῦμεν τὰς 3 λίβ. διὰ νὰ τὰς ἑνώσωμεν μὲ τὰς λίβρας, καὶ ἀθροίζομεν αὐτὰς κατὰ τὴν συνήθειαν.

Ἡ βάσανος ἐκτελεῖται ὡσαύτως, ὡς ἐκείνη τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν (ὅρα ἀριθμ. 15).

Δεύτερον Παράδειγμα.

Ἂς προστεθῶσιν οἱ ἀκόλουθοι ἀριθμοί· (ἡ ἀρχικὴ μονὰς εἶναι ἡ λίτρα.)

λίτ.	ἡμ.	ουγ.	δρ.	κόκ.
59	1	7	6	46
47	0	2	7	39
87	1	5	3	53
37	1	7	5	29
232	1	7	7	23
3̸2̸	1̸	1̸	2̸	0

167	72
23	2

Ἐκ τοῦ ἀθροίσματος τῶν κόκκων λαμβάνομεν 167, τὸ ὁποῖον γράφομεν εἰς τὸ πλάγιον, ὡς ἐδῶ ἀνωτέρω φαίνεται, καὶ διαιροῦμεν αὐτὸ διὰ τοῦ 72 ἀριθμοῦ τῶν κόκκων τῶν περιεχομένων εἰς τὴν δραχμὴν, καὶ συνάγομεν πηλίκον 2, καὶ ὑπόλοιπον 23, τὸ ὁποῖον γράφομεν ὑπὸ τὴν στήλην τῶν κόκκων, κρατοῦμεν δὲ τὰ 2 διὰ νὰ τὰ ἑνώσωμεν μὲ τὰς δραχμὰς, καὶ εὑρίσκομεν κεφάλαιον 23, τουτέστι 2 φοραῖς 8 δραχμὰς πλέον 7 ἢ δύο οὐγγίας, καὶ 7 δραχμὰς, τὰς ὁποίας γράφομεν ὑπὸ τὰς δραχμὰς, καὶ κρατοῦμεν τὰς δύο οὐγγίας, διὰ νὰ τὰς φέρωμεν εἰς τὴν στήλην τῶν οὐγγιῶν, ἐπὶ τῶν ὁποίων πράττομεν, ὡς καὶ ἐπὶ τῶν ἀκολούθων, ὡς ἐπράξαμεν εἰς τὰς προηγουμένας.

Ἀφαίρεσις τῶν συμμιγῶν ἀριθμῶν.

§. 71. Γράφομεν τὸν μικρότερον ἀριθμὸν ὑπὸ τὸν μεγαλήτερον οὕτως, ὥστε αἱ μονάδες τοῦ ἰδίου εἴδους νὰ ἀνταποκρίνωνται, καὶ ἀρχίζομεν τὴν ἀφαίρεσιν ἀπὸ τὰς μονάδας τοῦ μικροτέρου εἴδους. Ἐὰν ὁ κάτω ἀριθμὸς τῶν μονάδων τούτων δύναται νὰ ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τὸν ἄνω, ὑπογράφομεν τὸ ὑπόλοιπον, ἐὰν δὲ τὸ ἐναντίον, δανειζόμεθα μίαν μονάδα ἀπὸ τὴν ἀμέσως ἀνωτέραν ὑποδιαίρεσιν, τὴν ὁποίαν ἀνάγοντες εἰς μονάδας τοῦ ἰδίου εἴδους, ἑνόνομεν αὐτὰς μὲ τὰς μονά-

δας, ἐκ τῶν ὁποίων πρότερον δὲν ἐδυνάμεθα νὰ ἀφαιρέσωμεν τὰς μονάδας τοῦ κάτω ἀριθμοῦ, προσέχοντες νὰ ἐλαττόνωμεν κατὰ μονάδα τὸν ἀπὸ τὸν ὁποῖον ἐδανείσθημεν ἀριθμόν.

Πρῶτον Παράδειγμα.

	λίβ.	σολ.	δη.
Ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ	327	11	7
νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸν	189	15	11
Ὑπόλοιπον .	137	15	8
Βάσανος .	327	11	7

μὴ δυνάμενοι νὰ ἀφαιρέσωμεν 11 δηνάρια ἀπὸ 7, δανειζόμεθα ἓν σολδίον ἀπὸ τὰ 11, τὸ ὁποῖον δύναται 12 δηνάρια, τὰ ὁποῖα ἑνωμένα μὲ τὰ 7 δίδουν 19 δηνάρια, καὶ λέγομεν 11 ἀπὸ τὰ 19 μένουν 8, τὰ ὁποῖα γράφομεν ὑποκάτω τῶν δηναρίων.

Μετὰ ταῦτα ἀπὸ τὰ 11, ἢ μᾶλλον 10, διότι προεδανείσθημεν 1, μὴ δυνάμενοι νὰ ἀφαιρέσωμεν 15 σολδία, δανειζόμεθα μίαν λίβραν, ἥτις ἰσοδυναμεῖ μὲ 20 σολδία, τὰ ὁποῖα ἑνόνοντες μὲ τὰ 10 ἔχομεν 30 σολδία, καὶ ἀφαιροῦντες 15 ἀπὸ τὰ 30, λαμβάνομεν 15, τὰ ὁποῖα γράφομεν ὑπὸ τὴν στήλην τῶν σολδίων.

Τέλος πάντων ἀφαιροῦντες 189 ἀπὸ τὰ 326, εὑρίσκομεν ὑπόλοιπον 137. Οὕτως τὸ ὑπόλοιπον τῆς ἀφαιρέσεως εἶναι 137$^{\text{λίβ.}}$ 15$^{\text{σολ.}}$ 8$^{\text{δην.}}$, ὡς δυνάμεθα νὰ βεβαιωθῶμεν, συναθροίζοντες τὸ ὑπόλοιπον καὶ τὸν μικρότερον ἀπὸ τοὺς δύο ἀριθμούς.

Δεύτερον Παράδειγμα.

	ὀρ.	ποδ.	δακ.	γρ.	
Ἐκ τοῦ	39	4	7	5	
θέλομεν νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸν	27	4	11	7	
	11	4	7	10	Ὑπόλοιπον.
	39	4	7	5	Βάσανος.

Ἐπειδὴ δὲν ἠμποροῦμεν νὰ ἀφαιρέσωμεν 7 γραμμὰς ἀπὸ 5, δανειζόμεθα ἕνα δάκτυλον, ὅστις δύναται 12 γραμμάς, τὰς ὁποίας ἑνόνοντες μὲ τὰς 5 συνάγομεν 17, καὶ λέγομεν 7 ἀπὸ τὰ 17 μένουν 10.

Μετὰ ταῦτα, ἐπειδὴ 11 δὲν δύνανται νὰ ἀφαιρεθῶσιν ἀπὸ τὰ 6, δανειζόμεθα παρομοίως ἕνα πόδα, ὅστις κάμνει 12 δακτύλους καὶ 6, τὰ ὁποῖα ἔχομεν, 18, τὰ ὁποῖα ἀφαιρούμενα ἀπὸ τὰ 18 δίδουν 7. Περνῶντες δὲ εἰς τοὺς πόδας, καὶ μὴ δυνάμενοι νὰ ἀφαιρέσωμεν 5 ἀπὸ τοὺς 3, δανειζόμεθα μίαν ὀργυιάν, ἥτις ἔχει 6 πόδας, οἱ ὁποῖοι ἑνωμένοι μὲ τοὺς 3 κάμνουν 9, καὶ ἀφαιροῦντες ἀπὸ τὸ 9 τὰ 5 ἔχομεν 4· καὶ ἀφαιροῦντες τέλος πάντων 27 ἀπὸ τὰς 38 ὀργυιὰς ἔχομεν διὰ ὑπόλοιπον 11. Λοιπὸν τὸ ζητούμενον ὑπόλοιπον τὸ εἶναι 11$^{ὀρ.}$ 4$^{πδ.}$ 7$^{δακ.}$ 10$^{γραμ.}$

Τρίτον Παράδειγμα.

	λίτ.	ουγ.	δρ.	κόκ.	
Ἓν ἀγγεῖον γεμάτον ὑγροῦ ζυγιάζει . .	17	5	4	17	
(*)Ἡ πλημμέλεια ἢ τὸ βάρος τοῦ κενοῦ ἀγγείου εἶναι	4	7	3	49	
Ζητεῖται τὸ βάρος τοῦ ὑγροῦ.	12	12	5	40	Ὑπόλοιπον.
	17	5	4	17	Δοκιμή.

Εἶναι φανερόν, ὅτι ἀφαιροῦντες ἀπὸ τὸ ὅλον βάρος τοῦ ὑγροῦ καὶ τοῦ ἀγγείου τὸ βάρος τοῦ ἀγγείου μόνον, τὸ ὑπόλοιπον θέλει ἐκφράζει τὸ τοῦ ὑγροῦ βάρος.

Καὶ ἐπειδὴ δὲν δυνάμεθα νὰ ἀφαιρέσωμεν 49 ἀπὸ τὰ 17, δανειζόμεθα μίαν δραχμήν, ἡ ὁποία ἰσο-

(*) Πλημμέλειαν ὠνόμασα τὴν παρὰ τοῖς Γάλλοις (tare). (δηλαδὴ ξεπεσμός). Ὁ Μ.

δυναμεῖ μὲ 72 κόκκους, καὶ λέγομεν 49 ἀπὸ τὰ 72 πλέον 17, ἢ ἀπὸ τὸ 89 μένουν 40. Μετὰ ταῦτα 6 ἀπὸ τὰ 8 πλέον 3, ἢ ἀπὸ τὰ 11 μένουν 5. Περνῶντες εἰς τὰς οὐγγίας, 7 ἀπὸ τὰ 4 εἶναι ἀδύνατον νὰ ἀφαιρεθῶσιν· ἀλλ' ἐπειδὴ ἡ λίτρα κάμνει 16 οὐγγίας, λέγομεν 7 ἀπὸ τὰς 16 πλέον 4, ἢ 20 μένουν 13. Τέλος πάντων 4 ἀπὸ τὰς 16 μένουν 12. Λοιπὸν τὸ ὁλικὸν βάρος τοῦ ὑγροῦ εἶναι 12λιτ. 13ουγ. 5δρ. 40κοκ.

Πολλαπλασιασμὸς τῶν συμμιγῶν ἀριθμῶν.

Αὕτη ἡ πρᾶξις, πλέον συμπεπλεγμένη ἀπὸ τὰς δύο προτέρας, ἀπαιτεῖ μεγάλην προσοχὴν, καὶ διὰ παραδειγμάτων σαφηνίζεται καλλίτερα.

Διὰ πλειοτέραν σαφήνειαν διακρίνομεν δύο ἀρχικὰς περιστάσεις.

Ἡ πρώτη εἶναι, ὅταν τοῦ πολλαπλασιαστέου ὄντος συμπεπλεγμένου, ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι ἁπλοῦς, καὶ ἡ δευτέρα, ὅταν, ὄντος τοῦ πολλαπλασιαστέου συμπεπλεγμένου, ἢ μὴ, ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι συμπεπλεγμένος.

§. 72. Ἂς θεωρήσωμεν κατὰ πρῶτον τὴν πρώτην περίστασιν, καθ' ἣν τοῦ πολλαπλασιαστέου ὄντος συμπεπλεγμένου, ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι ἁπλοῦς, ἢ ἀκέραιός τις ἀριθμός.

	λιβρ.	σολ.	δην.
Πολλαπλασιασθήτω.	247	17	11.
ἐπὶ	9		
	2231	1	3.

Εὑρίσκομεν αὐτὸ τὸ γινόμενον, πολλαπλασιάζοντες ὅλα τὰ μέρη τοῦ πολλαπλασιαστέου, ἀρξάμενοι ἀπὸ τὰ πλέον μικρότερα ἐπὶ τὸν πολλαπλαστὴν, προσ-

έχοντες νὰ κρατῶμεν διὰ τὰς ἀνωτέρας τάξεις, τὰς μονάδας τῶν κατωτέρων γινομένων.

Οὕτως λέγομεν 9 φορ. 11 δηνάρια κάμνουν 99, τὰ ὁποῖα περιέχουσιν 8 φοραῖς 12 δηνάρια, ἢ 8 σολδία καὶ 3 δηνάρια. Γράφομεν τὰ 3 δηνάρια, καὶ κρατοῦμεν τὰ 8 σολδία, διὰ νὰ τὰ φέρωμεν εἰς τὸ γινόμενον τῶν σολδίων.

Μετὰ ταῦτα 9 φορ. 7 κάμνουν 63 καὶ 8 τὰ κρατηθέντα σχηματίζουσιν 71 σολδία, γράφομεν ἕνα, καὶ κρατοῦμεν 7 δεκάδας σολδίων· 9 φορ. 1 δίδουν 9 καὶ 7 τὰ κρατηθέντα σχηματίζουσι 16 δεκάδας σολδίων, καὶ ἐπειδὴ δύο δεκάδες σολδίων σχηματίζουν μίαν λίβραν, λαμβάνομεν τὸ ἥμισυ τοῦ 16, τὸ ὁποῖον εἶναι 8, καὶ τὸ ὁποῖον βαστοῦμεν, διὰ νὰ τὸ ἑνώσωμεν μὲ τὸ γινόμενον τῶν λιβρῶν, ἐπὶ τῶν ὁποίων πράττομεν, κατὰ τὰς ἑρμηνείας τὰς περὶ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν, καὶ συνάγομεν τέλος πάντων διὰ τὸ ζητούμενόν γινόμενον 2231 λιβ. 1 σολ. 3 δην.

Εἰς τοῦτο τὸ παράδειγμα, ὅπου ὁ πολλαπλασιαστὴς γράφεται δι' ἑνὸς μόνου ψηφίου, ἀρχίσαμεν ἀπὸ τὰ δεξιὰ, καὶ ἐπροσδιορίσαμεν διαδοχικῶς τὰ σολδία τὰ συναγόμενα ἀπὸ τὸ γινόμενον τῶν δηναρίων, καὶ τὰς λίβρας τὰς συναγομένας ἀπὸ τὸ γινόμενον τῶν σολδίων. Ἐὰν ὅμως ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶχε πολλὰ ψηφία, οἱ αὐτοὶ προσδιορισμοὶ δὲν ἐκτελοῦντο μὲ τόσην ταχύτητα, ἢ μὲ τὴν ἐνθύμησιν· καὶ διὰ νὰ φθάσωμεν ἐχρειάζετο νὰ κάμωμεν ξεχωριστὰ τοὺς πολλαπλασιασμοὺς, καὶ μετὰ ταῦτα τὰς διαιρέσεις, διὰ νὰ τρέψωμεν τὰ μικρότερα εἴδη εἰς τὰ μεγαλήτερα, ἡ ὁποία πρᾶξις ἀπαιτοῦσε μέγιστον ὑπολογισμόν. Εἰς ταύτην τὴν περίστασιν ἡ πρᾶξις ἐκτελεῖται ἁπλούστερα, ὡς ἐδῶ θέλομεν ἰδεῖ εἰς τὸ ἀκόλουθον παράδειγμα.

Νὰ πολλαπλασιάσωμεν		λιβ.	σολ.	δην.	
τὸν ἀριθμὸν		784	15	9	
	ἐπὶ	857			
		λιβ.			
		5488			
		3920			
		6272			
διὰ $10^{\sigma o\lambda.}$		428	$10^{\sigma o\lambda.}$		
5		214	5		
$6^{\delta\eta\nu.}$		21	8 . . .		$6^{\delta\eta\nu.}$
3		10	14		3
		$672562^{\lambda\iota\beta.}$	$17^{\sigma o\lambda.}$		$9^{\delta\eta\nu.}$

Ἀφ' οὗ ἐκτελέσαμεν τὸν πολλαπλασιασμὸν τοῦ 784 ἐπὶ 857 κατὰ τὸ σύνηθες περνῶμεν εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν τῶν 15 σολδίων ἐπὶ 857. Διὰ νὰ λάβωμεν ἀμέσως τὸ τοιοῦτον γινόμενον εἰς λίβρας, παρατηροῦμεν, ὅτι ἐὰν εἴχαμεν μίαν λίβραν, ἥτις νὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 857, τὸ γιγόμενον ἦτον 857λιβ. ἀλλὰ 15 σολδία ἢ $\frac{15}{20}$ τῆς λίβρας ἄλλο δὲν εἶναι παρὰ τὰ τρία τέταρτα τῆς λίβρας, ἢ μᾶλλον ἀναλυομένων εἰς 10 σολδία καὶ 5 σολδία εἶναι τότε τὸ ἥμισυ πλέον τὸ τέταρτον. Λοιπὸν τὸ ζητούμενον γινόμενον σύγκειται ἀπὸ τὸ ἥμισυ τῶν 857 λιβρῶν, πλέον τὸ τεταρτημόριον τῶν 857, ἢ τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ αὐτὸ, πλέον τὸ ἥμισυ τοῦ ἡμίσεος τῶν 857 λιβρῶν· οὕτως λέγομεν: διὰ 10 σολδία, τὸ ἥμισυ τῶν 867, τὸ ὁποῖον εἶναι ἴσον μὲ 428 (ὅρα ἀριθμ. 30), καὶ μένει μία λίβρα, ἥτις κάμνει 20 σολδία, τῆς ὁποίας τὸ ἥμισυ εἶναι 10, καὶ συνάγομεν 428 λίβρας καὶ 10 σολδία, διὰ τὸ γινόμενον τῶν σολδίων ἐπὶ 857.

Λαμβάνοντες τώρα τὸ ἥμισυ τῶν 428 λιβρῶν καὶ 10 σολδίων, συνάγομεν 214 λίβρα, καὶ 5 σολδία διὰ τὸ γινόμενον τῶν 5 σολδίων ἐπὶ 857.

Περνῶντες εἰς τὰ δηνάρια παρατηροῦμεν, ὅτι 9 δηνάρια ἀναλύονται εἰς 6 καὶ 3 δηνάρια, ἀλλὰ 6 δηνάρια εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ σολδίου, καὶ ἑπομένως τὸ ἥμισυ τοῦ πεμπτημορίου, ἢ τὸ 10ον τῶν 5 σολδίων· λοιπὸν τὸ γινόμενον τῶν 6 διναρίων ἐπὶ 857 εἶναι τὸ 10ον τοῦ προηγουμένου γινομένου 214λιβ. καὶ 5σολ. Λαμβάνοντες κατὰ πρῶτον τὸ 10ον τῶν 214, ἔχομεν πηλίκον 21, καὶ ὑπόλοιπον 4 λίβρας, αἱ ὁποῖαι ἰσοδυναμοῦσι μὲ 4 φοραῖς 20, ἢ 80 σολδία, τὰ ὁποῖα ἑνόνομεν μὲ 5 σολδία· τὸ 10ον τῶν 85 εἶναι 8 σολδία, καὶ μένουν 5 σολδία, τὰ ὁποῖα ἰσοδυναμοῦν μὲ 5 φοραῖς 12 ἢ 60 δηνάρια. Τέλος πάντων τὸ 10ον τοῦ 60 εἶναι 6· ὅθεν τὸ γινόμενον τῶν 6. δηναρίων ἐπὶ 857 εἶναι 21λιβρ. 8σολ., 6δην.

Διὰ νὰ λάβωμεν τὸ γινόμενον τῶν 3 δηναρίων ἐπὶ 857, ἀρκεῖ νὰ λάβωμεν τὸ ἥμισυ τοῦ προηγουγουμένου γινομένου, καὶ εὑρίσκομεν 10λιβ. 14σολ. καὶ 3δην.

Ὑπογραμμίζοντες τὸ ὅλον, καὶ ἀθροίζοντες τὰ μερικὰ γινόμενα λαμβάνομεν 672562λιβ. 17σολ. καὶ 9δη. τὸ ὅλον γινόμενον.

Οὗτος ὁ τρόπος τοῦ εὑρίσκειν τὰ γινόμενα τῶν ὑποδιαιρέσεων τῆς ἀρχικῆς μονάδος τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐπὶ τὸν πολλαπλασιαστὴν, καλεῖται μέθοδος τῶν ὁμοίων μεριδίων, ἐπειδὴ συνίσταται εἰς τὸ νὰ ἀναλύσῃ τοὺς ἀριθμοὺς τῶν μονάδων τῶν ὑποδιαιρέσεων εἰς μερίδια ὅμοια εἴτε τῆς ἀρχικῆς μονάδος, εἴτε μερικὰ τούτων εἰς ἄλλα, τουτέστι (ἀριθ. 48.) εἰς μερίδια περιεχόμενα μὲ ἀκρίβειαν τὸ ἓν εἰς τὸ

ἄλλο, καὶ τότε διὰ νὰ σχηματίσωμεν γινόμενον ἀνάλογον τῶν τοιούτων ὁμοίων μεριδίων ἐξ ἑνὸς τῶν προτέρων γινομένων, λαμβάνομεν ἓν μερίδιον σημειωμένον ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν τῶν φορῶν, κατὰ τὰς ὁποίας τὰ ὅμοια μερίδια, τὰ ὁποῖα θεωροῦμεν, περιέχονται εἰς τὰ μερίδια τὰ ἀνταποκρινόμενα εἰς τοῦτο τὸ γινόμενον.

Ἔστω π. χ. νὰ πολλαπλασιάσωμεν διὰ

	ὀρ.	ποδ.	δακ.	γρ.
	67	5	6	5
	59			
	603ὀρ			
	335			
διὰ 3ποδ.	29	3ποδ.		
2	19	4		
6ποδ.	4	5	6δακ.	
1	0	4	11	
4γρ.	0	1	7	8γρ.
1	0	0	4	11
	ὀρ.	ποδ.	δακ.	γρ.
	4007	2	6	7

Διὰ νὰ λάβωμεν τὸ γινόμενον τῶν 5 ποδῶν ἐπὶ 59, παρατηροῦμεν, ὅτι 5 πόδες ἀναλύονται εἰς 3 πόδας σχηματίζοντας $\frac{1}{2}$ ὀργυιάν, καὶ 2 πόδας σχηματίζοντας $\frac{1}{3}$ τῆς ὀργυιᾶς. Λοιπὸν ἐπειδὴ τὸ γινόμενον μιᾶς ὀργυιᾶς ἐπὶ 59 εἶναι 59 ὀργυιαὶ, ἐκεῖνο τῶν 5 ποδῶν ἐπὶ 59 σύγκειται ἀπὸ τὸ ἥμισυ τῶν 59 ὀργυιῶν πλέον τὸ τριτημόριον τῶν 59. Λαμβάνοντες κατὰ πρῶτον τὸ ἥμισυ τῶν ὀργυιῶν συνάγομεν 29 μὲ ὑπόλοιπον 1 ὀργυιὰν, ἥτις ἰσοδυναμεῖ μὲ 6 πόδας, τῶν ὁποίων τὸ ἥμισυ εἶναι 3 πόδες. Οὕτως τὸ γινό-

μενον τοῦ 3 ποδ. ἐπὶ 59 εἶναι 29 όρ. 3 ποδ. Παρομοίως τὸ τρίτον μέρος τοῦ 59 εἶναι 19 διὰ 57, καὶ μένει 2 ὀργυιαὶ ἢ 12 πόδες, τῶν ὁποίων τὸ τριτημόριον εἶναι 4. Ἔχομεν λοιπὸν 19 όρ. 4 ποδ. γινόμενον τῶν 2 ποδῶν πολλαπλασιαζομένων ἐπὶ 59.

Ἂς ἔλθωμεν τώρα εἰς τοὺς δακτύλους, παρατηροῦντες, ὅτι 6 δάκτυλοι σχηματίζουσι τὸ ἥμισυ ἑνὸς ποδὸς, ἢ τὸ τεταρτημόριον 2 ποδῶν, οὕτω διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον τῶν 6 δακτύλων ἐπὶ 59, ἀρκεῖ νὰ λάβωμεν τὸ τεταρτημόριον τοῦ γινομένου 19 όργ. 4 ποδ., ὅθεν προκύπτει 4 όργ. 5 ποδ. 6 δακ.

Ἤδη δὲ 5 γραμμαὶ ἀναλύονται εἰς 4 γραμμὰς πλέον 1 γρ., καὶ ἐπειδὴ 4 γραμμαὶ εἶναι τὸ τριτημόριον τοῦ δακτύλου, ὅςτις εἶναι τὸ $\overline{6}$ον τῶν 6 δακτύλων, ἕπεται ὅτι 4 γραμμαὶ σχηματίζουσι τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ $\frac{1}{6}$ ἢ τὸ $\frac{1}{18}$ τῶν 6 δακτύλων· διὰ τοῦτο πρέπει νὰ λάβωμεν τὸ $\overline{18}$ον τῶν 4 όργ. 5 ποδ. 6 δακ., τὸ ὁποῖον δὲν εἶναι τόσον εὔκολον· ἀλλ' εὐκολυνόμεθα, ὅταν σχηματίσωμεν συμβοηθητικόν τι γινόμενον (ἀναρμόστως καλούμενον ψευδὲς γινόμενον), τουτέστι τὸ γινόμενον τοῦ ἑνὸς δακτύλου ἐπὶ 59, ἀλλὰ τὸ τοιοῦτον γινόμενον εἶναι τὸ $\overline{6}$ον τῶν 4 όργ. 5 ποδ. 6 δακ., καὶ εἶναι ἴσον μὲ 0 όργ. 4 ποδ. 11 δακ., τὸ ὁποῖον γράφομεν μὲ σημεῖον ἐξαλείψεως ὑπὸ τὰ ἄλλα γινόμενα, ὡς ἄνω βλέπομεν, καὶ τὸ ὁποῖον δὲν ὑποβάλλομεν εἰς τὸν ὑπολογισμόν. Μετὰ ταῦτα ἐξάγομεν τὸ γινόμενον τῶν 4 γραμμῶν ἐπὶ 59, λαμβάνοντες τὸ τριτημόριον τοῦ τοιούτου γινομένου, διὰ τὸ ὁποῖον εὑρίσκομεν 0 όργ. 1 ποδ. 7 δακ. 8 γρ.

Τέλος πάντων ἐπειδὴ μία γραμμὴ εἶναι τὸ τεταρτημόριον τῶν 4 γραμμῶν· διὰ τοῦτο λαμβάνομεν τὸ τέταρτον τοῦ τελευταίου γινομένου, καὶ εὑρίσκομεν 0 ὀρ. 0 ποδ. 4 δακ. 11 γρ., καὶ προσθέτοντες ὅλα αὐτὰ τὰ γινόμενα, συνάγομεν διὰ τὸ ὅλον γινόμενον 4007 ὀρ. 2 ποδ. 6 δακ. 7 γρ.

§. 73. Ἂς θεωρήσωμεν ἤδη τὴν περίστασιν, καθ' ἣν ὁ πολλαπλασιαστὴς ἔχει ἀκέραια καὶ ὑποδιαιρέσεις ἀρχικῆς μονάδος.

Ἀλλ' ἂς λάβωμεν κατ' ἀρχὰς παράδειγμα ὄχι τόσον πολὺ συμπεπλεγμένον.

Ἡ πήχη ἑνὸς ὑφάσματος δίδει 65 λιβ. 17 σολ. 11 δην. Ζητεῖται ἡ τιμὴ τῶν 39 πηχῶν καὶ $\frac{7}{8}$.

	λιβ.	σολ.	δην.	
	65	17	11	
	39	$\frac{7}{8}$		
	585 λ.			
	195			
διὰ 10 σ.	19	10		
5	9	15		
2	3	18		
6 δ.	0	19	6 δ.	
3	0	9	9	
2	0	6	6	8
$\frac{4}{8}$ π.	32	18	11	$\frac{1}{2}$..4..4
$\frac{2}{8}$	16	9	5	$\frac{3}{4}$..2..6
$\frac{1}{8}$	8	4	8	$\frac{7}{8}$..1..7
	2627 λ.	11 σ.	11 δ.	$\frac{1}{8}$

17	8
1	2

Ἐπειδὴ ἡ πήχη δύναται 65 λιβ. 17 σολ. 11 δην. εἶναι φανερὸν, ὅτι 39 πῆχαι καὶ $\frac{7}{8}$ πρέπει νὰ ἔχωσι

39 φοραῖς 65 $^{λίβ.}$ 17 $^{σολ.}$ 11 $^{δην.}$ πλέον $\frac{7}{8}$ τοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ, τουτέστι πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν κατὰ πρῶτον 65$^{λιβ.}$ 17$^{σολ.}$ 11$^{δην.}$ ἐπὶ 39, καὶ μετὰ ταῦτα ἐπὶ $\frac{7}{8}$. Ὁ πρῶτος πολλαπλασιασμὸς δὲν παριστάνει κάμμίαν δυσκολίαν κατὰ τὰ εἰρημένα ἀνωτέρω· ὅθεν ἄνευ ἐμποδίου συνάγομεν τὰ ὀκτὼ πρῶτα μερικὰ γινόμενα ὡς πρότερον.

Ἂς περάσωμεν εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν τῶν $\frac{7}{8}$. Ἤδη αὐτὸ τὸ κλάσμα ἀναλύεται εἰς $\frac{4}{8}$ ἢ $\frac{1}{2}$, πλέον $\frac{2}{8}$, τὸ ὁποῖον εἶναι τὰ ἥμισυ τῶν $\frac{4}{8}$ πλέον $\frac{1}{8}$, τὰ ὁποῖον εἶναι τὸ ἥμισυ τῶν $\frac{2}{8}$. Λοιπὸν εὑρίσκομεν τὸ γινόμενον ἐπὶ $\frac{7}{8}$, λαμβάνοντες πρῶτον τὸ ἥμισυ 65 $^{λίβ.}$ 17 $^{σολ.}$ 11.$^{δην.}$ ἔπειτα τὸ ἥμισυ τοῦ τοιούτου ἡμίσεος, καὶ τέλος πάντων τὸ ἥμισυ τούτου τοῦ νέου ἡμίσεος.

Λαμβάνοντες λοιπὸν τὸ ἥμισυ τοῦ πολλαπλασιαστέου, συνάγομεν 32 $^{λίβ.}$ 18 $^{σολ.}$ 11 $^{δην.}$ καὶ $\frac{1}{2}$, τὸ ὁποῖον γράφομεν ὑποκάτω τῶν ἀνωτέρω γινομένων.

Λαμβάνομεν ἤδη τὸ ἥμισυ τούτου τοῦ τελευταίου γινομένου· τὸ ἥμισυ τοῦ 32 εἶναι 16, τὸ ἥμισυ τοῦ 18 $^{σολ.}$ εἶναι 9, τὸ ἥμισυ τοῦ 11 εἶναι 5, καὶ μένει 1, τὸ ὁποῖον ἑνωμένον μὲ τὸ $\frac{1}{2}$ δίδει $\frac{3}{2}$, τῶν ὁποί-

ων τὸ ἥμισυ εἶναι $\frac{3}{4}$. Οὕτως τὸ νέον γινόμενον εἶναι $16^{\lambda i\beta.}\ 9^{\sigma o\lambda.}\ 5^{\delta\eta.}$ καὶ $\frac{3}{4}$.

Λαμβάνομεν ἀκόμη τὸ ἥμισυ τούτου τοῦ γινομένου, καὶ λέγομεν τὸ ἥμισυ τοῦ 16 εἶναι 8, τὸ ἥμισυ τοῦ 9 εἶναι 4 καὶ μένει ἓν σολδίον, τὸ ὁποῖον ἰσοδυναμεῖ μὲ 12 δηνάρια· 12 καὶ 5 κάμνουν 17, τῶν ὁποίων τὸ ἥμισυ εἶναι 8, καὶ μένει ἓν τὸ ὁποῖον ἑνωμένον μὲ τὰ $\frac{3}{4}$ δίδει $\frac{7}{4}$, τῶν ὁποίων τὸ ἥμισυ εἶναι $\frac{7}{8}$, καὶ οὕτως τὸ τελευταῖον τοῦτο γινόμενον εἶναι ἴσον μὲ $8^{\lambda i\beta.}\ 4^{\sigma o\lambda.}\ 8^{\delta\eta\nu.}$ καὶ $\frac{7}{8}$.

Πρέπει τώρα νὰ προσθέσωμεν ὅλα τὰ τοιαῦτα μερικὰ γινόμενα, ἀρχίζοντες ἀπὸ τὰ κλάσματα.

Ἐπειδὴ ὁ παρονομαστὴς 8 εἶναι ἐξ αὐτῆς τῆς φύσεως τῶν πράξεων πολλαπλάσιος τῶν ἄλλων δύο, τὸν βάλλομεν κατὰ πρῶτον (ἀριθμ. 55) εἰς τὰ δεξιὰ, καὶ ὀλίγον ἄνω τοῦ κλάσματος $\frac{1}{2}$, καὶ ὑπογραμμίζομεν. Μετὰ ταῦτα γράφομεν ὑπὸ τοῦ 8, καὶ εἰς τὴν ἰδίαν γραμμὴν τῶν κλασμάτων τὰ πηλίκα 4, 2 καὶ 1, προκύπτοντα ἐκ τῆς διαιρέσεως τοῦ 8 διὰ τῶν τριῶν παρονομαστῶν, (οἱ τοιοῦτοι εἶναι ἀριθμοὶ, ἐπὶ τοὺς ὁποίους πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τοὺς δύο ὅρους ἑκάστου κλασματος, διὰ νὰ λάβωσι τὸν αὐτὸν παρονομαστήν)· μετὰ ταῦτα πολλαπλασιάζομεν τοὺς ἀριθμητὰς τῶν τοιούτων κλασμάτων ἐπὶ ταῦτα τὰ πηλίκα, καὶ συνάγομεν 4, 6 καὶ 7, τῶν ὁποίων κάμνοντες τὸ ἄθροισμα εὑρίσκομεν 17· οὕτως τὸ κεφάλαιον

τῶν κλασμάτων εἶναι $\frac{17}{8}$ ἢ 2 καὶ $\frac{1}{8}$, τότε γράφομεν ὑπὸ τῶν κλασμάτων τὸ $\frac{1}{8}$, καὶ κρατοῦμεν τὰ δύο δηνάρια, διὰ νὰ τὰ φέρωμεν εἰς τὴν στήλην τῶν δηναρίων, ἐπάνω εἰς τὴν ὁποίαν πράττομεν, καθὰς καὶ εἰς τὰς ἄλλας, ὡς ἀνωτέρω ἐδιδάξαμεν. Οὕτω λοιπὸν τὸ ζητούμενον γινόμενον, τουτέστιν ἡ τιμὴ τῶν $39^{\text{ποδ.}}$ καὶ $\frac{7}{8}$ εἶναι $2627^{\text{λιβ.}}$ $11^{\text{σολ.}}$ $11^{\text{δην.}}$ καὶ $\frac{1}{8}$.

Ἐκ τούτου τοῦ παραδείγματος βλέπομεν, ὅτι ὅταν ὁ πολλαπλασιαστὴς περιέχῃ μέρη, ἢ ὑποδιαιρέσεις τῆς ἀρχικῆς μονάδος, ἡ τέχνη τῆς μεθόδου συνίσταται ἀκόμη εἰς τὸ νὰ ἀναλύσωμεν τὰς ὑποδιαιρέσεις τοῦ τοιούτου παράγοντος εἰς μερίδια ὅμοια τόσον σχετικῶς πρὸς τὴν ἀρχικὴν μονάδα, ὅσον σχετικῶς πρὸς ἄλληλα, μετὰ ταῦτα νὰ λάβωμεν ἀπὸ τὸν πολλαπλασιαστέον, ἢ ἀπὸ τὰ συναγόμενα γινόμενα, μερίδια δεικνυόμενα ἀπὸ τὰ ὅμοια ταῦτα μέρη.

Προβάλλεται ὡς δεύτερον παράδειγμα νὰ προσδιορίσωμεν τὴν τιμὴν τῶν $69^{\text{όρ.}}$ $4^{\text{ποδ.}}$ $11^{\text{δακ.}}$ ἑνός τινος τεχνήματος, ὑποθέτοντες, ὅτι κάθε ὀργυιὰ ἔχει $25^{\text{λιβ.}}$ $19^{\text{σολ.}}$ $5^{\text{δην.}}$

		λίβ.	σολ.	δην.				
		25	19	5				
		οργ.	π.	δακ.				
		69	4	11				
		225λ.						
		150						
διὰ	10σ. .	34	10σ.					
	5 . .	17	5					
	2 . .	6	18					
	2 . .	6	18					
	4δ. .	1	3					
	1 . .	0,	5	9δην.	$\frac{1}{2}$ . .	$\frac{72}{36}$ . .		36
	3π. .	12	19	8 . .	$\frac{1}{2}$ . .	$\frac{72}{36}$ . .		36
	1 . .	4	6	6 . .	$\frac{5}{6}$ . .	12 . .		60
	6δ. .	2	3	3 . .	$\frac{5}{12}$ . .	6 . .		30
	3 . .	1	1	7 . .	$\frac{17}{24}$ . .	3 . .		51
	1 . .	0	7	2 . .	$\frac{41}{72}$ . .	1 . .		41
	1 . .	0	7	2 . .	$\frac{41}{72}$ . .	1 . .		41
		1813λ.	5σ.	4δ.	$\frac{43}{72}$			259 | 72
								43 | 3

Ὑποθέτομεν ἐδῶ, ὡς εἰς τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα, ὅτι ἐκτελέσαμεν κατὰ πρῶτον τὸν πολλαπλασιασμὸν τῶν 25 λίβ. 19 σολ. καὶ 5 δην. ἐπὶ 69, καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν τοιούτων πρώτων μερικῶν γινομένων ἐκφράζει τὴν τιμὴν τῶν 69 ὀργυιῶν.

Τώρα διὰ νὰ προσδιορίσωμεν τὴν τιμὴν τῶν 4 ποδ., 11 δακ. τοῦ αὐτοῦ τεχνήματος, παρατηροῦμεν, ὅτι μία ὀργυιὰ ἔχουσα 25 λίβ. 19 σολ. 5 δην., 4 πόδες ἢ 3 πόδες πλέον ἕνα πόδα, τουτέστι $\frac{3}{6}$ πλέον $\frac{1}{6}$ τῆς ὀργυιᾶς πρέπει νὰ ἔχῃ $\frac{3}{6}$, ἢ τὸ ἥμισυ πλέον $\frac{1}{6}$, ἢ

τὸ τρίτον τοῦ ἡμίσεος τῶν 25 λίβ. 19 σολ. 5 δην. παρομοίως 11 δάκτυλοι ἀναλύονται εἰς 6 δακτύλους πλέον 3δ., πλέον 2δ., ἢ $\frac{6}{12}$ πλέον $\frac{3}{12}$, πλέον $\frac{1}{12}$, πλέον $\frac{1}{12}$ τοῦ ποδὸς, διὰ τοῦτο πρέπει νὰ ἔχωσι τὸ ἥμισυ τῆς τιμῆς, τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ ἔχῃ εἷς ποῦς πλέον τὸ ἥμισυ τοῦ τοιούτου ἡμίσεος, πλέον τέλος πάντων δύο φοραῖς τὸ τρίτον τοῦ τοιούτου νέου ἡμίσεος. Πρέπει λοιπὸν νὰ σχηματίσωμεν ὅλα τὰ τοιαῦτα γινόμενα.

Κατὰ πρῶτον διὰ 3 πόδας λαμβάνομεν τὸ ἥμισυ τῶν 25 λίβ. 19 σολ. 5 δην., τὸ ὁποῖον δίδει 12 λίβ. 19 σολ. 8 δην. καὶ $\frac{1}{2}$· διὰ ἕνα πόδα λαμβάνομεν τὸ τριτημόριον τούτου τοῦ γινομένου, καὶ εὑρίσκομεν 4 λίβ. 6 σολ. 6 δην. καὶ $\frac{5}{6}$ (παρατηροῦντες, ὅτι ὅταν ἐφθάσαμεν εἰς τὰ δηνάρια, ἔμειναν 2, τὰ ὁποῖα ἑνωμένα μὲ τὸ $\frac{1}{2}$ δίδουσι $\frac{5}{2}$, τῶν ὁποίων τὸ τρίτον εἶναι $\frac{5}{6}$).

Διὰ 6 δακτύλους πέρνομεν τὸ ἥμισυ τοῦ προηγουμένου γινομένου, καὶ συνάγομεν 2 λίβ. 3 σολ. 3 δην. καὶ $\frac{5}{12}$· διὰ 3 δακτύλους λαμβάνομεν τὸ ἥμισυ τούτου τοῦ τελευταίου γινομένου, τὸ ὁποῖον δίδει 1 λίβ. 1 σολ. 7 δην. καὶ $\frac{17}{24}$. Τέλος πάντων διὰ ἕνα δάκτυλον

λαμβάνομεν τὸ τριτημόριον τούτου, καὶ ἔχομεν 0 $^{λίβ.}$ 7 $^{σολ.}$ 2 $^{δην.}$ καὶ $\frac{41}{72}$, τὸ ὁποῖον γράφομεν δύο φοραῖς.

Τὴν δὲ πρόσθεσιν τῶν τοιούτων μερικῶν γινομένων ἐκτελοῦμεν, ὡς εἰς τὸ πρῶτον παράδειγμα, παρατηροῦντες πάντοτε, ὅτι ὁ μεγαλήτερος παρονομαστὴς 72, εἶναι πολλαπλάσιος ὅλων τῶν ἄλλων· ὅθεν δυνάμεθα νὰ ἐφαρμόσωμεν εἰς τὰ κλάσματα τὰς ἁπλότητας τοῦ (ἀριθμοῦ 44).

Ἕως τοῦ νῦν ὁ πολλαπλασιαστέος παρέσταινε τὸν ἀριθμὸν τῶν λιβρῶν, σολδίων καὶ δηναρίων, ὅθεν τὸ γινόμενον παρέσταινε τὰς μονάδας καὶ τὰς ὑποδιαιρέσεις τῆς ἰδίας φύσεως. Ἰδοὺ νέον τι ζήτημα, εἰς τὸ ὁποῖον ὁ πολλαπλασιαστέος καὶ τὸ γινόμενον ἐκφράζουν ὀργυιάς, πόδας κ. τ. λ.

Εἶναι δυνατὸν νὰ ἐκτελεσθῶσιν 69 $^{ὀργ.}$ 4 $^{ποδ.}$ 11 $^{δακ.}$ ἐργασίας διὰ μίαν λίβραν, ζητεῖται ὁ ἀριθμὸς τῶν ὀργυιῶν τῶν ἐκτελουμένων διὰ 25 $^{λίβ.}$ 19 $^{σολ.}$ 15 $^{δην.}$

Εἶναι φανερὸν ὅτι, διὰ νὰ προσδιορισθῇ ὁ ἀριθμὸς τῶν ζητουμένων ὀργυιῶν πρέπει νὰ πολλαπλασιασθῶσιν αἱ 69 $^{ὀργ.}$ 4 $^{π.}$ 11 $^{δ.}$ ἐπὶ τὰς 25 λίβρας, καὶ ἐπὶ τὰς ὑποδιαιρέσεις τῆς λίβρας, τὰς ὁποίας περιέχει ἡ ἔκφρασις, ἐπειδὴ ἐὰν μὲ μίαν λίβραν ἐκτελέσθησαν 69 $^{ὀργ.}$ 4 $^{π.}$ 11 $^{δακ.}$, ἕπεται ὅτι μὲ 19 $^{σολ.}$ ἢ $\frac{19}{20}$ τῆς λίβρας δυνάμεθα νὰ κάμωμεν $\frac{19}{20}$ τῶν 69 $^{ὀρ.}$ 4 $^{π.}$ 11 $^{δ.}$, τουτέστι τὰ $\frac{10}{20}$ ἢ τὸ ἥμισυ, πλέον τὰ $\frac{5}{20}$, ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ ἡμίσεος, πλέον καὶ ἐφεξῆς.

Ἐνταῦθα παρασταίνεται ὁ πίναξ τῶν ὑπολογισμῶν τοῦ νέου τούτου πολλαπλασιασμοῦ.

	ὀρ.	π.	δακ.				
	69	4	11				
	$25^{\lambda.}$	$19^{\tau.}$	$5^{\delta.}$				
	$345^{\iota\rho.}$						
	138						
διὰ $3^{\delta.}$	12	$3^{\pi o\delta.}$					
1	4	1					
$6^{\delta.}$	2	0	$6^{\delta\alpha\kappa.}$				
3	1	0	3				
2	0	4	2				
$10^{\tau o\lambda.}$	34	5	5	$6^{\gamma\rho.}$			
5	17	2	8	9			
2	6	5	10	8 ...	$\frac{2}{5}$ ...	$\overset{20}{4}$ ...	8
2	6	5	10	8 ...	$\frac{2}{5}$ ...	4 ...	8
$4^{\delta\eta\nu.}$	1	0	11	9 ...	$\frac{2}{5}$ ...	4 ...	8
1	0	1	8	11 ...	$\frac{7}{20}$ ...	1 ...	7
	ὀρ.	ποδ.	δακ.	γρ.			
	1813	1	7	4 ... $\frac{11}{20}$			

31	20
11	1

§. 74. Σ. Κ. Παρατηροῦμεν, ὅτι εἰς τοῦτο τὸ τελευταῖον παράδειγμα οἱ δύο παράγοντες τοῦ πολλαπλασιασμοῦ εἶναι οἱ ἴδιοι μὲ ἐκείνους τοῦ προτελευταίου, καὶ μ᾽ ὅλον τοῦτο εὑρήκαμεν ἐξαγόμενα διαφορετικὰ ἀναμεταξύ των· ἐὰν ὄχι εἰς τὰ ἀκέραια, τὰ ὁποῖα εἰς αὐτὰ εὑρίσκονται, κἂν εἰς τὴν φύσιν τῆς ἀρχικῆς μονάδος καὶ εἰς τὰς ὑποδιαιρέσεις αὐτῆς. Βλέπομεν λοιπὸν, ὅτι ἡ ἀρχὴ τοῦ ἀριθμοῦ 26, ἥτις συνίσταται εἰς τὸ ὅτι δυνάμεθα νὰ ἀλλάξωμεν τὴν τάξιν τῶν παραγόντων τοῦ γινομένου, χωρὶς νὰ ἀλλαχθῇ τὸ γινόμενον, εἶναι κατὰ πάντα ἀκριβὴς μόνον εἰς τοὺς ἀφῃρημένους ἀριθμούς. Προκύπτει τῷ ὄντι ἀπὸ τὸν ὁρι-

σμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, ὅτι ὁσάκις θεωροῦμεν ἀριθμοὺς συγκεκριμένους, τὸ γινόμενον καὶ ὁ πολλαπλασιαστέος πρέπει νὰ εἶναι τῆς ἰδίας φύσεως *), ἐνῷ ὁ πολλαπλασιαστὴς, δυνάμενος κατὰ πρῶτον νὰ ἐκφράζῃ συγκεκριμένον ἀριθμὸν, πρέπει πάντοτε νὰ θεωρῆται, ὡς ἀριθμὸς ἀφῃρημένος, σημειόνων ποσάκις λαμβάνεται ὁ πολλαπλασιαστέος, ἢ ποῖον μέρος αὐτοῦ πρέπει νὰ ληφθῇ. Πρέπει λοιπὸν εἰς τὴν ἐκτέλεσιν πολλαπλασιασμοῦ τινὸς, νὰ προσδιορίζωμεν ποῖος τῶν δύο παραγόντων πρέπει νὰ ληφθῇ, ὡς πολλαπλασιαστέος, τὸ ὁποῖον δὲν εἶναι δύσκολον, ἐπειδὴ εἶναι τῆς ἰδίας φύσεως μὲ τὴν τοῦ γινομένου φύσιν, ἥτις δείκνυται ἐκ τῆς ἐκφράσεως τοῦ ζητήματος.

§. 75. Ἡ φυσικὴ βάσανος τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἐκτελεῖται διὰ τῆς διαιρέσεως· ἀλλ' ἐν γένει εἶναι ἁπλούστερον ἐξαιτίας τῶν συχνάκις περιεχομένων κλασμάτων εἰς τὸ γινόμενον νὰ διπλασιάζωμεν τὸν πολλαπλασιαστέον, καὶ νὰ λαμβάνωμεν τὸ ἥμισυ τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, ἢ τὸ ἀνάπαλιν. Παρακινοῦμεν δὲ τοὺς ἀρχαρίους νὰ ξαναλάβουν τὰ ἀνωτέρω παραδείγματα, καὶ νὰ κάμωσι κατὰ τὴν μέθοδον αὐτὴν τὰς βασάνους των.

Ἰδοὺ καὶ ἄλλα νέα παραδείγματα, ἐπὶ τῶν ὁποίων δύνανται νὰ γυμνασθῶσι.

1ον. Νὰ προσδιορίσωμεν τὴν τιμὴν 35 λιτ. 1 ημ. 5 ουγ. 4 δρ. 48 κοκ. μιᾶς ὁποιασδήποτε πραγματείας, ὑποτιθεμένου, ὅτι ἡ λίτρα δύναται 23 λίβ. 17 σολ. 8 δην.

Ἀπόκρισις· 855 λίβ. 8 σολ. 10 δην. $\frac{63}{64}$.

*) Ἡ ὀργυιὰ τῶν ἐπιφανειῶν καὶ τῶν στερεῶν εἰς την Γεωμετρίαν κάμνει ἐξχίρεσιν τῆς νέας ταύτης ἀρχῆς

2^{ον} Νὰ πολλαπλασιάσωμεν 139 $^{όρ.}$ 5 $^{π.}$ 0 $^{δ.}$ 11 $^{γρ.}$ ἐπὶ 25 $^{λίβ.}$ 19 $^{τολ.}$ 11 $^{δην.}$

Ἀπόκρισις· 3635 $^{όρ.}$ 2 $^{π.}$ 5 $^{δ.}$ 10 $^{γρ.}$ $\frac{133}{240}$.

3^{ον} Νὰ πολλαπλασιάσωμεν 31 $^{λίβ.}$ 17 $^{σολ.}$ 9 $^{δην.}$, ἐπὶ 15 $^{λίβ.}$ 11 $^{σ.}$ 5 $^{δ.}$ Τὸ γινόμενον θέλει εἶναι τῆς ἰδίας φύσεως μὲ τὴν τῶν δύο παραγόντων· μ᾽ ὅλον τοῦτο (ἀριθμ. 74) πρέπει πάντοτε νὰ θεωρῶμεν εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν τὸν πολλαπλασιαστὴν, ὡς ἀριθμὸν ἀφῃρημένον.

Ἀπόκρισις. 496 $^{λίβ.}$ 10 $^{τολ.}$ 7 $^{δην.}$ $\frac{47}{80}$.

Ἐν καιρῷ θέλομεν θεωρήσει ζητήματα ἀνήκοντα εἰς τὰς δύο τελευταίας πράξεις· ταῦτα εἶναι τὰ ζητήματα περὶ τόκου.

Διαίρεσις τῶν Συμμιγῶν ἢ συμπεπλεγμένων ἀριθμῶν.

Διακρίνομεν παρομοίως δύο ἀρχικὰς περιστάσεις, ἢ ὁ διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης εἶναι τῆς αὐτῆς φύσεως, ὡς πρὸς τὴν ἀρχικήν των μονάδα, ἢ εἶναι διαφορετικῆς φύσεως.

§. 76. Πρώτη περίστασις. Ἐὰν ὁ διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης εἶναι τῆς ἰδίας φύσεως σχετικῶς πρὸς τὴν ἀρχικὴν μονάδα, ἄγομεν (ἀριθμ. 66) τοὺς ἀριθμοὺς εἰς μονάδας τῆς πλέον μικροτέρας ὑποδιαιρέσεως, τὴν ὁποίαν περιέχουσιν οἱ τοιοῦτοι ἀριθμοί. Μετὰ ταῦτα ἐκτελοῦμεν τὴν διαίρεσιν τῶν δύο ἐξαγομένων, τρέποντες κατὰ τὸν κανόνα τοῦ (ἀριθ. 67) τὸ πηλίκον εἰς ἕνα ἀριθμὸν συμπεπλεγμένον τοιαύτης φύσεως, ὁποίαν ἀπαιτεῖ ἡ ἔκφρασις τοῦ ζητήματος· τοῦτο σαφηνίζεται ἐπὶ παραδειγμάτων.

Πρῶτον παράδειγμα.

Ἡ ὀργυιὰ ἑνός τινὸς τεχνήματος ἀξίζει 47 $^{λίβ.}$ 19 $^{σολ.}$ 5 $^{δην.}$ Ζητεῖται ποῖον ἀριθμὸν ὀργυιῶν δυνάμεθα νὰ ἐκτελέσωμεν διὰ 2728 $^{λίβ.}$ 17 $^{σολ.}$ 10 $^{δην.}$

Ἐὰν ἐγνωρίζαμεν τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν τῶν ὀργυιῶν, εἶναι φανερὸν, ὅτι πολλαπλασιάζοντες τὴν τιμὴν μιᾶς ὀργυιᾶς ἢ 47 $^{λίβ.}$ 19 $^{σ.}$ 5 $^{δ.}$, ἐπὶ τοῦτον τὸν ἀριθμὸν, ἔπρεπε νὰ παραχθῇ ὁ ἀριθμὸς 2728 $^{λίβ.}$ 17 $^{σολ.}$ 10 $^{δην.}$ Λοιπὸν πρέπει νὰ διαιρέσωμεν τοῦτον διὰ 47 $^{λίβ.}$ 19 $^{σ.}$ 5 $^{δ.}$

λιβ.	σολ.	δαχ.	λιβ.	σολ.	δαχ.
2728	17	10	47	19	5
20			20		
54577			959		
12			12		
654934			11513		

	11513			
654934	ορ.	ποδ.	δαχ.	γρ.
79284	56	5	5	9
10206				
6				
61236				
3671				
12				
44052				
9513				
12				
114156				
10539 ὑπόλοιπον.				

Ἀναχθέντων εἰς δηνάρια τῶν δύο δεδομένων ἀριθμῶν εὑρίσκεται, ὅτι ὁ πρῶτος καταντᾷ εἰς $\frac{654934}{240}$ τῆς λίβρας, καὶ ὁ δεύτερος εἰς $\frac{11513}{240}$ τῆς λίβρας. Τώρα διὰ νὰ διαιρέσωμον τὸν πρῶτον ἀριθμὸν διὰ τοῦ δευτέρου πρέπει (ἀριθμ. 59) νὰ ἀντιστρέψωμεν τὸ διαιροῦν κλάσμα, τὸ ὁποῖον δίδει $\frac{240}{11513}$

καὶ νὰ πολλαπλασιάσωμεν $\frac{654934}{240}$ ἐπὶ $\frac{240}{11513}$, ἀλλ' ὁ παράγων 240 μὲ τὸ νὰ εἶναι κοινὸς εἰς τὸ γινόμενον τοῦ ἀριθμοτοῦ, καὶ εἰς ἐκεῖνο τοῦ παρονομαστοῦ, δυνάμεθα νὰ τὸν ἐξαλείψωμεν, καὶ οὕτως συνάγομεν $\frac{654934}{11513}$. Λοιπὸν κατὰ πάντα λόγον πρέπει νὰ διαιρέσωμεν 654934 διὰ 11513, τὸ ὁποῖον εἶναι σύμφωνον μὲ τὸν προσυσταθέντα κανόνα.

Ἀλλὰ δὲν ἐμβαίνομεν εἰς κἀμμίαν περιγραφὴν περὶ τούτου, ἐπειδὴ βλέπομεν ἀνωτέρω τὴν πρᾶξιν, ἥτις ἐκτελεῖται κατὰ τὸν κανόνα τοῦ ἀριθμοῦ 67. Παρατηροῦμεν δὲ μόνον, ὅτι κατὰ τὴν ἔκφρασιν τοῦ ζητήματος ὁ κλασματικὸς ἀριθμὸς $\frac{654934}{11513}$ πρέπει νὰ ἐκτιμηθῇ εἰς ὀργυιὰς, πόδας, κ. τ. λ. Τὸ δὲ προκύπτον εἶναι $56^{όρ.}\ 4^{π.}\ 3^{δ.}\ 9^{γρ.}$ καὶ $\frac{10539}{11513}$.

Δεύτερον Παράδειγμα.

Ἐπληρώθη $1^{λίβ.}$ διὰ $15^{όρ.}\ 4^{π.}\ 7^{δ.}$ τεχνήματος τινὸς, ζητεῖται ἡ πληρωτέα ποσότης διὰ $329^{όρ.}\ 5^{π.}\ 11^{δ.}\ 8^{γρ.}$

Ἐὰν ἐγνωρίζαμεν τὸ ζητούμενον ἄθροισμα, ἐπολλαπλασιάζαμεν $15^{όρ.}\ 4^{π.}\ 7^{δ.}$ ἐπὶ αὐτὸ τὸ ἄθροισμα, καὶ εὑρίσκαμεν τὸν ἀριθμὸν $329^{όρ.}\ 5^{ποδ.}\ 11^{δ.}\ 8^{γρ.}$ ἢ μᾶλλον ὁσάκις $329^{όρ.}\ 5^{π.}\ 11^{δ.}\ 8^{γρ.}$ περιέχουσι $15^{όρ.}\ 4^{π.}\ 7^{δ.}$, τόσας λίβρας, σολδία καὶ δηνάρια πρέπει νὰ πληρώσωμεν. Ὅθεν δῆλον, ὅτι πρέπει νὰ διαιρέσωμεν τοὺς δύο τούτους ἀριθμοὺς τὸν ἕνα διὰ τοῦ ἄλλου, καὶ τὸ πηλίκον θέλει ἐκφράζει εἰς λίβρας, σολδία καὶ δηνάρια τὴν ζητουμένην ποσότητα.

ὀρ. π. δ. γ.	ὀρ. π. δ.	
329 5 11 8	15 4 7	285116 | 13620
6	6	12716 | $20^{\lambda i\beta.}\ 18^{\tau.}\ 8^{\delta.}$
1979	94	20
12	12	254320
13759	1135	118120
12	12	9160
285116	13620	12
		109920
		960.

Μετὰ τὴν ἀναγωγὴν τῶν δύο ἀριθμῶν εἰς γραμμάς, ἐπειδὴ ἡ γραμμὴ εἶναι ἡ μικροτέρα ὑποδιαίρεσις, εὑρίσκεται, ὅτι οἱ τοιοῦτοι ἀριθμοὶ δύνανται νὰ τεθῶσιν ὑπὸ τὴν μορφὴν $\frac{285116}{864}$ καὶ $\frac{13620}{864}$ τῆς ὀργυιᾶς. Λοιπὸν πολλαπλασιάζοντες τὸ πρῶτον ἐπὶ τὸ δεύτερον ἀντιστρεφόμενον, εὑρίσκομεν $\frac{285116}{13620}$, τρέποντες δὲ τὸν κλασματικὸν τοῦτον ἀριθμὸν εἰς συμπεπλεγμένον ἐκ λιβρῶν, εὑρίσκομεν τὸ ζητούμενον πηλίκον $20^{\lambda i\beta.}\ 18^{\tau.}\ 8^{\delta\eta\nu.}\ \frac{960}{13620}$ ἢ $\frac{16}{227}$.

Ἐὰν εἷς τῶν ὅρων τῆς διαιρέσεως δὲν ἦτον συμπεπλεγμένος, ἔπρεπε πάλιν νὰ ἄξωμεν καὶ τοὺς δύο ἀριθμοὺς εἰς μονάδας τῆς μικροτέρας διαιρέσεως τῆς εἰς τὸν ἕνα ἐξ αὐτῶν εὑρεθησομένης.

§. 77. Δευτέρα περίστασις. Ἔστω ὁ διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης φύσεως διαφορετικῆς σχετικῶς πρὸς τὴν ἀρχικὴν μονάδα.

Εἰς ταύτην τὴν περίστασιν δύο τινὰ συμβαίνουν, ἢ ὁ διαιρέτης εἶναι ἀμιγής, ἢ εἶναι συμμιγής.

1ον. Ἐὰν ὁ διαιρέτης εἶναι ἀμιγὴς, τὸν θεωροῦμεν ὡς ἀφῃρημένον, καὶ ἐκτελοῦμεν τὴν διαίρεσιν τοῦ διαιρετέου διὰ τοῦ διαιρέτου, ἀνάγοντες τὸ πηλίκον εἰς ἀρχικὰς μονάδας καὶ ὑποδιαιρέσεις τῆς ἰδίας φύσεως μὲ τὴν τοῦ διαιρετέου.

2ον. Ἐὰν ὁ διαιρέτης εἶναι συμμιγὴς, τὸν τρέπομεν (ἀριθμ. 66) εἰς κλασματικὸν τινὰ ἀριθμὸν τῆς ἀρχικῆς μονάδος, καὶ πολλαπλασιάζομεν τὸν διαιρετέον ἐπὶ τὸν παρανομαστὴν τοῦ διαιροῦντος κλάσματος, καὶ διαιροῦμεν τὸ γινόμενον διὰ τοῦ ἀριθμητοῦ, ἀνάγοντες πάντοτε τὸ πηλίκον εἰς ἀρχικὰς μονάδας καὶ ὑποδιαιρέσεις τῆς αὐτῆς φύσεως μὲ τὴν τοῦ διαιρετέου.

Πρῶτον παράδειγμα.

Ζητεῖται ἡ τιμὴ τῆς ὀργυιᾶς ἑνὸς τινὸς τεχνήματος, ὑποθετομένου, ὅτι ἐπληρώσαμεν 25469λίβ. 19σ. 7δ. διὰ 568ὀρ. τοῦ ἰδίου τεχνήματος.

Ἀφ' οὗ ἡ τιμὴ τῆς ὀργυιᾶς γνωσθῇ, πολλαπλασιαζομένη ἐπὶ 568 θέλει παράξει 25469λίβ. 19σ. 11δ. Διὰ τοῦτο πρέπει

λίβ.	σ.	δ.	568
25469	19	11	44λίβ. 16σ. 9δ.
2749			
477			
20			
9559			
3879			
471			
12			
5663			
551			

πει νὰ διαιρέσωμεν τοῦτον τὸν τελευταῖον ἀριθμὸν διὰ 568.

Ἀφ' οὗ διαιρέσωμεν 25469 διὰ 568 κατὰ τὴν συνήθειαν, καὶ εὕρωμεν 44 λίβρας διὰ πηλίκον, καὶ 477 λίβρας ὑπόλοιπον, ἄγομεν τὸ ὑπόλοιπον εἰς σολ.

δία πολλαπλιάζοντές το ἐπὶ 20, καὶ ἑνόνοντες μὲ τὸ γινόμενον τὰ 19 σολδία τοῦ διαιρετέου, ὅθεν προκύπτει $9559^{\sigma o\lambda.}$, τὰ ὁποῖα διαιροῦμεν ἔτι διὰ 568, καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον 16 σολδία, καὶ ὑπόλοιπον $471^{\sigma o\lambda.}$, τὰ ὁποῖα πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ 12, διὰ νὰ τὰ κάμωμεν δηνάρια, καὶ προσθέτοντες εἰς τὸ γινόμενον τὰ 11 δηνάρια τοῦ διαιρετέου εὑρίσκομεν $5663^{\delta.}$, τὰ ὁποῖα διαιροῦμεν πάλιν διὰ 568, ὅθεν προκύπτει πηλίκον 9 δηνάρια, καὶ ὑπόλοιπον 551. Λοιπὸν τὸ ὅλον πηλίκον, ἢ ἡ τιμὴ τῆς ὀργυιᾶς εἶναι $44^{\lambda\acute{\iota}\beta.}$ $16^{\sigma.}$ $9^{\delta.}$ καὶ $\frac{551}{568}$.

Δεύτερον Παράδειγμα.

Ἠγοράσθησαν $258^{\lambda\acute{\iota}\tau.}$ $1^{\acute{\eta}\mu.}$ $7^{o\acute{\upsilon}\gamma.}$ $5^{\delta\rho.}$ πραγματεῖαι μὲ τὴν ποσόσητα $3259^{\lambda\acute{\iota}\beta.}$ $17^{\sigma o\lambda.}$ $10^{\delta\eta\nu.}$ Ζητεῖται πόσον ἀξίζει μίαν λίτρα ταύτης τῆς πραγματείας.

Ἐὰν ἦτον γνωστὴ ἡ τιμὴ τῆς λίτρας, ἠθέλαμεν πολλαπλασιάσει αὐτὴν ἐπὶ $258^{\lambda\acute{\iota}\tau.}$ $1^{\acute{\eta}\mu.}$ $7^{o\acute{\upsilon}\gamma.}$ $5^{\delta\rho.}$ καὶ ἠθέλαμεν εὕρει $3259^{\lambda\acute{\iota}\beta.}$ $17^{\sigma.}$ $10^{\delta\eta\nu.}$ Διὰ τοῦτο πρέπει νὰ διαιρέσωμεν τὸν δεύτερον ἀριθμὸν διὰ τοῦ πρώτου.

```
             λίβ.    σολ.  δην.      λίτ. ἡμ. οὐγ. δρ.
             3259     17    10.      258   1   7   5.
              128                      2
           ______  _________        _______
            26072                     517
            6518                        8
           3259                     _______
διὰ 10σ. . . .   64                 4143
    5   . . .    32                     8
    2   . . .    12 . . . 16       _______
    6δ. . . .     3 . . .  4        33149
    3   . . .     1 . . . 12
    1   . . .     0 . . . 10 . . 8
        _________________________________
        417266λίβ. . . . 2σ. . . 8δ. | 33149
        ______                       |______________
         55776                       | λ.   σ.   δ.
        ______                       | 12   11   9
         19478
        ______
            20
        ______
        389562
        ______
         58072
        ______
         24923
            12
        ______
        299084
        ______
           743
```

Ἀφ' οὗ ἀλλάξωμεν τὸν διαιρέτην εἰς κλασματικὸν ἀριθμὸν, κατὰ τὸν κανόνα τοῦ (ἀριθμ. 66) εὑρίσκομεν διὰ τὸν τοιοῦτον διαιρέτην $\frac{33149}{128}$· ἐπειδὴ (ἀριθμ. 65) ἡ δραχμὴ εἶναι τὸ $128^{ον}$ τῆς λίτρας, ἀλλὰ διὰ νὰ διαιρέσωμεν $3259^{λίβ.}$ $17^{σολ.}$ $10^{δην.}$ διὰ $\frac{33149}{128}$, πρέπει (ἀριθμ. 59) νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν διαιρετέον ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν 128, ὅθεν προ-

ηὔπτει, ὡς ἐδῶ βλέπομεν, 417266$^{λίβ.}$ 2$^{σ.}$ 8$^{δ.}$, καὶ νὰ διαιρέσωμεν τὸ γινόμενον διὰ τοῦ ἀριθμητοῦ 33149. Αὕτη ἡ τελευταία πρᾶξις μᾶς ἄγει εἰς τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα, καὶ εὑρίσκομεν τὴν ζητουμένην τιμὴν 12$^{λίβ.}$ 11$^{σολ.}$ 9$^{δην.}$ $\frac{743}{33149}$.

Ταῦτα τὰ παραδείγματα ἀρκοῦν διὰ νὰ μᾶς δείξωσι τὴν ὁδὸν, τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ ἀκολουθήσωμεν εἰς κάθε ἄλλο παράδειγμα.

§. 78. Παρατήρησις. Ὁσάκις ὁ διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης εἶναι τῆς ἰδίας φύσεως σχετικῶς πρὸς τὴν ἀρχικὴν μονάδα, ἡ ἔκφρασις μόνη τοῦ ζητήματος δείχνει ὁποία πρέπει νὰ ἦναι ἡ φύσις τῆς ἀρχικῆς μονάδος τοῦ πηλίκου· ἀλλ' ὅταν ὁ διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης ἦναι διαφορετικῆς φύσεως, τὸ πηλίκον πρέπει νὰ ἦναι τῆς ἰδίας φύσεως μὲ τὴν τοῦ διαιρετέου· ἐπειδὴ ὁ διαιρετέος, μὲ τὸ νὰ ἦναι γινόμενον, πρέπει νὰ ἦναι (ἀριθμ. 74) τῆς ἰδίας φύσεως μὲ τοῦ ἑνὸς ἐκ τῶν δύο παραγόντων.

§. 79. Ἡ δὲ βάσανος τῆς διαιρέσεως ἠδύνατο νὰ ἐκτελεσθῇ διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ· ὅμως εἶναι πλέον σύντομον νὰ διπλασιάσωμεν τοὺς δύο ὅρους, ἢ νὰ λάβωμεν τὸ ἥμισυ αὐτῶν, καὶ τὸ πηλίκον πρέπει νὰ ἦναι τὸ αὐτό (ἀριθμ. 40).

Ἰδοὺ καὶ ἄλλα παραδείγματα.

1$^{ον.}$ Νὰ διαιρέσωμεν 1347$^{όρ.}$ 1$^{π.}$ 7$^{δ.}$ διὰ 9$^{όρ.}$ 5$^{π.}$ 7$^{δ.}$ 10$^{γρ.}$, καὶ τὸ πηλίκον πρέπει νὰ ἐκφράζῃ λίβρας, σολδία καὶ δηνάρια.

Ἀπόκρισις· 135$^{λίβ.}$ 10$^{σ.}$ 2$^{δ.}$ $\frac{466}{859}$.

2$^{ον.}$ Νὰ διαιρέσωμεν 859$^{λίβ.}$ 11$^{σ.}$ 7$^{δην.}$ διὰ 89$^{όρ.}$ 4$^{π.}$ 7$^{δ.}$ 10$^{γρ.}$.

Ἀπόκρισις· $9^{\lambda i\beta.}$ $11^{\sigma.}$ $6^{\delta.}$

$3^{ον}$. Νὰ προσδιορίσωμεν τὴν τιμὴν τῆς πήχης ἑνὸς ὑφάσματος, ὑποθέτοντες ὅτι 69 πῆχαι καὶ $\frac{7}{8}$ τῆς πήχης ἔχουσι $2728^{\lambda i\beta.}$ $17^{\sigma.}$ $9^{\delta.}$.

Ἀπόκρισις· $39^{\lambda i\beta.}$ $4^{\sigma.}$ $4^{\delta.}$ καὶ $\frac{176}{835}$.

ΚΕΦΑΛΕΟΝ Δ′.

Περὶ τῶν δεκαδικῶν κλασμάτων, καὶ περὶ τοῦ νέου συστήματος τοῦ βάρους (ἢ σταθμῶν) καὶ τῶν μέτρων.

---

§. $α^{ον}$. Περὶ τῶν Δεκαδικῶν κλασμάτων.

§. 80. Ἀφ᾽ ὅλους τοὺς τρόπους τοῦ ὑποδιαιρεῖν τὴν ἀρχικὴν μονάδα, ὁ ἁπλούστερος καὶ εὐκολώτερος διὰ τοὺς ὑπολογισμοὺς εἶναι ἀναντιῤῥήτως ἡ ὑποδιαίρεσις εἰς μέρη δεκάκις μικρότερα τῆς μονάδος· τὰ μέρη ταῦτα καλοῦνται δεκαδικὰ κλάσματα. Οὗτος ὁ τρόπος τῆς ὑποδιαιρέσεως εἶναι ἐπωφελέστατος, ἐπειδὴ ἄγει ἀμέσως, ἢ τοὐλάχιστον δι᾽ εὐκολωτάτων μεταμορφώσεων τὰς πράξεις τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν εἰς τὰς ἁπλᾶς πράξεις τῶν ἀκεραίων. Τοῦτο θέλομεν ἀναπτύξει, ἀφ᾽ οὗ γνωρίσωμεν τὴν ἀρίθμησιν τῶν δεκαδικῶν κλασμάτων, τουτέστι τὴν ὀνοματολογίαν των, καὶ τὸν τρόπον τοῦ γράφειν τούτους διὰ χαρακτήρων.

Δεκαπλασιαζομένης διαδοχικῶς τῆς μονάδος, σχηματίζονται νέαι μονάδες, εἰς τὰς ὁποίας ἐδόθη τὸ

ὄνομα τῶν δεκάδων, ἑκατοντάδων, χιλιάδων, δεκάδων χιλιάδος κ. τ. λ. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἐπενόησαν νὰ διαιρέσουν τὴν μονάδα εἰς δέκα μέρη, τὰ ὁποῖα ἐκαλέσθησαν δεκατημόρια, κάθε δεκατημόριον εἰς δέκα μέρη, τὰ ὁποῖα ὠνομάσθησαν ἑκατοστημόρια, ἐπειδὴ ἡ ἀρχικὴ μονὰς περιέχει δέκα φοραῖς δέκα ἢ ἑκατὸν ἐκ τῶν νέων τούτων μερῶν· μετὰ ταῦτα τὸ ἑκατοστημόριον διαιρεῖται εἰς δέκα μέρη ὀνομαζόμενα χιλιοστημόρια· ἕκαστον χιλιοστημόριον εἰς δέκα μέρη ὀνομαζόμενα δεκαχιλιοστημόριον, καὶ οὕτω διαδοχικῶς, ὥστε ἐδόθησαν τὰ ὀνόματα ἑκατοχιλιοστημόρια, μιλλιονιστημόρια, δεκαμιλλιονιστημόρια καὶ ἐφεξῆς.

Ἕπεται προσέτι (ἀριθμ. 5) ἐκ τῆς θεμελιώδους ἀρχῆς τῆς γραφομένης ἀριθμήσεως τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν, ὅτι τὰ ψηφία προχωροῦντα ἀπὸ τὰ δεξιὰ πρὸς τὰ ἀριστερὰ ἔχουσι σχετικὰς τιμὰς ἀπὸ δέκα εἰς δέκα φοραῖς μεγαλητέρας, ἢ καταβαίνοντα ἀπὸ τὰ ἀριστερὰ πρὸς τὰ δεξιὰ ἔχουσι τιμὰς ἀπὸ δέκα εἰς δέκα φοραῖς μικροτέρας. Ἐκ τούτου ἕπεται, ὅτι ἐὰν εἰς τὰ δεξιὰ ἑνὸς ἀκεραίου ἀριθμοῦ ἤδη γεγραμμένου μὲ ψηφία, θέτομεν νέα ψηφία, προσέχοντες πάντοτε νὰ διακρίνωμεν δι' ἑνός τινος σημείου π. χ. διὰ μιᾶς διαστολῆς τὸν ἀκέραιον τοῦτον ἀριθμὸν ἐκ τούτων τῶν νέων ψηφίων, δυνάμεθα διὰ τούτων νὰ παῤῥησιάσωμεν μέρη δεκάκις μικρότερα τῆς μονάδος, τουτέστι τὰ δεκατημόρια, τὰ ἑκατοστημόρια, τὰ χιλιοστημόρια κ. τ. λ.

Οὕτως ἡ ἕνωσις τῶν ψηφίων 24, 75 ἐκφράζει 24 μονάδας, 7 δεκατημόρια, καὶ 5 ἑκατοστημόρια· 5, 478 ἐκφράζει 5 μονάδας, 4 δεκατημόρια, 7 ἑκατοστημόρια, καὶ 8 χιλιοστημόρια.

§. 81. Προβάλλεται νὰ ἐκφρασθῇ εἰς τὴν κοινὴν γλῶσσαν ὁ διὰ χαρακτήρων ἢ ψηφίων γραμμένος ἀριθμὸς 56, 3506.

Ὁ τοιοῦτος ἀριθμὸς δύναται κατὰ πρῶτον νὰ ἐκφρασθῇ οὕτως: 56 μονάδες, 3 δεκατημόρια, 5 ἑκατοστημόρια, 0 χιλιοστημόρια καὶ 6 δεκαχιλιοστημόρια. ἀλλὰ παρατηροῦμεν, ὅτι 3 δεκατημόρια ἰσοδυναμοῦν μὲ 30 ἑκατοστημόρια ἢ 300 χιλιοστημόρια, ἢ 3000 δεκαχιλιοστημόρια· παρομοίως 5 ἑκατοστημόρια ἰσοδυναμοῦν μὲ 50 χιλιοστημόρια ἢ μὲ 500 δεκαχιλιοστημόρια. Λοιπὸν ὁ ὅλος ἀριθμὸς ἰσοδυναμεῖ μὲ 56 μονάδας καὶ 3506 δεκαχιλιοστημόρια, τουτέστι, διὰ νὰ ἐκφράσωμεν εἰς τὴν κοινὴν γλῶσσαν κλασματικόν τινα ἀριθμὸν δεκαδικὸν γραμμένον μὲ ψηφία, πρέπει νὰ ἐκφράσωμεν ξεχωριστὰ τὸ μέρος τῶν ἀκεραίων, ἢ τὸ μέρος εἰς τὰ ἀριστερὰ τῆς ὑποδιαστολῆς, καὶ νὰ ἐκφράσωμεν μετὰ ταῦτα τὸ μέρος, τὸ εἰς τὰ δεξιὰ αὐτῆς, ὡς νὰ ἐκφράζαμεν ἀκέραιον ἀριθμὸν, καὶ νὰ θέσωμεν εἰς τὸ τέλος τῆς ἐκφράσεως τὸ ὄνομα τῆς μονάδος τῆς τελευταίας δεκαδικῆς ὑποδιαιρέσεως.

Οὕτως 7, 49305 ἐκφράζει 7 μονάδας καὶ 49305 ἑκατοχιλιοστημόρια. Παρομοίως 249, 007056 ἐκφράζει 249 μονάδας καὶ 7056 μιλλιονιστημόρια.

Δυνάμεθα προσέτι, ἂν θέλωμεν, νὰ συμπεριλάβωμεν εἰς μίαν μόνην ἔκφρασιν καὶ τὸ ἀκέραιον μέρος καὶ τὸ δεκαδικόν. Τῷ ὄντι ἂς λάβωμεν διὰ παράδειγμα τὸν ἀριθμὸν 56, 3506· καὶ ἐπειδὴ μία μονὰς ἰσοδυναμεῖ μὲ 10 δεκατημόρια, ἢ μὲ 100 ἑκατοστημόρια, ἢ μὲ 1000 χιλιοστημόρια, ἢ 10000 δεκαχιλιοστημόρια, ἕπεται ὅτι 56 μονάδες ἰσοδυναμοῦν μὲ 560000 δεκαχιλιοστυμόρια, καὶ ἐπομένως 56, 3506 ἐκφράζουσι 563506 δεκαχιλιοστημόρια. Παρομοίως 7 μονάδες ἰσοδυναμοῦν μὲ 700000 ἑκατοχιλιοστημόρια, ὁ ἀριθμὸς 7, 49305 ἄγεται εἰς 749305 ἑκατοχιλιοστημόρια· τουτέστιν ἀρκεῖ, ἀφ' οὗ ἐκφράσωμεν τὸν ἀριθμὸν, ὡς νὰ μὴν ὑπῆρχεν ἡ ὑποδιαστολὴ, νὰ θέσωμεν

εἰς τὸ τέλος τῆς ἐκφράσεως τὸ ὄνομα τῆς τελευταίας ὑποδιαιρέσεως. Συνειθίζουν ὅμως νὰ ἐκφράζωσι ξεχωριστὰ τὰ ἀκέραια, καὶ ξεχωριστὰ τὰ δεκαδικά.

Ἀντιστρόφως προβάλλεται νὰ γράψωμεν διὰ ψηφίων ἓν κλάσμα δεκαδικὸν ἐκφραζόμενον εἰς τὴν κοινὴν γλῶσσαν.

Ἂς γραφθῇ ὁ ἀριθμὸς εἰκοσιεννέα μονάδες, τριακόσια πενῆντα τέσσαρα χιλιοστά. Γράφομεν κατὰ πρῶτον τὰς ἀκεραίας μονάδας 29, μετὰ ταῦτα· ἐπειδὴ 300 χιλιοστὰ ἰσοδυναμοῦν μὲ 3 δεκατημόρια, καὶ 50 χιλιοστημόρια σχηματίζουν 5 ἑκατοστημόρια, γράφομεν μίαν ὑποδιαστολὴν εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ 29, καὶ μετὰ ταῦτα γράφομεν διαδοχικῶς τὰ ψηφία 3, 5 καὶ 4, καὶ οὕτως θέλει εἶναι 29, 354 ὁ ἐκφραζόμενος ἀριθμός. Παρομοίως ἑκατὸν-ἐννέα μονάδες, δύο χιλιάδες καὶ τρία δεκαχιλιοστημόρια γράφονται 109, 2003.

Ἂς γραφθῇ ἀκόμη ὁ ἀριθμὸς 8 μονάδες, 37 χιλιοστημόρια.

Ἐπειδὴ 30 χιλιοστημόρια σχηματίζουν 3 ἑκατοστημόρια, καὶ δὲν ἔχομεν εἰς τὴν ἔκφρασιν δεκατημόρια, γράφομεν 8,037, τουτέστι θέτομεν εἰς τὰ δεξιὰ τῆς ὑποδιαστολῆς τὸ 0, διὰ νὰ κρατήσῃ τὸν τόπον τῶν δεκατημορίων, τὰ ὁποῖα λείπουσι, καὶ νὰ δώσῃ εἰς τὰ ἀκολουθοῦντα ψηφία τὴν ἀληθινήν των τιμήν.

Κανὼν Γενικός. Διὰ νὰ γράψωμεν μὲ ψηφία ἀριθμὸν δεκαδικὸν ἐκφραζόμενον εἰς τὴν κοινὴν γλῶσσαν, γράφομεν πρῶτον τὸν ἀκέραιον ἀριθμόν, καὶ θέτομεν μίαν ὑποδιαστολήν· μετὰ ταῦτα διαδοχικῶς γράφομεν εἰς τὰ δεξιὰ τῆς ὑποδιαστολῆς τὰ ψηφία, τὰ ὁποῖα παρασταίνουν τὰ δεκατημόρια, τὰ ἑκατοστημόρια κ. τ. λ. τὰ ὁποῖα περιέχει ἡ ἔκφρασις, προσέχοντες νὰ ἀντεισάγωμεν μηδενικὰ εἰς τὰς διαφόρους τάξεις, αἱ ὁποῖαι δύνανται νὰ λείπωσιν.

Ἐὰν δὲν ἔχωμεν ἀκεραίας μονάδας, τουτέστι ἐὰν ὁ δεδομένος ἀριθμὸς ἦναι κύριον κλάσμα, γράφομεν 0 διὰ νὰ κρατῇ τὸν τόπον τῶν ἀκεραίων, καὶ μετὰ ταῦτα πράττομεν, ὡς ἀνωτέρω εἴπομεν. Οὕτως δεκαεπτὰ ἑκατοστημόρια γράφονται 0,17. Ἑκατὸν εἰκοσιπέντε δεκαχιλιοστημόρια διὰ 0,0125· δώδεκα χιλιάδες διακόσια τέσσαρα μιλλιονιστημόρια διὰ 0,012201.

Τέλος πάντων εἰς τὴν ἔκφρασιν ἑνὸς ἀριθμοῦ, ὅταν οἱ ἀκέραιοι δὲν ξεχωρίζωνται ἀπὸ τὰ δεκαδικὰ, ὁ ἀριθμὸς γράφεται εὐκολώτερον διὰ ψηφίων· πρέπει τότε νὰ γράψωμεν τὸν ἀριθμὸν, ὡς νὰ ἔκφραζεν ἀκεραίας μονάδας, καὶ μετὰ ταῦτα νὰ θέσωμεν ὑποδιαστολὴν εἰς τρόπον ὥστε τὸ τελευταῖον ψηφίον εἰς τὰ δεξιὰ νὰ ἐκφράζῃ μονάδας τῆς τελευταίας ὑποδιαιρέσεως, τὴν ὁποίαν φέρει ἡ ἔκφρασις.

Π. χ. διὰ νὰ γράψωμεν τέσσαρας χιλιάδας, διακόσια δεκατέσσαρα ἑκατοστημόρια, γράφομεν κατὰ πρῶτον 4214, καὶ ἐπειδὴ τὸ τελευταῖον ψηφίον πρέπει νὰ ἐκφράζῃ ἑκατοστημόρια, θέτομεν τὴν ὑποδιαστολὴν μεταξὺ τοῦ 2 καὶ 1, καὶ οὕτως ἔχομεν 42,14.

Παρομοίως διακόσιαι πενῆντα τρεῖς χιλιάδες, εἴκοσι ἐννέα δεκαχιλιοστὰ γράφονται διὰ 25, 3029, καὶ οὕτως καὶ οἱ ἄλλοι δεκαδικοὶ ἀριθμοί.

§. 82. Ἤδη αἰσθανόμεθα τὴν ὠφέλειαν τοῦ τρόπου τούτου τοῦ γράφειν τὰ δεκαδικὰ κλάσματα. Τὸ κλάσμα σύγκειται ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον ἐκ δύο ἀριθμῶν, θεμένου τοῦ ἑνὸς ὑπὸ τοῦ ἄλλου, τουτέστι τοῦ ἀριθμητοῦ καὶ τοῦ παρονομαστοῦ. Ἐδῶ ἡ ὑποδιαστολὴ κρατεῖ τόπον τοῦ παρονομαστοῦ, ὅςτις εἶναι ἴσος μὲ τὴν μονάδα, ἀκολουθημένην ἀπὸ τόσα μηδενικὰ, ὅσα εἶναι τὰ δεκαδικὰ ψηφία, τουτέστι ὅσα ψηφία εὑρίσκονται εἰς τὰ δεξιὰ τῆς ὑποδιαστολῆς· ὁ

δὲ ἀριθμητὴς σύγκειται ἐκ τῶν ψηφίων, τὰ ὁποῖα εὑρίσκονται εἰς τὰ δεξιὰ τῆς ὑποδιαστολῆς· ἤ, ἐὰν θεωρήσωμεν τὰς ἀκεραίας μονάδας ἠγμένας εἰς κλάσμα, τότε αὗται εἶναι ὁ προτεθεὶς ἀριθμὸς, ὅταν ἀφαιρεθῇ ἡ ὑποδιαστολή· οὕτως ὁ ἀριθμὸς· 23, 5037 θεμένος ὑπὸ τὴν κοινὴν μορφὴν τῶν κλασμάτων ἄγεται εἰς 23 $\frac{5037}{1000}$, ἢ $\frac{235037}{10000}$· ὁ ἀριθμὸς 2, 00409 εἶναι ἴσος μὲ 2, $\frac{409}{100000}$, ἢ $\frac{200409}{100000}$· τέλος πάντων 0, 0002154 εἶναι ἰσοδύναμον μὲ $\frac{2154}{10000000}$.

Καὶ ἀντιστρόφως 2 $\frac{53}{1000}$, ἢ $\frac{2053}{1000}$ τρέπεται εἰς 2, 053 καὶ $\frac{172049}{10000}$ εἰς 17, 2049.

Αὗται αἱ τροπαὶ τῶν δεκαδικῶν κλασμάτων εἰς κοινὰ κλάσματα, καὶ τῶν κοινῶν κλασμάτων εἰς δεκαδικὰ κλάσματα, εἶναι συνηθέσταται εἰς τὸν ὑπολογισμόν.

§. 83. Προκύπτει κατὰ πρῶτον ἐκ τῶν τοιούτων, ὅτι ἐὰν εἰς τὸ δεκαδικὸν κλάσμα προχωρήσωμεν τὴν ὑποδιαστολὴν μίαν ἢ περισσοτέρας τάξεις πρὸς τὰ δεξιὰ, πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀριθμὸν ἐπὶ 10, 100, 1000 κ. τ. λ. καὶ ἐξ ἐναντίας προχωροῦντές την μίαν ἢ πολλὰς τάξεις εἰς τὰ ἀριστερὰ τὸν διαιροῦμεν διὰ τοῦ 10, 100, 1000 κ. τ. λ.

Ἔστω π. χ. ὁ ἀριθμὸς 153, 07295, καὶ ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι προχωροῦμεν τὴν ὑποδιαστολὴν τρεῖς τάξεις κατὰ τὰ ἀριστερὰ; ἐντεῦθεν συνάγομεν 152072, 95· λέγω, ὅτι ὁ ἀριθμὸς ἔγεινε χίλιαις φοραῖς μεγαλήτερος. Τῷ ὄντι ὁ ἀρχοειδὴς

ἀριθμὸς ἄλλο δὲν εἶναι παρὰ $\frac{15307295}{100000}$, καὶ ὅταν προχωρήσωμεν τὴν ὑποδιαστολὴν, γίνεται $\frac{15307295}{100}$ κλάσμα, τοῦ ὁποίου ὁ παρονομαστὴς εἶναι 1000 φοραῖς πλέον μικρότερος ἀπὸ ἐκεῖνον τοῦ ἄλλου κλάσματος. Λοιπὸν (ἀριθ. 42) τὸ δεύτερον κλάσμα εἶναι 1000 φοραῖς μεγαλήτερον τοῦ δεδομένου.

Τὸ ἐναντίον, ἐὰν προχωρήσωμεν τὴν ὑποδιαστολὴν δύο τάξεις κατὰ τὰ ἀριστερὰ, τρέπεται εἰς 1,5307295 ἢ $\frac{15307295}{1000000}$, κλάσμα, τοῦ ὁποίου ὁ παρονομαστὴς εἶναι 100 φοραῖς μεγαλήτερος ἀπὸ ἐκεῖνον τοῦ δεδομένου κλάσματος $\frac{15307295}{100000}$. Λοιπὸν τὸ νέον κλάσμα 100 φοραῖς μικρότερον εὑρίσκεται.

Ἠμποροῦμεν καὶ κατὰ ἄλλον τρόπον νὰ δώσωμεν λόγον περὶ τούτου, παρατηροῦντες, ὅτι διὰ τῆς μεταθέσεως τῆς ὑποδιαστολῆς, ἡ σχετικὴ τιμὴ ἑκάστου ψηφίου γίνεται 10, 100, 1000 φοραῖς κ. τ. λ. μεγαλητέρα, ἢ μικροτέρα· οὕτως συγκρίνοντες 153072,95 μὲ 153,07295, βλέπομεν, ὅτι τὸ ψηφίον 3, τὸ ὁποῖον ἐκφράζει εἰς τοῦτο ἁπλᾶς μονάδας, εἰς τὸ πρῶτον ἐκφράζει χιλιάδας, τὸ ψηφίον 5 εἰς τὰ ἀριστερὰ τοῦ 3, τὸ ὁποῖον ἐκφράζει δεκάδας, παρασταίνει ἤδη δεκάδας χιλιάδος, καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

§. 84. Ἡ πρόσθεσις ὁποιουδήποτε ἀριθμοῦ μηδενικῶν εἰς τὰ δεξιὰ ἑνὸς δεκαδικοῦ κλάσματος δὲν ἀλλάττει δι' ὅλου τὴν τιμήν του· οὕτως 3,415 ἰσοδυναμεῖ μὲ 3,4150 ἢ 3,41500, ἢ 3,415000 κ. τ. λ.

Τῷ ὄντι οὗτοι οἱ ἀριθμοὶ δύνανται (κατὰ τὸν ἀριθμ. 82) νὰ τεθῶσιν ὑπὸ τὴν μορφὴν $\frac{3415}{1000}$, $\frac{34150}{10000}$,

$\frac{341500}{100000}$ κ. τ. λ. τώρα τὰ τελευταῖα δύο κλάσματα ἄλλο δὲν εἶναι παρὰ τὸ πρῶτον, τοῦ ὁποίου ἐπολλαπλασιάσωμεν τοὺς δύο ὅρους ἐπὶ 10, 100, καὶ ἡ ὁποία πρᾶξις δὲν ἀλλάττει τὴν τιμὴν (ἀριθμ. 43).

Ἡ δυνάμεθα νὰ παρατηρήσωμεν, ὅτι τὰ μηδενικὰ προσθεμένα εἰς τὰ δεξιὰ τῶν ἤδη γραμμένων ψηφίων, δὲν ἀλλάττουν τὴν σχετικήν των τιμὴν, καὶ ἐπειδὴ τὰ τοιαῦτα μηδενικὰ δὲν ἔχουσιν ἀφ' ἑαυτῶν κἀμμίαν τιμὴν, τὰ κλάσματα μένουσι πάντοτε τὰ αὐτά.

Ἡ τελευταία αὕτη μεταμόρφωσις χρησιμεύει εἰς τὴν ἀναγωγὴν τῶν δεκαδικῶν κλασμάτων εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν· π. χ. τὰ κλάσματα 12,407· 0,25· 7, 0456· 23, 4 ἄγονται εἰς 12,4070· 0,2500· 7.0456· 23,4000, καὶ ὑπὸ ταύτης τῆς μορφῆς ἔχουσι 10000 διὰ κοινὸν παρονομαστήν.

Μετὰ τὰς γνώσεις ταύτας δυνάμεθα νὰ περάσωμεν εἰς τὰς ἐπὶ τῶν δεκαδικῶν κλαμάτων πράξεις.

§. 85. Πρόσθεσις καὶ Ἀφαίρεσις.

Ἡ πρόσθεσις τῶν δεκαδικῶν κλασμάτων ἐκτελεῖται, ὡς ἐκείνη τῶν ἀκεραίων, ἀφ' οὗ ὅμως τὰ ἀνάξωμεν εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν, ἔχοντες προσοχὴν νὰ χωρίσωμεν δι' ὑποδιαστολῆς εἰς τὸ ἐξαγόμενον τόσα δεκαδικὰ ψηφία, ὅσα ἦσαν εἰς ἐκεῖνον ἐκ τῶν δεδομένων ἀριθμῶν, ὅς τις περιελάμβανε πλειότερα.

Ἓν παράδειγμα ἀρκεῖ νὰ σαφηνίσῃ τὸν κανόνα τοῦτον.

Πρόκειται νὰ προσθέσωμεν τοὺς ἀριθμοὺς 32,4056· 245,379· 12,0476· 9,38 καὶ 459,2375.

Προσθέτω κατὰ πρῶτον 0 εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ δευτέρου ἀριθμοῦ καὶ δύο εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ τετάρτου· μετὰ ταῦτα γράφω τοὺς ἀριθμοὺς οὕτω κατασκευα-

σμένους τὸν ἕνα ὑπὸ τὸν ἄλλον οὕτως, ὥστε αἱ μονάδες τῆς ἰδίας τάξεως νὰ ἀνταποκρίνωνται, καὶ κάμνω τὴν πρόσθεσιν κατὰ τὴν συνήθειαν.

Εὑρίσκω δι' ἐξαγόμενον 7584497, ἢ χωρίζων 4 ψηφία δεκαδικὰ εἰς τὰ δεξιὰ, 758,4497. Ἐπειδὴ οἱ ἀριθμοὶ, τοὺς ὁποίους ἐπροσθέσαμεν ἐκφράζουσι μονάδας δεκαχιλιοστημορίων.

32,4056	
245,3790	
12,0476	
9,3800	
459,2375	
758,4497.	Βάσανος.
[illegible]	

Εἰς τὰς πράξεις ἠμποροῦμεν νὰ μὴ γράφωμεν τα μηδενικὰ πρὸς τὰ δεξιὰ τῶν ἀριθμῶν τῶν ἐχόντων ὀλιγώτερα δεκαδικὰ ψηφία· διότι ἀρκεῖ νὰ προσέχωμεν νὰ θέτωμεν τὰς μονάδας τῆς αὐτῆς τάξεως ὑπὸ τὴν αὐτὴν στήλην.

Ἡ ἀφαίρεσις ἐκτελεῖται παρομοίως, ὡς καὶ ἡ τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν, ἀφ' οὗ ἀναχθῶσι τὰ δεκαδικὰ κλάσματα εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν (ἀριθ. 84)· π. χ. Ἂς ἀφαιρέσωμεν 23,0784 ἀπὸ 62,09.

Προσθέτω δύο μηδενικὰ εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ 62,09, καὶ οὕτως ἔχω 62,0900· μετὰ ταῦτα ἐκτελῶ τὴν ἀφαίρεσιν κατὰ τὴν συνήθειαν, προσέχων μόνον νὰ χωρίζω τέσσαρα δεκαδικὰ ψηφία κατὰ τὰ δεξιὰ τοῦ ἐξαγομένου.

62,0900	
23,0784	
39,0116	
62,0900.	Βάσανος.

Αὗται αἱ ἀρχαὶ ἐπιστηρίζονται ἐπὶ τούτου, ὅτι ἐπειδὴ αἱ μονάδες τῶν διαφόρων τάξεων εἰς τὰ δεκαδικὰ κλάσματα ἔχουν τὴν αὐτὴν σχέσιν τοῦ μεγέθους πρὸς ἀλλήλας, ὡς εἰς τοὺς ἀκεραίους ἀριθμοὺς, ἐξακολουθοῦσι τὰ αὐτὰ διὰ τὰ ὅσα κρατοῦμεν, ἢ διὰ τὰ ὅσα δανειζόμεθα, ὡς νὰ εἴχομεν νὰ πράξωμεν εἰς ἀκεραίους ἀριθμούς.

§. 86. **Πολλαπλασιασμὸς τῶν δεκαδικῶν κλασμάτων.** Διὰ νὰ ἐκτελέσωμεν ταύτην τὴν

πρᾶξιν, πολλαπλασιάζομεν τοὺς δύο δεδομένους ἀριθμοὺς τὸν ἕνα ἐπὶ τὸν ἄλλον, χωρὶς νὰ παρατηρήσωμεν τὴν ὑποδιαστολήν των, καὶ ὅταν εὕρωμεν τὸ ὅλον γινόμενον, χωρίζομεν κατὰ τὰ δεξιὰ τόσα ψηφία δεκαδικὰ, ὅσα εὑρίσκονται εἰς τοὺς δύο παράγοντας.

Ἔστω π. χ. νὰ πολλαπλασιάσωμεν 35,407 ἐπὶ 12,54. Διὰ νὰ δώσωμεν λόγον τῶν ἄνω εἰρημένων, θεωροῦμεν ὅτι οἱ δύο δεδομένοι ἀριθμοὶ δύνανται νὰ τεθῶσιν ὑπὸ τὴν μορφὴν $\frac{35407}{1000}$ καὶ $\frac{1254}{100}$. Ἤδη διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν δύο κλάσματα, πρέπει (ἀριθμ. 56) νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀριθμητὴν ἐπὶ ἀριθμητὴν, καὶ παρονομαστὴν ἐπὶ παρονομαστὴν, ἀλλὰ οἱ δύο ἀριθμηταὶ ἄλλο δὲν εἶναι, εἰμὴ οἱ δεδομένοι ἀριθμοὶ, ἀφ' οὗ ἀφαιρεθῇ ἡ ὑποδιαστολή. Πρέπει λοιπὸν κατὰ πρῶτον νὰ πολλαπλασιάσωμεν τοὺς δύο τούτους ἀριθμοὺς, οἵτινες δίδουσι 44400378, μετὰ ταῦτα ἔχομεν διὰ τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν 100000, τουτέστι τὴν μονάδα μὲ τόσα μηδενικὰ, ὅσα ψηφία δεκαδικὰ εὑρίσκονται εἰς τοὺς δύο παράγοντας· καὶ πρέπει νὰ διαιρέσωμεν τὸ ληφθὲν γινόμενον διὰ 100000, ἀπὸ τὸ ὁποῖον βλέπομεν, ὅτι πρέπει νὰ χωρίσωμεν 5 ψηφία δεκαδικὰ πρὸς τὰ δεξιὰ, καὶ οὕτως εὑρίσκομεν ἐξαγόμενον 444,00378. Λοιπὸν κ. τ. λ.

```
   35,407
    12,54
   ------
   141628
  177035
  70814
 35407
---------
444,00378
```

Ἄλλως. Ἐξαλείφοντες τὴν ὑποδιαστολὴν ἀπὸ τὸν πολλαπλασιαστέον, τὸν πολλαπλασιάζομεν φανερὰ ἐπὶ 1000, ἐπειδὴ κατὰ πρῶτον ἔκφραζε 1000^{α}, καὶ τώρα ἐκφράζει ἁπλᾶς μονάδας. Λοιπὸν κατὰ τὰς ἀρχὰς τοῦ (ἀριθμ. 63), τὸ γινόμενον διὰ ταύτης τῆς πράξεως ἔγινεν 1000 φοραῖς μεγαλήτερον. Παρομοίως

ἐξαλείφοντες τὴν ὑποδιαστολὴν ἀπὸ τὸν πολλαπλασιαστὴν, τὸν κατασταίνομεν 100 φοραῖς μεγαλήτερον, ἕπεται, ὅτι τὸ γινόμενον ἔγινεν 100 φοραῖς μεγαλήτερον. Ἔγινε λοιπὸν διὰ τὴν ἐξάλειψιν τῶν δύο ὑποδιαστολῶν 100000 φοραῖς μεγαλήτερον, καὶ διὰ νὰ τὸ φέρωμεν εἰς τὴν ἀκριβῆ τιμήν του, πρέπει νὰ τὸ διαιρέσωμεν διὰ 100000, ἢ νὰ χωρίσωμεν 5 ψηφία κατὰ τὰ δεξιά.

Ὁ συλλογισμὸς ἤθελεν εἶναι ἀνάλογος, ἐὰν εἴχαμεν μεγαλήτερον, ἢ μικρότερον ἀριθμὸν δεκαδικῶν ψηφίων εἰς τοὺς δύο παράγοντας.

Συμβαίνει ἐνίοτε νὰ περιλείη δεκαδικὰ εἷς ἐκ τῶν δύο ἀριθμῶν μόνον. Εἰς ταύτην τὴν περίστασιν, χωρίζομεν κατὰ τὰ δεξιὰ τοῦ γινομένου, τόσα ψηφία δεκαδικὰ, ὅσα εὑρίσκονται εἰς τοῦτον τὸν ἀριθμόν. Αὕτη ἡ περίστασις εἶναι εὐκολωτάτη, καὶ διὰ τοῦτο δὲν προχωροῦμεν περισσότερον.

Εὑρίσκομεν κατὰ τοὺς κανόνας τούτους

1ον ὅτι τὸ γινόμενον τοῦ 4,0567 ἐπὶ 9,503 εἶναι ἴσον μὲ 38,5508201.

2ον τὸ γινόμενον τοῦ 4,0015 ἐπὶ 29 εἶναι 116 0435.

3ον τὸ γινόμενον τοῦ 0,03054 ἐπὶ 0,023 εἶναι 0,00070242.

Σ. Κ. Τοῦτο τὸ τελευταῖον παράδειγμα ἀπαιτεῖ κάποιαν προσοχήν. Ἐξαλείφοντες τὴν ὑποδιαστολὴν εἰς τοὺς δύο παράγοντας, καὶ ἐκτελοῦντες τὸν πολλαπλασιασμὸν εὑρίσκομεν γινόμενον 70242· ἀλλ' ἐπειδὴ ἔχομεν 5 ψηφία δεκαδικὰ εἰς τὸν πολλαπλασιαστέον, καὶ 3 εἰς τὸν πολλαπλασιαστὴν, πρέπει λοιπὸν εἰς τὸ γινόμενον, τὸ ὁποῖον ἤδη περικλείει μόνον 5 ψηφία, νὰ ὑπάρχωσιν 8· διὰ νὰ ἐβγάλωμεν τὴν δυσκολίαν

ταύτην παρατηροῦμεν, ὅτι ἐπειδὴ τὸ γινόμενον μέλλει νὰ ἐκφράζῃ μονάδας τῆς ὀγδόης τάξεως τῶν δεκαδικῶν, ἀρκεῖ νὰ γράψωμεν εἰς τὰ ἀριστερὰ τοῦ 70242 τόσα μηδενικα, ὥστε τιθεμένης ἔπειτα τῆς ὑποδιαστολῆς, τὸ τελευταῖον ψηφίον 2 νὰ κρατῇ τὴν ὀγδόην τάξιν τῶν δεκαδικῶν· ἐδῶ λοιπὸν πρέπει νὰ γράψωμεν 4, ἐπειδὴ χρειάζεται ἓν διὰ νὰ κρατῇ τὴν τάξιν τῶν ἀκεραίων, καὶ οὕτως εὑρίσκομεν 0,00070242.

§. 87. Διαίρεσις τῶν δεκαδικῶν κλασμάτων. Αὕτη ἡ πρᾶξις δὲν παῤῥησιάζει περισσοτέρας δυσκολίας. Κατὰ πρῶτον ἄγομεν τοὺς δεδομένους ἀριθμοὺς εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν (ἀριθμ. 84), καὶ μετὰ ταῦτα ἐκτελοῦμεν τὴν διαίρεσιν, ὡς νὰ μὴν εὑρίσκετο ὑποδιαστολὴ, καὶ οὕτως εὑρίσκομεν τὸ ζητούμενον πηλίκον.

Διαιρεθήτω 43,047 διὰ 2,53698

Κατὰ πρῶτον προσθέτομεν δύο μηδενικὰ εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ 43,047 καὶ οὕτως συνάγομεν 43,04700· μετὰ ταῦτα διαιροῦμεν 4304700 διὰ 253698, καὶ εὑρίσκομεν τὸ ἀκριβὲς πηλίκον 16 $\frac{245532}{253698}$.

4304700	253698
1767720	16
245532	

Τῷ ὄντι ἀφ' οὗ ἐπροσθέσαμεν τὰ δύο μηδενικὰ εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ διαιρετέου, τὰ ὁποῖα δὲν τοῦ ἀλλάττουν τὴν τιμὴν, οἱ δύο ἀριθμοὶ δύνανται νὰ τεθῶσιν ὑπὸ τὴν μορφὴν $\frac{4304700}{100000}$ καὶ $\frac{253698}{100000}$: τώρα διὰ νὰ διαιρέσωμεν τὸ ἓν διὰ τοῦ ἄλλου, πρέπει (ἀριθμ. 59) νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸ διαιρούμενον ἐπὶ τὸ διαιροῦν κλάσμα, ἀντεστραμμένον. Συνάγομεν λοιπὸν, παρατηροῦντες, ὅτι 100000 εἶναι κοι-

νὸς παράγων τῶν δύο ὅρων, τὸ ἐξαγόμενον $\frac{4304700}{253698}$, τουτέστιν, ὅτι πρέπει νὰ κάμωμεν τὴν διαίρεσιν τῶν δύο ἀριθμῶν, χωρὶς νὰ θεωρῶμεν τὴν ὑποδιαστολὴν, ἀφ' οὗ καταστήσωμεν τὸν ἀριθμὸν τῶν δεκαδικῶν ψηφίων τὸν αὐτὸν καὶ εἰς τοὺς δύο.

Δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν προσέτι, ὅτι τῶν δύο δεκαδικῶν κλασμάτων ἀναχθέντων εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν, ἐὰν ἐξαλείψωμεν τὴν ὑποδιαστολὴν ἀπὸ τοὺς δύο ὅρους, καθισταίνομεν τὸν διαιρετέον καὶ τὸν διαιρέτην κατὰ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν τῶν φορῶν μεγαλητέρους. Λοιπὸν τὸ πηλίκον δὲν ἀλλάζει (ἀριθμ. 63).

Τὸ πηλίκον τοῦ 3,4703 διὰ 0,027 εἶναι 128 $\frac{143}{270}$

ἐκεῖνο τοῦ 0,596 διὰ 0,00201 εἶναι 296 $\frac{104}{201}$.

34703	270
770	128
2303	
143	

§. 88. Εἰς τὰ ἀνωτέρω παραδείγματα εὑρήκαμεν μὲ εὐκολίαν τὸ ἀκέραιον πηλίκον τῆς διαιρέσεως· ἀλλὰ τὰ ἀναγκαῖα κλάσματα, διὰ νὰ καταστήσωσι πλῆρες τὸ πηλίκον, ἔχοντα ἐν γένει μεγάλους ὅρους, μὲ δυσκολίαν ἐκτιμοῦνται. Διὰ τοῦτο εἶναι ἀνάγκη νὰ ζητήσωμεν νὰ τὰ ἐκφράζωμεν εἰς μέρη πλέον ἁπλούστερα τῆς ἀρχικῆς μονάδος, π. χ. εἰς δεκατημόρια, ἑκατοστημόρια, χιλιοστημόρια καὶ ἐφεξῆς.

Ἃς προτείνωμεν λοιπὸν τὸ ἀκόλουθον νέον γενικὸν ζήτημα.

Δοθέντος ἑνός τινος κλάσματος τῆς ἀρχικῆς μονάδος ὁποιουδήποτε εἴδους, νὰ ἐκτιμήσωμεν τὸ κλάσμα

τοῦτο εἰς κλάσμα δεκαδικὸν, ἢ μᾶλλον νὰ τὸ τρέψωμεν εἰς κλάσμα δεκαδικόν.

Ἔστω π. χ. κατὰ πρῶτον τὸ κλάσμα $\frac{13}{47}$.

Ὁ προτεθεὶς ἀριθμὸς ἀναφερόμενος εἰς τὴν ἀρχικὴν μονάδα ἐκφράζει $\frac{13}{47}$ ταύτης τῆς μονάδος· ἀλλ' ἐπειδὴ μία ἁπλῆ μονὰς ἰσοδυναμεῖ μὲ 10 δεκατημόρια, ἔπεται, ὅτι $\frac{13}{47}$ τῆς μονάδος ἄλλο δὲν εἶναι,

$$\begin{array}{r|l} 130 & 47 \\ 360 & 0,27659 \ldots \\ 310 & \\ 280 & \\ 450 & \\ 27 & \end{array}$$

παρὰ $\frac{130}{47}$ τῶν δεκατημορίων· οὕτως ἀφ' οὗ διατάξωμεν τοὺς δύο ἀριθμοὺς 13 καὶ 47, ὡς εἰς τὴν κοινὴν διαίρεσιν, καὶ θέσωμεν κατὰ πρῶτον ἓν 0 εἰς τὸ πηλίκον, διὰ νὰ κρατῇ τὸν τόπον τῶν ἀκεραίων, καὶ μετὰ ταῦτα βάλλωμεν τὴν ὑποδιαστολὴν, καὶ διαιρέσωμεν τὸ 130 διὰ 47, τὸ οὕτως εὑρεθὲν πηλίκον εἰς τὰ δεξιὰ τῆς ὑποδιαστολῆς γεγραμμένον παρασταίνει τὸν ἀριθμὸν τῶν περιεχομένων δεκάτων εἰς τὰ $\frac{13}{47}$, τουτέστι $\frac{13}{47}$ εἶναι ἴσον μὲ 2 δέκατα πλέον $\frac{36}{47}$ τοῦ δεκάτου. Παρομοίως ἐπειδὴ ἓν δέκατον ἰσοδυναμεῖ μὲ 10 ἑκατοστημόρια, ἔπεται, ὅτι $\frac{36}{47}$ τοῦ δεκάτου εἶναι ἴσον μὲ $\frac{360}{47}$ τοῦ ἑκατοστημορίου. Ἐκτελοῦντες τὴν νέαν ταύτην διαίρεσιν, συνάγομεν 7 ἑκατοστημόρια

πλέον $\frac{31}{47}$ τοῦ ἑκατοστημορίου, καὶ προσθέτοντες ἓν 0 εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ 31 καὶ διαιροῦντες 310 διὰ 47, εὑρίσκομεν πηλίκον 6 χιλιοστημόρια, τὰ ὁποῖα γράφομεν εἰς τὰ δεξιὰ τῶν δύο πρώτων, καὶ ὑπόλοιπον 28, σιμὰ εἰς τὸ ὁποῖον προσθέτομεν ἓν ἄλλο 0, διὰ νὰ σχηματίσωμεν τὰ δεκαχιλιοστημόρια· καὶ οὕτω καθεξῆς. Ἐξακολουθοῦντες δὲ τὴν πρᾶξιν, ἕως οὗ νὰ λάβωμεν 5 δεκαδικὰ ψηφία, εὑρίσκομεν $\frac{13}{47}$ ἰσοδυναμοῦν μὲ 0,27659, πλέον $\frac{27}{47}$ τοῦ ἑκατοχιλιοστημορίου, κλάσμα, τὸ ὁποῖον δυνάμεθα νὰ ἀμελήσωμεν· καὶ λέγομεν λοιπὸν τότε, ὅτι 0,27659 εἶναι ἡ τιμὴ τοῦ $\frac{13}{47}$ μεῖον ἑνὸς ἑκατοχιλιοστημορίου σχεδόν· ἐπειδὴ τὸ ἀμεληθὲν κλάσμα εἶναι μικρότερον τῆς μονάδος ταύτης τῆς τάξεως.

Ἐν γένει διὰ νὰ τρέψωμεν κοινόν τι κλάσμα εἰς δεκαδικὸν, διατάττομεν τοὺς δύο ἀριθμοὺς, ὡς εἰς τὴν διαίρεσιν, καὶ γράφομεν ἓν 0 εἰς τὸ πηλίκον, καὶ εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ 0 τὴν ὑποδιαστολήν. Τούτου τεθέντος, προσθέτομεν εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ ἀριθμητοῦ 0, καὶ διαιροῦμεν τὸν συναγόμενον ἀριθμὸν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ, καὶ οὕτως εὑρίσκομεν πηλίκον ἐκφράζον τὰ δεκατημόρια, καὶ ἕν τι ὑπόλοιπον. Γράφομεν ἔπειτα ἓν 0 εἰς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ τοῦ ὑπολοίπου, καὶ διαιροῦμεν τὸν συναγόμενον ἀριθμὸν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ· οὕτως εὑρίσκομεν πηλίκον ἐκφράζον τὰ ἑκατοστημόρια, καὶ νέον τι ὑπόλοιπον. Γράφομεν πάλιν ἓν 0 εἰς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ τοῦ ὑπολοίπου, καὶ διαιροῦμεν τὸν συναγόμενον ἀριθμὸν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ, καὶ οὕτω

λαμβάνομεν πηλίκον ἐκφράζον χιλιοστημόρια, καὶ τρίτοντι ὑπόλοιπον, ἐπὶ τοῦ ὁποίου πράττομεν κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον. Τέλος πάντων ἐξακολουθοῦμεν ταύτην τὴν σειρὰν τῶν πράξεων, ἕως οὗ νὰ λάβωμεν τόσα ψηφία δεκαδικὰ, ὅσα θέλομεν, ἢ ὅσα ἀπαιτεῖ ἡ ὑπόθεσις, ἐὰν ἔχωμεν ὑπόλοιπον. Τὸ οὕτω ληφθὲν δεκαδικὸν κλάσμα δὲν διαφέρει ἀπὸ τὸ προτεθὲν, εἰμὴ κατὰ ποσότητα τινὰ μικροτέραν τῆς μονάδος τῆς τάξεως τῶν δεκαδικῶν, εἰς τὴν ὁποίαν ἐπαύσαμεν τὰ πηλίκα.

Ἐὰν ὁ ἀριθμητὴς τοῦ κλάσματος εἶναι μεγαλήτερος ἀπὸ τὸν παρονομαστὴν, τότε ἐξάγομεν τὰς ἀκεραίας μονάδας, τὰς ὁποίας γράφομεν εἰς τὸ πηλίκον ἀντὶ τοῦ μηδενὸς, τὸ ὁποῖον πρότερον εἴχαμεν γράψει.

Μὲ εὐκολίαν γνωρίζομεν τὴν σχέσιν, ἥτις ὑπάρχει μεταξὺ ταύτης τῆς πράξεως καὶ ἐκείνης, ἥτις ἔχει διὰ σκοπὸν νὰ τρέψωμεν κλασματικὸν ἀριθμὸν ἀρχικῆς τινος μονάδος εἰς ἀριθμὸν συμπεπλεγμένον, τουτέστι, εἰς ἀρχικὰς μονάδας, καὶ εἰς ὑποδιαιρέσεις τῆς μονάδος ταύτης· (ὅρ. ἀριθμ. 67).

Ὅλα ταῦτα θέλομεν ἐφαρμόσει εἰς παραδείγματα διαιρέσεως, περὶ ὧν ἀνεφέραμεν εἰς τὸν προηγούμενον ἀριθμόν.

Προβάλλεται π. χ. νὰ διαιρέσωμεν 43,047 διὰ 2,53698, καὶ νὰ ἐκτιμήσωμεν τὸ πηλίκον, ἕως οὗ ἡ διαφορὰ αὐτοῦ νὰ ἦναι μικροτέρα ἀπὸ $\frac{1}{1000}$.

Ἀφ' οὗ εὕρωμεν, ὡς ἀνωτέρω, τὸ πηλίκον 16 μὲ τὸ ὑπόλοιπον 245532, θεωροῦμεν τὸ ὑπόλοιπον τοῦτο ὡς ἀριθμητὴν κλάσματος, τοῦ ὁποίου ὁ παρονομαστὴς εἶναι 253698, καὶ τότε προσθέτομεν 0 εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ ὑπολοίπου τούτου, καὶ μετὰ ταῦτα ἐξακολουθοῦμεν

4304700	25,3698
1707720	16,967
2455320	
1720380	
1981920	
206034	

τὴν διαίρεσιν, ἥτις μᾶς δίδει 9 δεκατημόρια πηλίκον, καὶ ὑπόλοιπον 172038, εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ ὁποίου γράφομεν ἀκόμη 0. Μετὰ ταῦτα διαιροῦμεν τὸ ἐξαγόμενον διὰ τοῦ αὐτοῦ διαιρέτου, καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον 6 ἑκατοστημόρια, καὶ ὑπόλοιπον 198192· σιμὰ εἰς τὸ ὁποῖον θέτομεν 0, διαιροῦμεν ἐκ νέου διὰ τοῦ ἰδίου διαιρέτου, καὶ συνάγομεν πηλίκον 7 χιλιοστημόρια με ὑπολοιπόν τι, τὸ ὁποῖον ἀμελοῦμεν.

Οὕτω λαμβάνομεν 16,967 τὸ πηλίκον μεῖον $\frac{1}{1000}$, ἐπειδὴ ἡ ἀμεληθεῖσα ποσότης εἶναι $\frac{206034}{253698}$ τοῦ χιλιοστοῦ.

Ἠθέλαμεν εὕρει προσέτι ὡς πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ 3,4703 διὰ 0,027, 128,5296 μεῖον τοῦ 0,0001. Παρομοίως 0,596 διαιρεθὲν διὰ 0,0201, δίδει πηλίκον 296,51 μεῖον 0,01.

Θέλομεν ἐπανέλθει πάλιν εἰς τὴν τροπὴν τῶν κοινῶν κλασμάτων εἰς δεκαδικὰ, ἐπειδὴ αὕτη ἡ πρᾶξις παῤῥησιάζει πολλὰς ἀξιοπαρατηρήτους ἰδιότητας, τὰς ὁποίας κατὰ τὸ παρὸν πληρέστατα δὲν δυνάμεθα νὰ ἀναπτύξωμεν.

§. 89. Ὅταν εἰς τὴν διαίρεσιν ὁ διαιρέτης ἦναι ἀκέραιος ἀριθμὸς, ἢ περιέχει ὀλιγώτερα ψηφία δεκαδικὰ παρὰ τὸν διαιρούμενον, ἀντὶ νὰ προσθέσωμεν εἰς τὰ δεξιά του μηδενικὰ, διὰ νὰ τὰ ἀνάξωμεν εἰς τὸν αὐτὸν μὲ τὸν τοῦ διαιρετέου παρονομαστὴν, εἶναι ἁπλούστερον νὰ πράξωμεν, ὡς τώρα θέλομεν ἰδεῖ.

1ον Ἂς διαιρέσωμεν 437,4825 διὰ 56.

Ἐπειδὴ ἡ διαίρεσις δύναται ἐδῶ νὰ θεωρηθῇ ὡς νὰ ἐζητούσαμεν τὸ 56ον τοῦ διαιρετέου, λαμβάνομεν κατὰ πρῶτον τὸ 56ον τοῦ 437, ἢ διαιροῦμεν 437 διὰ 56, τὸ ὁποῖον μᾶς δί-

437,4825	56
454	7,8121
68	
122	
105	
49.	

δει πηλίκον 7 μονάδας καὶ ὑπόλοιπον 46, τὸ ὁποῖον ὁμοῦ μὲ τὰ 4 δεκατημόρια τοῦ διαιρετέου, σχηματίζει 454 δεκατημόρια, τῶν ὁποίων πρέπει νὰ λάβωμεν ἀκόμη τὸ $\overline{56}^{ον}$, τουτέστι νὰ διαιρέσωμεν 454 διὰ τοῦ 56, καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον 8 δεκατημόρια, τὰ ὁποῖα γράφομεν εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ 7, ἀφ' οὗ θέσωμεν ὑποδιαστολήν.

Τὸ ὑπόλοιπον 6 ἀκολουθούμενον ἀπὸ 8 ἑκατοστημόρια τοῦ διαιρετέου δίδει 68 ἑκατοστημόρια, τῶν ὁποίων τὸ $\overline{56}^{ον}$ εἶναι 1 ἑκατοστημόριον καὶ ὑπόλοιπον 12, τὸ ὁποῖον ἀκολουθούμενον ἀπὸ 2 χιλιοστὰ τοῦ διαιρετέου σχηματίζει 122 χιλιοστά· διαιροῦντες 122 διὰ 56 εὑρίσκομεν πηλίκον 2 χιλιοστὰ καὶ ὑπόλοιπον 10, εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ ὁποίου κατεβάζομεν τὸ τελευταῖον ψηφίον 5, καὶ οὕτως ἔχομεν 105, τὸ ὁποῖον διαιρούμενον διὰ 56 δίδει πηλίκον 1 δεκαχιλιοστημόριον. Λοιπὸν τέλος πάντων τὸ ζητούμενον πηλίκον εἶναι 7,8121.

Τοῦτο τὸ πηλίκον εἶναι ἀκριβὲς μεῖον 0,0001· ἀλλ' ἐὰν θέλωμεν νὰ προσεγγίσωμεν περισσότερον, πρέπει νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸ ὑπόλοιπον 49 ἓν 0, καὶ νὰ ἐξακολουθήσωμεν τὴν πρᾶξιν κατὰ τὸν κανόνα τοῦ ἀριθμ. 88.

Μὲ εὐκολίαν γνωρίζομεν, ὅτι ἡ πρᾶξις αὕτη εἶναι ἁπλουστέρα, παρὰ ἐὰν ἠθέλαμεν προσθέσει ἐξ ἀρχῆς 4 μηδενικὰ εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ διαιρέτου, διὰ νὰ τὸν ἀνάξωμεν εἰς τὸν αὐτὸν μὲ τὸν τοῦ διαιρετέου παρονομαστήν.

Ἠθέλαμεν εὕρει παρομοίως, ὅτι 14,37586 διαιρεθὲν διὰ 219 δίδει πηλίκον 0,06564, μεῖον 0,00001.

2ον Ἂς διαιρέσωμεν 3,40567 διὰ 0,039.

Ἀντὶ νὰ προσθέσωμεν δύο μηδενικὰ εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ διαιρέτου, ἐξαλείφομεν κατ' ἀρχὰς τὴν ὑποδιαστολὴν ἀπὸ τοὺς δύο ὅρους, μετὰ ταῦτα ἐκτελοῦμεν τὴν διαίρεσιν, ἐκ τῆς ὁποίας προκύπτει πηλίκον 8732.

340567	39
285	87,32
116	
97	
19	

Παρατηροῦμεν μετὰ ταῦτα, ὅτι ἐξαλείφοντες τὴν ὑποδιαστολὴν ἀπὸ τὸν διαιρετέον, ἐκαταστήσαμεν αὐτὸν 100000 φοραῖς μεγαλήτερον. Λοιπὸν (ἀριθμ. 63) τὸ εὑρεθὲν πηλίκον κατεστάθη καὶ αὐτὸ 100000 φοραῖς μεγαλήτερον· ἀλλὰ διὰ τὴν ἐξάλειψιν τῆς ὑποδιαστολῆς εἰς τὸν διαιρέτην, ἐκαταστήσαμεν αὐτὸν 1000 φοραῖς μεγαλήτερον· λοιπὸν διὰ ταύτην τὴν δευτέραν ἐξάλειψιν τὸ πηλίκον ἐξ ἐναντίας εἶναι (ἀριθμ. 63) 1000 φοραῖς μικρότερον· οὕτως εἰς τὸ τελευταῖον ἐξαγόμενον τὸ πηλίκον εἶναι μόνον 100000 διαιρεθὲν διὰ 1000, ἢ 100 φοραῖς μεγαλήτερον, καὶ διὰ νὰ τὸ φέρωμεν εἰς τὴν ἀκριβῆ του τιμὴν, πρέπει νὰ τὸ διαιρέσωμεν διὰ τοῦ 100, ἢ νὰ χωρίσωμεν δύο ψηφία πρὸς τὰ δεξιὰ, καὶ θέλομεν ἔχει 87,32.

Ἐὰν θέλωμεν νὰ προσεγγίσωμεν πλειότερον πρέπει νὰ προσθέσωμεν εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ ὑπολοίπου 19 ἓν 0, καὶ νὰ ἐξακολουθήσωμεν τὴν πρᾶξιν.

Κανὼν Γενικός. Ὅταν ὁ διαιρέτης περιέχῃ ὀλιγώτερα δεκαδικὰ ψηφία παρὰ τὸν διαιρετέον, ἐξαλείφομεν κατὰ πρῶτον τὴν ὑποδιαστολὴν καὶ ἀπὸ τοὺς δύο ὅρους, καὶ ἐκτελοῦντες τὴν διαίρεσιν πρέπει νὰ χωρίσωμεν κατὰ τὰ δεξιὰ τοῦ πηλίκου τόσα ψηφία δεκαδικὰ, ὅσαι μονάδες εἶναι μεταξὺ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν δεκαδικῶν ψηφίων τοῦ διαιρετέου, καὶ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν δεκαδικῶν ψηφίων τοῦ διαιρέτου.

Τοὺς τελευταίους κανόνας ἐξεθέσαμεν ὡς μέσα ἁπλούστερα εἰς τὰς πράξεις, ἐπειδὴ ὁ συσταθεὶς κανὼν εἰς τὸν ἀριθμ. 87, ἀνήκει εἰς ὅλας τὰς περιστάσεις.

§. 90. Ἰδοὺ νέαι ἐφαρμογαί.

Νὰ προσδιορίσωμεν 1ον τὸ πηλίκον τοῦ 21,234 διὰ 59,37469, ὥστε νὰ διαφόρῃ τῆς ἀκριβοῦς τιμῆς ὀλιγώτερον ἀπὸ 0,001.

Ἀπόκρισις· 0,357.

2ον Τὸ πηλίκον τοῦ 294 διὰ 7,356, μεῖον 0,0001.

Ἀπόκρισις· 39,673.

3ον Τὸ πηλίκον τοῦ 0,004736 διὰ 0,034 μεῖον τοῦ 0,0001.

Ἀπόκρισις· 0,13929.

Εἶναι περιττὸν νὰ παρατηρήσωμεν, ὅτι αἱ βάσανοι τῶν τοιούτων ἐργασιῶν γίνονται διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, καὶ αἱ βάσανοι τῶν παραδειγμάτων τοῦ πολλαπλασιασμοῦ διὰ τῆς διαιρέσεως.

§. βον Σύστημα τοῦ νέου Βάρους, καὶ τῶν νέων μέτρων.

Ἤδη ἐμποροῦμεν νὰ ὠφεληθῶμεν καλῶς ἀπὸ τὸν ὑπολογισμὸν τῶν δεκαδικῶν κλασμάτων εἰς παντὸς ἄλλου εἴδους κλάσματα, καὶ νὰ καταλάβωμεν πόσον μᾶς ἦτον ὠφέλιμος ἡ εὕρεσις συστήματός τινος τοῦ βάρους καὶ τῶν μέτρων συνδεδεμένων μὲ τὸ δεκαδικὸν σύστημα. Τοῦτο οἱ πεπαιδευμένοι ἐπέτυχαν ὄχι τόσον χωρὶς κόπους καὶ ἐμπόδια ἐκ μέρους τῆς ἀμαθείας καὶ τῶν προλήψεων.

Ἂς γνωστοποιήσωμεν λοιπὸν τὴν ὀνοματολογίαν τούτου τοῦ συστήματος.

Μέτρα γραμμικὰ, ἢ μέτρα τοῦ μήκους.

§. 91. Ἡ μονὰς τοῦ μήκους εἶναι τὸ μέτρον, ἢ τὸ δεκαμιλλιονιστημόριον τῆς ἀπὸ τὸν πόλον ἕως εἰς τὸν ἰσημερινὸν διαστάσεως, ὑπολογισθείσης ἐπὶ τοῦ μεσημβρινοῦ τοῦ διερχομένου ἀπὸ τοὺς Παρισίους.

Κατὰ τοὺς ἐκτελεσθέντας καὶ ἀποδειχθέντας ὑπολογισμοὺς μ' ὅλην τὴν ἀκρίβειαν, ἐγνώρισαν, ὅτι τὸ μέτρον ἐκτιμώμενον εἰς πόδας, δακτύλους καὶ γραμμὰς κ. τ. λ. ἰσοδυναμεῖ μὲ 3 πόδ. 0 δάκ. 11 γρ., 296 μεῖον $\frac{1}{1000}$ τῆς γραμμῆς.

Διὰ νὰ σχηματίσωσι μέτρα μεγαλήτερα ἢ μικρότερα παρὰ τὸ μέτρον, ἐσυμφώνησαν νὰ μεταχειρισθῶσι τὰς ἀκολούθους λέξεις.

Μύρια, χίλια, ἑκατὸν, δέκατον, ἑκατοστὸν, χιλιοστὸν, τὰ ὁποῖα ἐτέθησαν πρὸ τῆς λέξεως μέτρον, καὶ οὕτως ἐσχηματίσθη ὁ ἀκόλουθος Πίναξ.

Μυριόμετρον,	ἢ μέτρον ἀπὸ δέκα χιλιάδων μέτρα.
Χιλιόμετρον	χίλια μέτρα.
Ἑκατοντάμετρον . . .	ἑκατὸν μέτρα.
Δεκάμετρον	δέκα μέτρα.
Μέτρον	ἀρχικὴ μονάς.
Ὑποδεκάμετρον . . .	δέκατον τοῦ μέτρου.
Ὑφεκατοντάμετρον . .	ἑκατοστὸν τοῦ μέτρου.
Ὑποχιλιόμετρον . . .	χιλιοστὸν τοῦ μέτρου.

Σ. Κ. Τὸ μυριόμετρον καὶ τὸ χιλιόμετρον εἶναι τὰ ὁδοιπορικὰ μέτρα, τὰ ὁποῖα τώρα μεταχειρίζονται· τὸ μυριόμετρον εἶναι ὀλίγον περισσότερον τοῦ διπλασίου τῆς λέγας ἀπὸ 2500 ὀργυιάς· τὸ χιλιόμετρον εἶναι ὀλίγον τι περισσότερον παρὰ τὸ 5ον τῆς λέγας ἐκ 2500 ὀργυιῶν.

Μέτρον ἐπιφανείας.

§. 92. Ἡ μονὰς τῆς ἐπιφανείας καλεῖται ἄρον (are)· τοῦτο εἶναι τὸ τετραγωνικὸν δεκάμετρον, ἢ τετράγωνόν τι, τοῦ ὁποίου ἑκάστη πλευρὰ εἶναι ἀπὸ ἓν δεκάμετρον, ἢ ἀπὸ δέκα μέτρα.

Τὰ πολλαπλάσια τοῦ ἄρου σχηματίζονται διὰ τῶν αὐτῶν τούτων λέξεων, μύρια, χίλια, ἑκατὸν κ. τ. λ. οὕτως.

Μυρίαρον σημαίνει δέκα χιλιάδων ἄρα.
Χιλίαρον . . . χίλια . . ἄρα.
Ἑκατόνταρον . . ἑκατὸν . ἄρα.
Δέκαρον . . . δέκα . . ἄρα.
Ἄρον . . . . ἀρχικὴ μονάς.
Ὑποδέκαρον . . δεκατημόριον τοῦ ἄρου.
Ὑφεκατόνταρον . ἑκατοστημόριον τοῦ ἄρου.
Ὑποχιλίαρον . χιλιοστημόριον τοῦ ἄρου.

Σ. Κ. Τὸ Μυρίαρον, τὸ ἑκατόνταρον, τὸ ἄρον, τὸ ὑφεκατόνταρον εἶναι τὰ μόνα συνήθη μέτρα.

Τὸ ἑκατόνταρον ἐπέχει τὸν τόπον τοῦ πλέθρου· ἀλλ' ὑπερβαίνει τὸ διπλάσιον τούτου. Τὸ ἑκατόνταρον εἶναι τὸ τετραγωνικὸν μέτρον.

Μέτρον τῶν Στερεῶν.

§. 93. Ἡ μονὰς τῶν στερεῶν εἶναι τὸ κυβικὸν μέτρον, ἢ κύβος ἔχων ἓν μέτρον εἰς καθε πλευράν. Τὰ πολλαπλάσια τοῦ κυβικοῦ μέτρου εἶναι ἀνὰ δέκα μεγαλήτερα, καὶ τὰ ὑποπολλαπλάσια δὲν ἔλαβον μερικὰς ὀνομασίας· τὸ δὲ χιλιοστημόριον τοῦ κυβικοῦ μέτρου, τὸ ὠνόμασαν κύβον ὑποδεκάμετρον· ἐπειδὴ τῷ ὄντι εἶναι εἷς κύβος ἔχων ἓν ὑποδεκάμετρον εἰς κάθε πλευράν· τὸ 1000000^ον τοῦ κυβικοῦ μέτρου καλεῖται κύβος ὑφεκατοντάμετρος· ἐπειδὴ εἶναι κύβος ἔχων ἓν

ὑφεκατοντάμετρον εἰς κάθε πλευράν. Ὅταν τὰ μέτρα τῶν στερεῶν χρησιμεύωσιν εἰς καταμέτρησιν τῶν καυσίμων ξύλων, ἡ ἀρχικὴ μονὰς καλεῖται Στεῤῥόν.

Μετὰ ταῦτα θεωρεῖται τὸ δεκάστεῤῥον, ὡς μέτρον ἐκ δέκα στεῤῥῶν.

Μέτρα χωρητικότητος διὰ τὰ ὑγρὰ καὶ διὰ τὰ γεννήματα.

§. 94. Ἡ τωρινὴ μονὰς τῆς χωρητικότητος εἶναι ὁ λίτρος ἢ τὸ κυβικὸν ὑποδεκάμετρον· ἐκ δὲ τῶν πολλαπλασίων καὶ ὑποπολλαπλασίων ἰδοὺ τὰ συνηθέστερα.

Ἑκατοντάλιτρος ἢ	μέτρον ἑκατὸν λίτρων.
Δεκάλιτρος	δέκα λίτρων.
Λίτρος	ἀρχικὴ μονάς.
Ὑποδεκάλιτρος . . .	δέκατον τοῦ λίτρου.
Ὑφεκατοντάλιτρος . . .	ἑκατοστὸν τοῦ λίτρου.

Σ. Κ. Ὁ λίτρος λαμβάνεται ἀντὶ τῆς πίντης, ἥτις χρησιμεύει διὰ τὰ ὑγρά, καὶ λαμβάνεται ὡς τὸ λίτρον. Διὰ τὰ γεννήματα εἶναι ὁ λίτρος ὀλίγον μεγαλήτερος καὶ παρὰ τὴν πίνταν καὶ παρὰ τὸ λίτρον.

Ὁ δεκάλιτρος κρατεῖ τόπον ἑνὸς ἄλλου χρησιμεύοντος ὡς μέτρον τοῦ σίτου, καὶ παντὸς εἴδους γεννημάτων. Ὁ ἑκατοντάλιτρος κρατεῖ τόπον ἑνὸς ἄλλου μέτρου λεγομένου (setier) χρησίμου εἰς καταμέτρησιν πίθων οἴνου καὶ ἄλλων ὑγρῶν.

Ὁ χιλιόλιτρος καὶ μυριόλιτρος δὲν εἶναι εἰς χρῆσιν.

Περὶ τοῦ Βάρους.

§. 95. Ἡ μονὰς τοῦ βάρους εἶναι τὸ Γράμμον (gramme), τὸ ὁποῖον ἰσοδυναμεῖ μὲ ὑφεκατόμετρον κύβον ἀπὸ νερὸν διϋλισμένον καὶ φερμένον εἰς τὴν με-

γίστην πυκνότητά του. Ἡ τιμή του κατὰ τὸ παλαιὸν βάρος εἶναι $18^{κόκ.}$,82715, τουτέστι ὀλίγον τι περισσότερον ἀπὸ τὸ τεταρτημόριον τῆς δραχμῆς.

Ἰδοὺ ὁ πίναξ τῶν πολλαπλασίων καὶ ὑποπολλαπλασίων.

Χιλιόγραμμον . .	χίλια γράμμα.
Ἑκατοντάγραμμον .	ἑκατὸν γράμμα.
Δεκάγραμμον . .	δέκα γράμμα.
Γράμμον . . .	ἀρχικὴ μονάς.
Ὑποδεκάγραμμον .	δεκατημόριον τοῦ γράμμου.
Ὑφεκατοντάγραμμον.	ἑκατοστημόριον τοῦ γράμμου.
Ὑποχιλιόγραμμον .	χιλιοστημόριον τοῦ γράμμου.

Σ. Κ. Τὸ χιλιόγραμμον ὂν χιλιάκις μεγαλήτερον παρὰ τὸ γράμμον, τὸ ὁποῖον, εἴπαμεν, ἰσοδυναμεῖ μὲ 18,82715, ἰσοδυναμεῖ μὲ $18827^{γρ.}$,15· ἀλλ' ἐπειδὴ ἡ λίτρα εἶναι ἀπὸ (ἀριθμ. 65) $9216^{κόκ.}$; ἕπεται, ὅτι τὸ χιλιόγραμμον ἰσοδυναμεῖ ὀλίγον τι περισσότερον παρὰ τὸ διπλοῦν δύο λιτρῶν· οὕτως τὸ ἡμιχιλιόγραμμον δύναται νὰ βαλθῇ ἀντὶ τῆς παλαιᾶς λίτρας.

Περὶ νομισμάτων.

§. 96. Ἡ νέα μονὰς τῶν νομισμάτων εἶναι τὸ φράγκον· διὰ τὸν σχηματισμόν του ἐπροσδιορίσθη βάρος ἀπὸ πέντε γράμμα ὄγκον, ὅστις περιέχει 9 δεκατημόρια ἀπὸ ἄργυρον καθαρὸν, καὶ ἓν δεκατημόριον μίγματος. Τὸ βάρος τοῦτο καλεῖται φράγκον. Κατ' εὐτυχίαν ἔγεινε γνωστὸν, ὅτι περιέχει σχεδὸν τὴν αὐτὴν τιμὴν μὲ τὴν τῆς παλαιᾶς λίβρας· ἔχει ὅμως μίαν διαφορὰν $\frac{1}{80}$ πλειότερον τὸ φράγκον, τουτέστιν ἓν φράγ-

κὸν ἰσοδυναμεῖ μὲ $1^{\lambda\acute{\iota}\beta.}\frac{1}{80}$ ἢ $\frac{81}{80}$ τῆς λίβρας, ἢ, τὸ ὁποῖον δηλοῖ τὸ αὐτὸ, 80 φράγκα ἰσοδυναμοῦν μὲ 81 λίβρας.

Τὰ ὑποπολλαπλάσια τούτου εἶναι τὸ δέκατον, ἑκατοστόν. Εἰς δὲ τὰ πολλαπλάσιά του δὲν ἔκριναν εὔλογον νὰ δώσωσιν ὀνομασίας.

§. 97. Ἰδοὺ λοιπὸν ἡ ἑρμηνεία τῆς ὀνοματολογίας τῶν μέτρων. Δυνάμεθα νὰ πιστωθοῦμεν τὴν ὠφέλειαν, τὴν ὁποίαν παῤῥησιάζει τὸ νέον σύστημα παραβαλλόμενον πρὸς τὸ παλαιόν.

1ον. Εἶναι μονόμορφον καὶ ἁπλοῦν, καθότι αἱ ἀρχικαὶ μονάδες καὶ αἱ ὑποδιαιρέσεις ἐξακολουθοῦσιν ὅλαί μεταξύ των τὸν νόμον τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος, τοῦ ὁποίου ἡ ἁπλότης εἶναι πρὸ πολλοῦ γνωστὴ εἰς ἡμᾶς.

2ον. Εἶναι στερεὸν καὶ ἀμετάβλητον καὶ ἁρμόδιον εἰς κάθε τόπον· δὲν ἀνήκει εἰς κανὲν κλίμα, οὔτε εἰς κανὲν γένος μερικὸν *).

Ὅλα ταῦτα τὰ μέτρα πορίζονται ἀπὸ τὸ ῥηθὲν πρωτότυπον μέτρον, τὰ ἴδια νομίσματα, τὰ ὁποῖα κατὰ πρῶτον φαίνονται νὰ μὴν ἔχωσι καμμίαν σχέσιν

*) Παρατήρησις τοῦ μεταφραστοῦ. Ἀνήκουσιν εἰς κάθε γένος καὶ κάθε κλίμα· διότι ἡ ἀρχικὴ μονὰς ἐλήφθη ἀπὸ τὴν φύσιν, ἥτις ἀνήκει εἰς ὅλα τὰ γένη· καὶ τὸ διάστημα τοῦ Πόλου ἀπὸ τὸν Ἰσημερινὸν δι' ὅλα τὰ γένη εἶναι τὸ αὐτὸ, ὡς καὶ τὸ δεκαμιλλιονιστημόριον τοῦ τοιούτου διαστήματος εἶναι δι' ὅλα τὰ γένη τὸ αὐτό. Περιπλέον ἐλήφθη εἰς τὴν φύσιν τὸ τοιοῦτον μέτρον διὰ νὰ ὑπάρχῃ μὲ αὐτήν· καὶ διὰ νὰ μὴ δώσῃ εἰς τοὺς μεταγενεστέρους ἀρχαιολόγους, ἐὰν κατὰ περίστασιν ἤθελε χαθῇ ἡ τιμὴ τοῦ μέτρου, διαφιλονείκησιν εἰς τὸ πῶς νὰ ἐκτιμήσωσι τὸ νῦν καλούμενον μέτρον· ἐπειδὴ θέλουν εὕρει πάντοτε, ὅτι εἶναι τὸ δεκεμιλιονιστημόριον τοῦ διαστήματος μεταξὺ τοῦ πόλου καὶ τοῦ ἰσημερινοῦ.

μὲ τὸ μέτρον προσκολλοῦνται πλαγίως πρὸς αὐτό· ἐπειδὴ τὸ φράγκον, εἴδομεν, εἶναι ἡ τιμὴ τῶν 5 γράμμων, καὶ τὸ γράμμον εἶναι τὸ βάρος ἑνὸς ὑφεκατομέτρου κύβου ἀπὸ διϋλισμένον ὕδωρ.

§. 98. Ἡ ἐφάρμοσις τῶν τεσσάρων ἐργασιῶν τῆς ἀριθμητικῆς εἰς τὸ νέον σύστημα τοῦ βάρους καὶ τῶν μέτρων, δὲν παῤῥησιάζει καμμίαν δυσκολίαν, ὕστερον ἀπὸ ὅσα εἴπομεν ἐπὶ τῶν δεκαδικῶν κλασμάτων, καὶ διὰ τοῦτο δὲν μένομεν εἰς ταύτην τὴν ὑπόθεσιν, ἀλλὰ γνωστοποιοῦμεν τὰ μέσα, διὰ νὰ λύσωμεν δύο ζητήματα ἀνάλογα μέχρι τῆς παντελοῦς ἀκυρώσεως καὶ ἀναιρέσεως τοῦ παλαιοῦ συστήματος. Διὰ τοῦτο δὲν ἐκάμαμεν τὸ πᾶν ἀντεισάγοντες τὸ νέον σύστημα ἀντὶ τοῦ παλαιοῦ, ἀλλ' ἔπρεπεν ἀκόμη νὰ δείξωμεν τὴν σχέσιν μεταξὺ τῆς τιμῆς καὶ τῆς ποσότητος τῶν πραγμάτων τοῦ ἐμπορίου, καὶ νὰ ἐκτιμήσωμεν καὶ τὴν μίαν καὶ τὴν ἄλλην καὶ εἰς τὰ δύο συστήματα.

Τὸ ἀκόλουθον πρόβλημα θέλει σαφηνίσει ὅ,τι εἴπαμεν.

Εἷς ἔμπορος ὑφασμάτων ἐπούλησεν ἕως τώρα τὴν πήχην ἑνὸς εἴδους ὑφάσματος ἀπὸ $36^{\lambda\iota\beta.}$ $17^{\sigma o\lambda.}$ $6^{\delta\eta\nu.}$ Ζητεῖται πόσα φράγκα κατὰ ἀναλογίαν πρέπει νὰ λάβῃ ὁ ἔμπορος.

Τὸ πρόβλημα τοῦτο λύεται φανερά, ἐὰν γνωρίσωμεν τὴν τιμὴν τῶν $36^{\lambda.}$ $17^{\sigma.}$ $6^{\delta.}$ εἰς φράγκα, δεκατημόρια καὶ ἑκατοστημόρια, τὰ ὁποῖα ἤθελαν δώσει τὴν τιμὴν τῆς πήχης εἰς φράγκα, καὶ προσέτι τὴν τιμὴν τοῦ μέτρου εἰς πήχας· ἐπειδὴ ἡ τελευταία ἐκφράζει τὸ μέρος, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ λάβωμεν ἀπὸ τὴν τιμὴν τῆς πήχης εἰς φράγκα, διὰ νὰ ἔχωμεν ἐκείνην τοῦ μέτρου.

Λοιπὸν πρέπει νὰ λύσωμεν τὰ ἀκόλουθα δύο ζητήματα.

1ον. Νὰ ἐκφράσωμεν τὴν τιμὴν ἀριθμοῦ συμμιγοῦς τοῦ παλαιοῦ συστήματος διὰ μέσου ἀναλόγων μονάδων καὶ δεκαδικῶν ὑποδιαιρέσεων ταύτης τῆς μονάδος ἀποβλεπουσῶν τὸ νέον σύστημα.

2ον. Ἀντιστρόφως. Νὰ ἐκφράσωμεν ἕνα τινὰ ἀριθμὸν μονάδων τοῦ νέου συστήματος καὶ τὰς ὑποδιαιρέσεις ταύτης τῆς μονάδος διὰ μέσου τῆς ἀναλόγου μονάδος, καὶ τῶν συνήθων ὑποδιαιρέσεών της ἀποβλεπουσῶν τὸ παλαιὸν σύστημα.

Θέλομεν δὲ ὁμιλήσει διαδοχικῶς περὶ τῶν δύο τούτων ζητημάτων, ὡς πρὸς τὰ νομίσματα, ὡς πρὸς τὰ μέτρα τοῦ μήκους, καὶ ὡς πρὸς τὰ βάρη· ἐπειδὴ αὐτὰ εἶναι τὰ συνηθέστερα μέτρα· καὶ ἐκ τούτων εἶναι εὔκολον νὰ εὕρωμεν τὸν ὁποῖον πρέπει νὰ ἀκολουθήσωμεν δρόμον πρὸς πᾶν ἄλλο εἶδος μέτρων.

§. 99. Ἃς ἀρχίσωμεν ἀπὸ τὰ νομίσματα.

1ον. Ζητεῖται νὰ προσδιορίσωμεν τὴν τιμὴν τῶν $245^{\lambda/\beta.}\ 19^{\sigma.}\ 6^{\delta.}$ εἰς φράγκα, δεκατημόρια καὶ ἑκατοστημόρια.

Εἴπομεν (ἀριθμ. 96), ὅτι τὸ φράγκον δύναται $\frac{1}{80}$ περισσότερον τῆς λίβρας· ἀλλὰ $\frac{1}{80}$ τῆς λίβρας κάμνει $\frac{20}{80}$ ἢ $\frac{1}{4}$ τοῦ σολδίου, τουτέστι 3 δηνάρια· οὕτω τὸ φράγκον ἰσοδυναμεῖ μὲ $1^{\lambda.}\ 0^{\sigma.}\ 3^{\delta\eta.}$ ἢ $243^{\delta\eta\nu.}$. Προσέτι $245^{\lambda.}\ 19^{\sigma.}\ 7^{\delta.}$ ἠγμένα εἰς δηνάρια, δίδουσιν ἐξαγόμενον $59035^{\delta\eta\nu.}$, ὡς ἐδῶ φαίνεται.

Λοιπὸν ἐὰν ζητήσωμεν πόσαις φοραῖς 59035 δηνάρια περιέχουν 243 δηνάρια, ἢ ἐὰν διαιρέσωμεν 59035 διὰ 243, τὸ πηλίκον ἐκτιμώμενον εἰς δεκαδικὰ (ἀριθμ. 88) ἐκφράζει τὸν ἀριθμὸν τῶν ζητουμένων φράγκων, δεκατημορίων, καὶ ἑκατοστημορίων. Ἀλλ᾽ αὐτὸ τὸ πηλίκον φθάνον ἕως εἰς τὰ χιλιοστημόρια εἶναι 242φρ., 942· οὕτως 245λίβ. 19τολ. 7δην. ἰσοδυναμοῦσι μὲ 242φρ., 94ἑκατοστ. μεῖον ἑνὸς ἑκατοστημορίου.

λίβ. σολ. δην.
245 19 7
20
4919
12
59035 | 243
1043 | 242,972
715
2290
1030
580
94.

Λοιπὸν βλέπομεν, ὅτι διὰ νὰ ἐκτιμήσωμεν εἰς φράγκα, δεκατημόρια καὶ ἑκατοστημόρια ἕνα τινὰ ἀριθμὸν λιβρῶν, σολδίων, καὶ δηναρίων, πρέπει, ἀφ᾽ οὗ ἀνάξωμεν τὸν προτεθέντα ἀριθμὸν εἰς δηνάρια, νὰ διαιρέσωμεν αὐτὸν τὸν ἀριθμὸν τῶν δηναρίων διὰ 243 (ὅστις ἐκφράζει εἰς δηνάρια τὴν τιμὴν ἑνὸς φράγκου) καὶ μετὰ ταῦτα νὰ ἐκτιμήσωμεν τὸ πηλίκον εἰς δεκαδικὰ ἐξακολουθοῦντες τὴν ἐργασίαν ἕως εἰς τὰ ἑκατοστημόρια.

Ἡ βάσανος ταύτης τῆς πράξεως γίνεται διὰ τοῦ ἀντιστρόφου ζητήματος, ὡς θέλομεν ἰδεῖ.

2ον. Ζητεῖται εἰς λίβρας, σολδία καὶ δηνάρια ἡ τιμὴ τῶν 242φρ. 94δην., ἢ μᾶλλον τῶν 242φρ., 942 (θεωροῦμεν ἐδῶ ἕως καὶ τὰ χιλιοστὰ τοῦ φράγκου, διὰ νὰ ἦναι ἡ ἀκρίβεια τελειοτέρα).

Ἐπειδὴ ἓν φράγκον ἰσοδυναμεῖ μὲ μίαν λίβραν πλέον $\frac{1}{80}$ τῆς λίβρας, ἕπεται, ὅτι 242φρ., 942 ἰσοδυναμοῦν μὲ 242λίβ., 942 πλέον $\frac{1}{80}$ τῶν 242λίβ., 924.

Λοιπὸν πρέπει νὰ λάβωμεν τὸ $80^{ον}$ τούτου τοῦ τελευταίου ἀριθμοῦ, καὶ νὰ τὸ ἑνώσωμεν μετὸν ἴδιον ἀριθμὸν, καὶ αὕτη ἡ πρᾶξις δίδει εἰς λίβρας καὶ εἰς κλάσμα δεκαδικὸν τῆς λίβρας τὴν τιμὴν τῶν $242^{φρ.}$, 942.

Μένει ἔπειτα νὰ ἐκτιμήσωμεν εἰς σολδία καὶ δηνάρια τὸ δεκαδικὸν κλάσμα.

Διὰ νὰ προσδιορίσωμεν τὸ $\overline{80}^{ον}$ τῶν $242^{φρ.}$, 942, ἀρκεῖ νὰ λάβωμεν τὸ $\overline{8}^{ον}$, τὸ ὁποῖον μᾶς δίδει 30,36775, καὶ νὰ διαιρέσωμεν τοῦτο τὸ ἐξαγόμενον διὰ τοῦ 10, ἢ (ἀριθ. 83) νὰ προχωρήσωμεν τὴν ὑποστιγμὴν μίαν τάξιν πρὸς τὰ ἀριστερὰ, καὶ εὑρίσκομεν 3, 036775, τὸ ὁποῖον προσθέτοντες εἰς 242, 942 ἔχομεν $245^{λίβ.}$, 978775.

Διὰ νὰ ἐκτιμήσωμεν τὸ κλάσμα $0^{λίβ.}$, 978775 εἰς σολδία, πρέπει (ἀριθμ. 67) νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ 20, τὸ ὁποῖον μᾶς δίδει $19^{σολ.}$, 575500. Τέλος πάντων, διὰ νὰ ἐκτιμήσωμεν $0^{σολ.}$, 575500 εἰς δηνάρια, τὸ πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ 12, καὶ εὑρίσκομεν $6^{δην.}$, 906000 ἢ μᾶλλον 7 δηνάρια μεῖον $\frac{1}{10}$ τοῦ δηναρίου. Λοιπὸν τέλος πάντων $242^{φρ.}$, 942 εἶναι ἰσοδύναμα μὲ $245^{λίβ.}$ $19^{σολ.}$ $7^{δην.}$

242,	942
3,	036775
$245^{λίβ.}$,	978775
	20
$19^{σολ.}$,	575500
	12
$6^{δην.}$,	906000
$245^{λ.}$ $19^{σολ.}$ $7^{δην.}$	

Κανὼν Γενικός. Διὰ νὰ τρέψωμεν, εἰς λίβρας σολδία καὶ δηνάρια ἀριθμὸν φράγκων, δεκατημορίων καὶ ἑκατοστημορίων, γράφομεν κατὰ πρῶτον τὸν δεδομένον ἀριθμὸν, καὶ ὑπ' αὐτοῦ τὸ $\overline{80}^{ον}$ τοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ (τὸ ὁποῖον προσδιορίζομεν λαμβάνοντες κατὰ πρῶτον τὸ $\overline{8}^{ον}$, καὶ προχωροῦντες τὴν ὑποδια-

στολὴν μίαν τάξιν πρὸς τὰ ἀριστερὰ), μετὰ ταῦτα προσθέτομεν τοὺς δύο τούτους ἀριθμοὺς, καὶ οὕτως προσδιορίζομεν τὸν δεδομένον ἀριθμὸν ἐκφρασμένον εἰς λίβρας καὶ δεκαδικὸν κλάσμα τῆς λίβρας.

Μετὰ ταῦτα πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ 20 τὸ δεδομένον δεκαδικὸν κλάσμα (ἀφ' οὗ ἐξαλείφωμεν τὰς ἀκεραίας μονάδας, αἵτινες ἐκφράζουσι τὰς λίβρας.) καὶ οὕτω συνάγομεν γινόμενον, τοῦ ὁποίου τὸ ἀκέραιον μέρος ἐκφράζει σολδία.

Τέλος πάντων πολλαπλασιάζομεν τὸ δεκαδικὸν κλάσμα τούτου τοῦ ἐξαγομένου ἐπὶ 12, καὶ οὕτως ἔχομεν γινόμενον, τοῦ ὁποίου τὸ ἀκέραιον μέρος ἐκφράζει δηνάρια, καὶ μετὰ ταῦτα ἐξαλείφομεν τὸ δεκαδικὸν μέρος, ἐκτὸς ἐὰν τὸ ψηφίον τῶν δεκατημορίων ἦναι ἴσον μὲ 5 ἢ μεγαλήτερον τοῦ 5, εἰς τὴν ὁποίαν περίστασιν αὐξάνομεν μὲ ἓν τὸν ἀριθμὸν τῶν δηναρίων.

Ἂς ἐφαρμόσωμεν ἐκ δευτέρου τὰς δύο μεθόδους εἰς τὸ ἀκόλουθον παράδειγμα.

Ζητεῖται εἰς φράγκα, δεκατημόρια, καὶ ἑκατοστημόρια ἡ τιμὴ τῶν $3179^{\text{λίβ.}}\ 17^{\text{σολ.}}\ 8^{\text{δην.}}$

Εὐχαριστούμεθα μόνον νὰ δώσωμεν τὸν πίνακα τῶν ὑπολογισμῶν.

Πρῶτον Ζήτημα.

λίβ.	σολ.	δην.
3179	17	8

```
  3179  17  8
    20
 63597
    12
763172 | 243
  341  | 3140,625
   987
  1520
   620
  1340
   125
```

Δεύτερον Ζήτημα.

```
 3140 , 626
   39 , 2571825
 3179λίβ., 8828125
                20
  17τολ., 6562500
                12
   7δην., 8750000
```

Ἀπόκρισις. 3140 φρ., 63 ἑκατοστ.

Ἀπόκρισις. 3170 λίβ. 17 σολ. 8 δην.

Σ. Κ. Εἰς τὸ πρῶτον ζήτημα, ἐπειδὴ τὸ ψηφίον τῶν χιλιοστημορίων τοῦ πηλίκου εἶναι 5, καὶ ἀκολουθεῖται ἀπὸ ἄλλα πολλὰ, ἐλάβομεν δι' ἀνταμοιβὴν 3140φρ., 63ἑκατ., ἐπειδὴ οὕτως τὸ πραττόμενον σφάλμα εἰς αὔξησιν εἶναι μικρότερον ἀπὸ ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον ἠθέλαμεν πράξει εἰς ὀλιγόστευσιν, ἐὰν ἠθέλαμεν ἀμελήσει τὸ ψηφίον 5 καὶ τὰ ἀκόλουθα αὐτοῦ.

Εἰς τὸ δεύτερον ζήτημα τὸ ἀκέραιον τῶν συναγομένων δηναρίων εἶναι 7 δηνάρια, καὶ ἡμεῖς ἐλάβαμεν 8 δηνάρια, ἐπειδὴ τὸ ψηφίον τῶν δεκατημορίων εἶναι 9 ἢ μεγαλήτερον τοῦ 5. Θέλομεν εὕρει παρομοίως, ὅτι 56275φρ., 97 ἐκτιμῶνται μὲ 56979λίβ. 8τολ. 5δην. καὶ ἀντιστρόφως.

Γραμμικὰ μέτρα.

§. 100. Πρὶν περάσωμεν εἰς τὴν λύσιν τῶν δύο ζητημάτων, εἶναι ἀνάγκη νὰ ἀναζητήσωμεν κατὰ πρῶ-

τον τὴν τιμὴν τῆς ὀργυιᾶς εἰς μέτρον, καὶ τοῦ μέτρου εἰς ὀργυιάν· τουτέστι νὰ ἐκφράσωμεν τὴν παλαιὰν γραμμικὴν μονάδα εἰς νέα μέτρα, καὶ ἀντιστρόφως τὴν νέαν γραμμικὴν μονάδα εἰς παλαιὰ μέτρα.

Ἀλλ' ἠξεύρομεν, ὅτι ἡ ὀργυιὰ ἰσοδυναμεῖ μὲ 864 γραμμάς· προσέτι τὸ μέτρον ἰσοδυναμεῖ (ἀριθμ. 91) μὲ $3^{π.}$, $0^{δ.}$, $11^{γρ.}$, 296, ἢ ἄγοντες τοῦτον τὸν ἀριθμὸν εἰς γραμμὰς, μὲ $443^{γρ.}$, 296. Λοιπὸν, ἐὰν διαιρέσωμεν 864 διὰ 443,296, ἢ μᾶλλον 864000 διὰ 443296, τὸ πηλίκον ἠγμένον εἰς δεκαδικὰ ἐκφράζει τὴν τιμὴν τῆς ὀργυιᾶς εἰς μέτρα.

Εὑρίσκομεν, ἐκτελουμένου παντὸς ὑπολογισμοῦ, ὅτι ἡ ὀργυιὰ ἰσοδυναμεῖ εἰς μέτρα μὲ $1^{ημλ.}$, 949036, τουτέστι μὲ ἓν μέτρον καὶ 949 χιλιόμετρα, μεῖον ἑνὸς δεκαχιλιομέτρου.

Παρομοίως, ἐὰν διαιρέσωμεν 443,296 διὰ 864, κατὰ τὸν κανόνα τοῦ ἀριθμ. 89, θέλομεν εὕρει τὴν τιμὴν τοῦ μέτρου εἰς ὀργυιὰν καὶ κλάσμα δεκαδικὸν τῆς ὀργυιᾶς.

Ἐκτελεσθέντος τοῦ νέου τούτου ὑπολογισμοῦ, εὑρίσκεται, ὅτι τὸ μέτρον ἰσοδυναμεῖ εἰς ὀργυιὰς μὲ $0^{όρ.}$, 5130740, μεῖον σχεδὸν 0,0000001 τῆς ὀργυιᾶς.

Συνέπεια. Τὸ μυριόμετρον ὂν ἴσον μὲ 10000 μέτρα ἰσοδυναμεῖ μὲ 10000 φοραῖς $0^{όρ.}$, 5130740 ἢ $5130^{όρ.}$, 740. Τοῦτο μᾶς δεικνύει, ὅτι τὸ μυριόμετρον εἶναι ὀλίγον μεγαλήτερον τοῦ διπλασίου τῆς λέγας τῶν $2500^{όρ.}$, καθὼς τὸ ἐφανερώσαμεν εἰς τὸν ἀριθμὸν 91.

Τούτου τεθέντος, $1^{ον.}$ Ζητεῖται εἰς μέτρα, ὑποδεκάμετρα καὶ ὑφεκατοντάμετρα κ. τ. λ. ἡ τιμὴ τῶν $17^{όρ.}$ $5^{π.}$ $4^{δ.}$ $8^{γρ.}$

Κατ' ἀρχὰς ἀνάγομεν τὸν ἀριθμὸν τοῦτον εἰς

γραμμάς, καὶ εὑρίσκομεν 15464 γραμμὰς, μετὰ ταῦτα διαιροῦμεν 15464 διὰ 443, 296 (ἀριθμὸς γραμμῶν περικλειουσῶν τὸ μέτρον), ἢ 1546400 διὰ 443296, καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον, 34,88414 μεῖον τοῦ 0,00001. Λοιπὸν 17$^{ὀρ.}$ 5$^{π.}$ 4$^{δ.}$ 8$^{γρ.}$ ἰσοδυναμοῦν μὲ 34$^{μετ.}$,88414, δηλαδὴ μὲ 34 μέτρα 884 χιλιόμετρα μεῖον ἑνὸς χιλιομέτρου.

2$^{ον.}$ Ζητεῖται ἡ τιμὴ 34$^{μετ.}$,88414 εἰς ὀργυιὰς, πόδας, δακτύλους, καὶ γραμμάς.

Ἐπειδὴ ἓν μέτρον ἰσοδυναμεῖ εἰς ὀργυιὰς μὲ 0$^{ὀρ.}$,513074, ἕπεται, ὅτι διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν τιμὴν τῶν 34,88414, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν 0$^{ὀρ.}$,513074 ἐπὶ 34,88414, καὶ τὸ προκύπτον γινόμενον ἐκφράζει εἰς ὀργυιὰς καὶ δεκαδικὸν κλάσμα τῆς ὀργυιᾶς τὴν ζητουμένην τιμήν. Μένει ἔπειτα νὰ τρέψωμεν τὸ δεκαδικὸν τοῦτο κλάσμα εἰς πόδας, δακτύλους, καὶ γραμμάς.

Ἰδοὺ ὁ πίναξ τοῦ ὑπολογισμοῦ.

Προτιμῶμεν διὰ πολλαπλασιαστέον τὸ 34,88414· ἐπειδὴ οὕτως ἡ πρᾶξις γίνεται ἁπλουστέρα· εὑρίσκομεν δὲ γινόμενον 17$^{ὀρ.}$,898, ἀμελοῦντες τὰ ὀκτὼ τελευταῖα δεκαδικὰ ψηφία.

Διὰ νὰ τρέψωμεν 0$^{ὀρ.}$,898 εἰς πόδας πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ 6, καὶ εὑρίσκομεν 5$^{π.}$,388.

Πολλαπλασιάζοντες 0$^{ποδ.}$,388 ἐπὶ 12 διὰ νὰ σχηματίσωμεν τοὺς δακτύλος εὑρίσκομεν 4$^{δ.}$,656.

```
          34,88414
          0.503074
     -------------
          13953656
         24418898
       10465242
      3488414
    17442070
    17ὀρ.,89814524636
     -------------
                 6
     -------------
            5π.,388
                12
     -------------
            4δ.,656
                12
     -------------
         γρ.
           7  ,872
```

Πολλαπλασιάζομεν τέλος πάντων 0,656 ἐπὶ 12, διὰ νὰ εὕρωμεν τὰς γραμμὰς, καὶ εὑρίσκομεν $7^{γρ.}$,82, ἢ μόνον 8 γραμμάς.

Λοιπὸν $34^{μέτ.}$,88414 εἶναι ἰσοδύναμα μὲ $17^{ὀρ.}$ $5^{π.}$, $4^{δ.}$, $8^{γρ.}$ τοῦτο βεβαιόνει τὴν πρώτην πρᾶξιν.

Σ. Κ. Εἰς ταύτην τὴν τελευταίαν πρᾶξιν ἠμελήσαμεν τὰ ὀκτὼ τελευταῖα δεκαδικὰ ψηφία τοῦ γινομένου, ὅταν ἠθελήσαμεν νὰ τὸ ἐκτιμήσωμεν εἰς πόδας, δακτύλους καὶ γραμμάς. Ἰδοὺ δὲ τούτου ὁ λόγος. Ἐπειδὴ πολλαπλασιάζοντες τὸ γινόμενον τοῦτο διαδοχικῶς ἐπὶ 6, 12 καὶ 12, τὸν πολλαπλασιάζομεν (ἀριθμ. 25) ἐπὶ τὸ γινόμενον τῶν τριῶν τούτων ἀριθμῶν, ἢ ἐπὶ 864, βλέπομεν ὅτι κρατοῦντες μόνον λογαριασμὸν τῶν χιλιοστημορίων τοῦ πρώτου ληφθέντος γινομένου, τὸ τελευταῖον ἐξαγόμενον θέλει εἶναι $\frac{864}{1000}$ τῆς γραμμῆς, μεῖον κἂν μιᾶς γραμμῆς. Αὕτη ἡ παρατήρησις συντέμνει πολὺ τοὺς ὑπολογισμούς. Θέλομεν δὲ ἐπανέλθει ἐκεῖ ἐπάνω, εἰς τὸ τέλος τούτου τοῦ κεφαλαίου.

Ἂς ἐκτιμήσωμεν προσέτι $5^{π.}$ $6^{δ.}$ $7^{γρ.}$ εἰς μέτρα καὶ εἰς δεκαδικὰ κλάσματα τοῦ μέτρου· (οὗτος ὁ συμμιγὴς ἀριθμὸς ἠμπορεῖ νὰ ληφθῇ εἰς τὸ ἀνάστημα ἑνὸς ἀνδρός).

Ἄγομεν τὸν ἀριθμὸν τοῦτον εἰς γραμμὰς καὶ εὑρίσκομεν 799 γραμμὰς, διαιροῦμεν 799 διὰ 443,296 ἢ 799000 διὰ 443296, καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον $1^{μέτ}$,802 χιλιόμετρα, μεῖον ἑνὸς χιλιομέτρου.

Περὶ τῶν ὑφασμάτων.

§. 101. Ἠξεύρομεν, ὅτι ἡ πήχη ἰσοδυναμεῖ μὲ $3^{\text{ποδ.}}$ $8^{\text{δακ.}}$ ἢ μὲ 44 δακτ. τουτέστι 528 γραμμάς. Λοιπὸν διαιροῦντες 528 διὰ 443,296, ἢ 528000 διὰ 443296 προσδιορίζομεν τὴν τιμὴν τῆς πήχης εἰς μέτρον. Καὶ ἐκτελοῦντες ταύτην τὴν διαίρεσιν εὑρίσκομεν, ὅτι ἡ πήχη ἔχει διὰ τιμὴν $1^{\text{μέτ.}}$,192 χιλιόμετρα, ἢ ἀκριβέστερον $1^{\text{μ.}}$,191077.

Καὶ ἀντιστρόφως 443,296 διαιρούμενον διὰ 528 δίδει πηλίκον 0,839576 μεῖον $\frac{1}{1000000}$. Λοιπὸν τὸ μέτρον ἰσοδυναμεῖ μὲ 0,839576 τῆς πήχης.

Ζητεῖται ἡ τιμὴ τῶν 29 πηχῶν καὶ $\frac{7}{12}$ εἰς μέτρα καὶ δεκαδικὸν κλάσμα τοῦ μέτρου.

Δυνάμεθα, καθὼς εἰς τὴν ὀργυιὰν καὶ τὰς ὑποδιαιρέσεις αὐτῆς, νὰ τρέψωμεν τὰς 29 πήχας καὶ $\frac{7}{12}$ εἰς δωδέκατα τῆς γραμμῆς, πολλαπλασιάζοντες 29 καὶ $\frac{7}{12}$ ἢ $\frac{355}{12}$ ἐπὶ 528, ἀριθμὸν γραμμῶν περιέχοντα τὴν πήχην, καὶ νὰ τρέψωμεν παρομοίως τὸ μέτρον ἢ $443^{\text{γρ.}}$,296 εἰς δωδέκατα τῆς γραμμῆς, τουτέστι πολλαπλασιάζοντες τὸν ἀριθμὸν τοῦτον ἐπὶ 12; καὶ μετὰ ταῦτα νὰ διαιρέσωμεν τὰ δύο ἐξαγόμενα τὸ ἓν διὰ τοῦ ἄλλου, καὶ νὰ ἐκτιμήσωμεν τὸ πηλίκον εἰς δεκαδικά· ἀλλὰ ἡ πρᾶξις γίνεται μὲ περισσοτέραν συντομίαν, ὡς ἐδῶ ἀκολουθεῖ.

Κατὰ πρῶτον ἐκτιμοῦμεν τὴν πήχην μεῖον 0,000001, καὶ εὑρίσκομεν αὐτὴν ἴσην μὲ 1,191077.

Τούτου τεθέντος σχηματίζομεν πρῶτον τὸ γινόμενον τοῦ ἀριθμοῦ τούτου ἐπὶ 29, καὶ εὑρίσκομεν 34,541233 ὡς ἐδῶ φαίνεται· μετὰ ταῦτα ἀναλύοντες $\frac{7}{12}$ εἰς $\frac{6}{12}$ ἢ $\frac{1}{2}$ καὶ $\frac{1}{12}$ ἢ τὸ $\frac{1}{6}$ τοῦ

	1,191077
	29 $\frac{7}{12}$
	10719693
	2382154
	34,541233
$\frac{6}{12}$	0,595558
$\frac{1}{2}$	0,099256
	35,236027

$\frac{1}{2}$, λαμβάνομεν κατὰ πρῶτον διὰ $\frac{6}{12}$ τὸ ἥμισυ τοῦ 1,191077, τὸ ὁποῖον εἶναι 0,595538, τὸ ὁποῖον γράφομεν ὑπὸ τὸ ἤδη ληφθὲν γινόμενον· μετὰ ταῦτα τὸ 6ον τοῦ 0,595538, τὸ ὁποῖον εἶναι 0,099256, γινόμενον, τὸ ὁποῖον γράφομεν ὑπὸ τῶν δύο προτέρων, καὶ ἐκτελοῦντες τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν τούτων γινομένων, εὑρίσκομεν ἐξαγόμενον 35,236027. Λοιπὸν 29 πῆχαι καὶ $\frac{7}{12}$ ἰσοδυναμοῦν μὲ 25μ., 236 χιλιόμετρα μεῖον ἑνὸς χιλιομέτρου.

Αὕτη ἡ πρᾶξις δύναται νὰ ἐφαρμοσθῇ καὶ εἰς τὰς ὀργυιάς, πόδας κ. τ. λ., ἀφ' οὗ ληφθῇ ἡ τιμὴ μιᾶς ὀργυιᾶς εἰς μέτρον· ἀλλ' ἠθέλαμεν παρασυρθῇ εἰς πολλαπλασιασμοὺς ἐπὶ ὅμοια μέρη πολὺ πλέον συμπεπλεγμένα ἢ συμμιγῆ.

§. 102. Βάρη. Ἠξεύρομεν, ὅτι ἡ λίτρα περιέχει 9216 κόκκους (ὅρ. ἀριθμ. 65). Εἴπομεν παρομοίως (ἀριθμ. 95) ὅτι τὸ χιλιόγραμμον ἰσοδυναμεῖ μὲ 18827,κο.,15. Λοιπὸν διαιροῦντες 9216 διὰ 1882715 ἢ 921600 διὰ 18827,15 εὑρίσκομεν τὴν τιμὴν τῆς λίτρας εἰς χιλιόγραμμα, καὶ τὰς δεκαδικὰς ὑποδιαιρέσεις τοῦ χιλιογράμμου. Καὶ ἀντιστρόφως, ἐὰν διαιρέσωμεν 18827,15 διὰ 9216, τὸ πηλίκον ἐκτιμώμενον

εἰς δεκαδικὰ, ἐκφράζει τὴν τιμὴν τοῦ χιλιογράμμου εἰς λίτρας καὶ δεκαδικὰς ὑποδιαιρέσεις τῆς λίτρας. Ἐκτελοῦντες ταύτας τὰς δύο πράξεις, αἱ ὁποῖαι δὲν παῤῥησιάζουν κἀμμίαν δυσκολίαν, εὑρίσκομεν

$1^{ον.}$ ὅτι ἡ λίτρα ἰσοδυναμεῖ μὲ $1^{χιλ.}$, 48950585.

$2^{ον.}$ ὅτι τὸ χιλιόγραμμον ἰσοδυναμεῖ μὲ $2^{λίτ.}$, 04287652.

Σ. Κ. Τοῦτο τὸ τελευταῖον ἐξαγόμενον φανερόνει, ὅτι τὸ χιλιόγραμμον ὑπερβαίνει τὸ διπλοῦν τῆς λίτρας ὡς ἔγγιστα $\frac{4}{100}$ ἢ $\frac{1}{25}$ τῆς λίτρας· τουτἔστι, τὸ χιλιόγραμμον ἰσοδυναμεῖ μὲ 2 λίτρας καὶ $\frac{1}{25}$ ἢ μὲ $\frac{51}{25}$ τῆς λίτρας σχεδὸν, ἢ 25 χιλιόγραμμα σχηματίζουν 51 λίτρας, ἢ 100 χιλιόγραμμα ἰσοδυναμοῦν μὲ 204 λίτρας σχεδόν.

Ἤδη ζητεῖται ἡ τιμὴ τῶν $69^{λίτ.}$ $0^{ἡμ.}$ $7^{οὐγ.}$ $4^{δρ.}$ $29^{κ.}$ εἰς χιλιόγραμμα, καὶ δεκαδικὰς ὑποδιαιρέσεις τοῦ χιλιογράμμου.

Ἀνάγομεν τὸν δεδομένον ἀριθμὸν εἰς κόκκους κατὰ τὴν γνωστὴν μέθοδον, καὶ εὑρίσκομεν 640253 κόκκους. Λοιπὸν, ἐὰν διαιρέσωμεν 640253 διὰ 18827, 15 ἢ 64025300 διὰ 1882715, τὸ πηλίκον 34,006899, τὸ ὁποῖον συνάγομεν διὰ ταύτης τῆς πράξεως, εἶναι ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς, τουτέστι $69^{λίτ.}$, $0^{ἡμ.}$ $7^{οὐγ.}$ $4^{δρ.}$ $29^{κ.}$ ἰσοδυναμοῦν μὲ $34^{χ.}$,006899, ἢ 34 χιλιόγραμμα, 6 γράμμα καὶ 899 χιλιόγραμμα.

Καὶ ἀντιστρόφως προβάλλεται νὰ ἐκτιμήσωμεν $34^{χιλ.}$, 006899 εἰς λίτρας, ἡμίλιτρα, οὐγγίας κτλ.

Εἴδομεν ἤδη, ὅτι ἓν χιλιόγραμμον ἰσοδυναμεῖ μὲ 2 λίτρας, 04287652 λοιπὸν $34^{χιλ.}$, 006899 ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ γινόμενον τῶν δύο τούτων ἀριθμῶν.

Τὸ γινόμενον τοῦτο περιέχει δεκατέσσαρα ψηφία δεκαδικὰ, ἀλλὰ μὴ λαμβάνοντες παρὰ τὰ πέντε πρῶτα κατὰ τὰ ἀριστερὰ, εὑρίσκομεν $69^{\text{λ.}}$,47189,
Πολλαπλασιάζοντες 0, 47189 ἐπὶ 2, διὰ νὰ εὕρωμεν τὰ ἡμίλιτρα, εὑρίσκομεν $0^{\text{ἡμ.}}$,94378· πολλαπλασιάζοντες δὲ ἐκ νέου ἐπὶ 8 εὑρίσκομεν $7^{\text{οὐγ.}}$,55024· πολλαπλασιάζοντες δὲ 0,55024 ἐπὶ 8, συνάγομεν $4^{\text{δρ.}}$,40192. Τέλος πάντων πολλαπλασιάζοντες ἐπὶ 72 εὑρίσκομεν $28^{\text{κ.}}$,93824.

$69^{\text{λίτ.}}$,47189
2
$0^{\text{ἡμ.}}$,94378
8
$7^{\text{οὐγ.}}$,55024
8
$4^{\text{δρ.}}$, 40192
72
80384
281344
$28^{\text{κ.}}$, 93824.

Λοιπὸν $34^{\text{χιλ.}}$,006899 ἰσοδυναμοῦν μὲ $69^{\text{λίτ.}}$, $0^{\text{ἡμ.}}$ $7^{\text{οὐγ.}}$ $4^{\text{δρ.}}$ $29^{\text{κόκ.}}$, τὸ ὁποῖον βεβαιόνει τὴν πρώτην πρᾶξιν.

Σ. Κ. Ἐλογαριάσαμεν εἰς τὸ πρῶτον γινόμενον μόνον τὰ πέντε δεκαδικὰ ψηφία· διότι, ἐπειδὴ ὁ πολλαπλασιασμὸς ἐπὶ 2, 8, 8 καὶ 72 ἄλλο δὲν εἶναι, εἰμὴ ὁ πολλαπλασιασμὸς ἐπὶ 9216, τὸ πραχθὲν σφάλμα εἶναι μικρότερον ἀπὸ $\frac{9216}{100000}$ κόκκους, προσέγγισις ἱκανωτάτη.

§. 103. Ὑπάρχουσι πίνακες συγκρίσεως μεταξὺ τοῦ παλαιοῦ βάρους καὶ τῶν μέτρων, καὶ μεταξὺ τῶν νέων, καὶ ἀντιστρόφως, διὰ μέσου τῶν ὁποίων μὲ εὐκολίαν δύναταί τις νὰ ἐκτελέσῃ τὰς ἀναγωγὰς, περὶ τῶν ὁποίων ὡμιλήσαμεν. Ἰδοὺ ὁ τρόπος, διὰ τοῦ ὁποίου κατασκευάζονται οἱ πίνακες οὗτοι.

Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἐπρόκειτο νὰ κατασκευάσωμεν τὸν πίνακα τῆς συγκρίσεως τῶν παλαιῶν γραμμικῶν μέτρων μὲ τὰ νέα, καὶ ἀντιστρόφως.

Κατ' ἀρχὰς ἐπροσδιορίσθη ἡ τιμὴ τῆς ὀργυιᾶς εἰς μέτρα, τιμὴ, ἡ ὁποία εὑρεθεῖσα (ἀριθμ. 100)

μὲ ὀκτὼ δεκαδικὰ ψηφία, εἶναι ἴση μὲ 1$^{\rho}$,94903631. Πολλαπλασιάζοντες ταύτην τὴν τιμὴν ἐπὶ 2, 3, 4 . . . 9 συνάγομεν τὰς τιμὰς τῶν 2, 3, 4 . . . 9 ὀργυιῶν.

Προχωροῦντες διαδοχικῶς εἰς ὅλα ταῦτα τὰ ἐξαγόμενα τὴν ὑποδιαστολὴν μίαν ἢ δύο ἢ τρεῖς κ. τ. λ. τάξεις κατὰ τὰ δεξιὰ, συνάγομεν τὰς τιμὰς τῶν 10, 20, 30 κ. τ. λ. . . . 100, 200, 300 . . . 1000, 2000, 3000 κ. τ. λ. ὀργυιῶν.

Ἐὰν πάλιν λάβωμεν τὸ 6^{ον} τοῦ 1,94903631, συνάγομεν τὴν τιμὴν τοῦ ποδὸς, καὶ ἔπειτα ἐκείνας τῶν 2, 3, 4, 5 ποδῶν.

Λαμβάνοντες τὸ δωδέκατον τῆς τιμῆς τοῦ ποδὸς συνάγομεν τὴν τιμὴν τοῦ δακτύλου, καὶ μετὰ ταῦτα ἐκείνας τῶν 2, 3, 4 . . . 11 δακτύλων.

Ἡ αὐτὴ πρᾶξις γίνεται καὶ διὰ τὰς γραμμάς. Ὅσον δὲ διὰ τὸν ἀντίστροφον πίνακα ὁ σχηματισμός του εἶναι ἀπολύτως ὅμοιος· φθάνει νὰ λαμβάνωμεν πρῶτον τὴν τιμὴν τοῦ μέτρου εἰς ὀργυιὰς, τιμὴν, τὴν ὁποίαν εὑρήκαμεν ἴσην μὲ 0^{ορ},51307407.

Ὅθεν ἐὰν ζητηθῇ νὰ ἐκτιμήσωμεν εἰς μέτρα, ὑποδεκάμετρα, ὑφεκατόμετρα κ. τ. λ. 254$^{ορ.}$ 3$^{π.}$ 7$^{δ.}$ 11$^{γρ.}$

Λαμβάνομεν ἀπὸ τὸν πίνακα διαδοχικῶς τὰς τιμὰς 4$^{ορ.}$, 50$^{ορ.}$, 200$^{ορ.}$, μετὰ ταῦτα ἐκείνας τῶν 3$^{π.}$, 7$^{δ.}$ 11$^{γρ.}$, καὶ ἑνόνομεν ὅλας αὐτὰς τὰς τιμὰς, καὶ οὕτως προσδιορίζομεν τὰς ζητουμένας τιμὰς δι' ἁπλῶν προσθέσεων.

Εἰς τὸ ἀντίστροφον ζήτημα, προσδιορίζομεν κατὰ πρῶτον τὴν τιμὴν ἑνός τινος ἀριθμοῦ μέτρων καὶ δεκαδικῶν ὑποδιαιρέσεων τοῦ μέτρου, ἐκφρασμένων εἰς ὀργυιὰς, καὶ δεκαδικὸν κλάσμα τῆς ὀργυιᾶς, κλάσμα, τὸ ὁποῖον τρέπομεν μετὰ ταῦτα εἰς πόδας πολλαπλα-

σιάζοντές το ἐπὶ 6, μετὰ ταῦτα πολλαπλασιάζομεν τὸ συναγόμενον ἀπὸ 12 δεκαδικὸν κλάσμα, διὰ νὰ σχηματίσωμεν τοὺς δακτύλους, καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

Ἀλλ' ἐκτὸς τοῦ, ὅτι οἱ τοιοῦτοι πίνακες δύνανται πολλάκις νὰ ἦναι σφαλεροὶ, ἡ ἰδία χρῆσίς των ὄχι πάντοτε δίδει τὴν ὁποίαν ἐπιθυμοῦμεν προσέγγισιν· πρόσθες ἔτι, ὅτι ὄχι πάντοτε δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν αὐτοὺς, ὅταν τοὺς χρειαζώμεθα. Εἶναι ἀνάγκη λοιπὸν νὰ ἀναπτύξωμεν τοὺς τρόπους τοῦ νὰ ἐκτελῶμεν αὐτὰς τὰς τροπὰς, ἀποδεχόμενοι τοῦτα μόνον τὰ ἐξαγόμενα.

Τὸ φράγκον ἰσοδυναμεῖ μὲ $\frac{81}{80}$ τῆς λίβρας. Ἡ τιμὴ τοῦ μέτρου εἶναι 3$^{λ.}$, 0$^{δ.}$, 11$^{γρ.}$, 296. Τέλος πάντων ἐκείνη τοῦ χιλιογράμμου εἶναι 18827$^{χοκ.}$, 15.

§. 104. Ἄς ἐπαναλάβωμεν τώρα τὸ πρόβλημα τοῦ ἀριθμοῦ 98, ὅπου ἐμείναμεν διὰ νὰ δώσωμεν περισσοτέραν σαφήνειαν.

Εἷς ἔμπορος ὑφασμάτων εἶχε πωλήσει μέχρι τινὸς τὴν πῆχην ἑνὸς ὑφάσματος 36$^{λ.}$ 17$^{σ.}$ 6$^{δ.}$ Ζητεῖται ἀπὸ πόσα φράγκα κατ' ἀναλογίαν ἀξίζει τὸ μέτρον τοῦ ἰδίου ὑφάσματος.

Ἄγομεν κατὰ πρῶτον τὰς 36$^{λ.}$ 17$^{σ.}$ 6$^{δ.}$ εἰς φράγκα, δεκατημόρια, κ. τ. λ. ἢ διὰ μέσου τῶν πινάκων, ἢ κατὰ τὸν κανόνα τοῦ ἀριθμοῦ 99, καὶ εὑρίσκομεν 36$^{φρ.}$, 4197 διὰ τὴν τιμὴν τῆς πήχης. Προσέτι τὸ μέτρον ἐκφραζόμενον εἰς πῆχην (κατὰ τὸν ἀριθμ. 101) ἔχει τιμὴν 0$^{π.}$, 839576. Λοιπὸν ἡ τιμὴ τοῦ μέτρου εἶναι ἴση μὲ ἓν μέρος τῶν 36$^{φρ.}$, 4197, τὸ ὁποῖον ἐκφράζεται διὰ τοῦ γινομένου τῶν δύο ἀριθμῶν 36,4197 καὶ 0,839576· καὶ ἐκτελουμένου τοῦ τοιούτου πολλαπλασιασμοῦ, εὑρίσκομεν 30,5771060472.

Ἕπεται λοιπὸν, ὅτι ἡ τιμὴ ἑνὸς μέτρου θέλει εἶναι 30 φρ., 58 ἑκ. (ὅρα διὰ τὸν σύντομον τρόπον τοῦ ἐκτελεῖν τὸν πολλαπλασιασμὸν τὸν ἀκόλουθον ἀριθμόν.)

Προτεθείσθω ἔτι τὸ ἀκόλουθον ζήτημα. Ἡ λίτρα μιᾶς πραγματείας ἀξίζει 25 λ., 18 σ., 9 δην., καὶ ζητεῖται ἡ τιμὴ τῶν 375 χιλ. καὶ 175 γρ. τῆς αὐτῆς πραγματείας.

Κατὰ πρῶτον ὁ ἀριθμὸς 26 λίβ. 11 σολ. 9 δην. ἠγμένος εἰς φράγκα κ. τ. λ. δίδει 25 φρ., 271605· τουτέστι ἐφράζει τὴν τιμὴν τῆς λίτρας εἰς φράγκα κ. τ. λ.

Προσέτι 375 χιλ., 175 ἠγμένα εἰς λίτρας κατὰ τὸν πίνακα, ἢ κατὰ τὸν κανόνα τοῦ ἀριθμοῦ 102, ἀποτελοῦν 766 λιτ., 436198, χωρὶς νὰ θεωρῶμεν ἄλλο, παρὰ τὰ πρῶτα ἓξ δεκαδικὰ ψηφία, τὰ ὁποῖα ἀρκοῦσι. Λοιπὸν ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν 25 φρ., 271605 ἐπὶ 766, 426198, τὸ γινόμενον εἶναι ἡ ζητουμένη τιμή.

Καὶ εὑρίσκομεν ἐξαγόμενον μεῖον $\frac{1}{100}$, 19639,07.

Λοιπὸν 375 χιλ. καὶ 175 γρ. ἀξίζουν 19369 φρ.,07 δεκ.

Μέθοδοι σύντομαι διὰ τὸν Πολλαπλασιασμὸν καὶ διαίρεσιν τῶν δεκαδικῶν κλασμάτων.

§ 105. Εἰς τὰ προηγούμενα ζητήματα ἐκτελέσαμεν πολλαπλασιασμοὺς ἀριθμῶν συνθέτων ἐκ πολλῶν δεκαδικῶν ψηφίων· ἐνῷ ἀρκοῦσε διὰ τὴν ὑπόθεσιν, τῆς ὁποίας ζητοῦμεν τὴν λύσιν, νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον μὲ πολὺ μικρότερον ἀριθμὸν δεκαδικῶν ψηφίων, παρὰ μ᾽ ὅσα παριστάνουν ὁμοῦ οἱ δύο παράγοντες. Εἶναι λοιπὸν ὠφέλιμον νὰ γνωρίσωμεν μίαν μέθοδον, διὰ μέσον τῆς ὁποίας νὰ ἠμπορῶμεν, χωρὶς νὰ εἴμεθα ὑποχρεωμένοι νὰ ἐκτελῶμεν ὅλον τὸν πολ-

λαπλασιασμὸν, νὰ προσδιορίζωμεν μόνον τὰ δεκαδικὰ ψηφία, τῶν ὁποίων ἔχομεν ἀνάγκην.

Διὰ νὰ δώσωμεν πρώτην τινὰ ἰδέαν ταύτης τῆς μεθόδου· ἂς λάβωμεν τοὺς δύο ἀριθμοὺς 34,258467, καὶ 5,4637, καὶ ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι ζητοῦμεν νὰ προσδιορίσωμεν τὸ γινόμενόν των μεῖον $\frac{1}{1000}$.

Τὸ τέχνασμα τοῦ τρόπου τούτου εἶναι εἰς τὸ νὰ μεταχειρισθῶμεν εἰς τοὺς πολλαπλασιασμοὺς ἐπὶ τὰ διάφορα ψηφία τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, χιλιοστημόρια ἢ μονάδας μιᾶς τάξεως ἀνωτέρας, καθὼς τῶν ἑκατοστημορίων, δεκατημορίων, καὶ ἁπλῶν μονάδων κ. τ. λ. Ἤδη δὲ ἐπειδὴ ἀρκοῦσι 10 δεκαχιλιοστημόρια, διὰ νὰ σχηματίσουν 1 χιλιοστημόριον, διὰ τοῦτο εἶναι ἀκόμη ὠφέλιμον νὰ ἐκτανθῶμεν ἕως εἰς τὰ δεκαχιλιοστημόρια, τὰ ὁποῖα δύνανται νὰ δώσωσι τὰ μερικὰ γινόμενα.

Μετὰ ταύτας τὰς πρώτας παρατηρήσεις ἰδοὺ τίνι τρόπῳ πράττομεν.

Κατὰ πρῶτον ἀντιστρέφομεν τὴν τάξιν τῶν ψηφίων ἑνὸς τῶν παραγόντων π. χ. τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, καὶ ἔχομεν 7364, 5, καὶ μετὰ ταῦτα γράφομεν τοῦτο ὑπὸ τὸν πολλαπλασιαστέον οὕτως, ὥστε τὸ ψηφίον 5 τῶν μονάδων του νὰ εὑρίσκεται ὑπὸ τοῦ ψηφίου τῶν δεκαχιλιοστημορίων τοῦ πολλαπλασιαστέου· τότε τὸ ψηφίον τῶν δεκάτων του εὑρίσκεται ἀναγκαίως ὑπὸ τὸ ψηφίον τῶν χιλιοστημορίων τοῦ πολλαπλασιαστέου, τὸ ψηφίον τῶν ἑκατοστημορίων του ὑπὸ τῶν ἑκατοστημορίων, καὶ οὕτως ἐφεξῆς· τὰ δὲ ψηφία τῶν δεκάδων, ἑκατοντάδων κ. τ. λ. ἐὰν εἴχαμεν, ἤθελαν εἶσθαι ἀναγκαίως θεμένα ὑπὸ τὰ ψηφία τῶν ἑκατοχιλιοστημορίων, μιλλιονιστημορίων τοῦ πολλαπλασιαστέου.

Ἐν ἑνὶ λόγῳ ἕκαστον ψηφίον τοῦ πολλαπλασιαστοῦ εἶναι διὰ ταύτης τῆς τάξεως θεμένον ὑπὸ τὸ ψηφίον, τοῦ ὁποίου τὸ γινόμενον ἐπὶ ἐκεῖνο τοῦ πολλαπλασιαστοῦ δίδει τὰ δεκαχιλιοστημόρια.

Τούτου τεθέντος, πολλαπλασιάζομεν κατὰ πρῶτον ἐπὶ τὸ ψηφίον 5 τοῦ πολλαπλασιαστοῦ ὅλα τὰ ψηφία τοῦ πολλαπλασιαστέου, ἀρξάμενοι ἐκ τοῦ ψηφίου 4, τὸ

34,253467	
7364,5	
1712673	δεκαχιλιοστημόρια.
137013	
20552	
1027	
239	
187,1504	

ὁποῖον ἀνταποκρίνεται μὲ τὸ ψηφίον 5, καὶ ἀμελοῦντες τὸ γινόμενον τοῦ 67 ἐπὶ 5, ἐκτὸς τῶν τριῶν μονάδων, τὰς ὁποίας κρατοῦμεν ἀπὸ τὸ γινόμενον τοῦ 6 ἐπὶ 5, αἱ ὁποῖαι ἐκφράζουσι δεκαχιλιοστημόρια, ἐπειδὴ τὸ γινόμενον τοῦτο εἶναι 30 ἑκατοχιλιοστημόρια. Συνάγομεν οὕτως 1712673 δεκαχιλιοστημόρια, τὰ ὁποῖα γράφομεν ὑπὸ τοὺς δύο παράγοντας, ἀφ' οὗ ὑπογραμμίσωμεν αὐτούς.

Περνῶντες εἰς τὸ ψηφίον 4 τῶν δεκατημορίων τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ τὸ ψηφίον τοῦτο ὅλον τὸν πολλαπλασιαστέον ἀρξάμενοι ἀπὸ τὸ ψηφίον 3, καὶ ἀμελοῦντες τὸ γινόμενον τοῦ 467 ἐπὶ 4, ἐκτὸς τῆς κρατηθείσης μονάδος, ἡ ὁποία δίδει 4 φοραῖς 4, ἐπειδὴ αὕτη ἡ μονὰς ἐκφράζει ἀκόμη δεκαχιλιοστημόριον· καὶ οὕτως ἔχομεν 137013 δεκαχιλιοστημόρια, τὸ ὁποῖον γράφομεν ὑπὸ τὸ πρῶτον γινόμενον, εἰς τρόπον ὥστε τὰ τελευταῖα ψηφία νὰ ἀνταποκρίνωνται, ἐπειδὴ καὶ τὰ δύο ἐκφράζουν δεκαχιλιοστημόρια.

Πράττομεν παρομοίως εἰς ἕκαστον ψηφίον τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, προσέχοντες νὰ ἀρχίζωμεν τὸν

πολλαπλασιασμὸν ἀπὸ τὸ ψηφίον τοῦ πολλαπλασιαστέου, τὸ ὁποῖον εἶναι θεμένον ἄνω τοῦ ψηφίου τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, τὸ ὁποῖον θεωροῦμεν, καὶ προσθέτοντες μόνον εἰς τὸ γινόμενον ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον κρατοῦμεν ἐκ τοῦ γινομένου τοῦ ψηφίου, τὸ ὁποῖον ἀκολουθεῖ ἐκεῖνο τοῦ πολλαπλασιαστέου, ἐκ τοῦ ὁποίου ἀρχίζομεν τὸν πολλαπλασιασμόν.

Εἰς τὸν πολλαπλασιοσμὸν ἐπὶ τὸ ψηφίον 6, προσθέτομεν 2 εἰς τὸ γινόμενον τοῦ 34, 25 ἐπὶ 6, ἐπειδὴ 6 φοραῖς 3 δίδουν 18 ἑκατοστημόρια, τὰ ὁποῖα ἰσοδυναμοῦν σχεδὸν μὲ 2 δεκαχιλιοστημόρια· ἐπειδὴ ἕως τοῦ νῦν ἐξαλείψαμεν πολλὰ ἑκατοχιλιοστημόρια.

Παρομοίως προσδιορίζομεν τὰ τρία ἄλλα γινόμενα 20552, 1027 καὶ 239, τὰ ὁποῖα γράφομεν ὑπὸ τῶν ἀνωτέρων, ὥστε τὰ ἄλλα ψηφία νὰ ἀνταποκρίνωνται.

Μετὰ ταῦτα κάμνομεν τὸ ἄθροισμα ὅλων τούτων τῶν γινομένων, καὶ συνάγομεν 1871504, ἀριθμὸν, τοῦ ὁποίου πρέπει νὰ χωρίσωμεν διὰ μιᾶς ὑποδιαστολῆς τέσσαρα δεκαδικὰ ψηφία· ἐπειδὴ ἐκφράζει δεκαχιλιοστημόρια.

Τέλος πάντων ἐξαλείφομεν τὸ τελευταῖον ψηφίον, καὶ εὑρίσκομεν 187,150 διὰ τὸ ζητούμενον μεῖον 0,001.

Δυνάμεθα νὰ βεβαιώσωμεν εὐκόλως τὸ ἐξαγόμενον ἐκτελοῦντες ὁλόκληρον τὸν πολλαπλασιασμόν.

Σ. Κ. Δυναταίτις εὐκόλως νὰ νομίσῃ, ὅτι μὲ τὸ νὰ ἐβαστάξαμεν τὰ δεκαχιλιοστημόρια τῶν μερικῶν γινομένων, τὸ ψηφίον τῶν δεκαχιλιοστημορίων καθ' ἑαυτὸ εἶναι ἀκριβές· ἀλλὰ εἰς τοῦτο λανθανόμεθα, ἐπειδὴ πολλάκις εἶναι μικρότερον πολλῶν μονάδων· συνίσταται δὲ εἰς τοῦτο, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν μονάδων τῆς στήλης τῶν ἑκατοχιλιοστημορίων δύ-

ναται νὰ δώσῃ πολλὰς μονάδας διὰ νὰ κρατήσωμεν. Μ' ὅλον τοῦτο εἶναι βέβαιον, ὅτι τὸ σφάλμα δὲν ἠμπορεῖ νὰ προξενήσῃ ἐπὶ τοῦ ψηφίου τῶν χιλιοστημορίων μεγαλωτάτην διαφοράν, ἐπειδὴ διὰ νὰ γένῃ τοῦτο, πρέπει τὸ ἄθροισμα νὰ δώσῃ 10 δεκαχιλιοστημόρια διὰ νὰ βαστάξωμεν, τὸ ὁποῖον δὲν δύναται νὰ ἀκολουθήσῃ, ἐκτὸς ὅταν ἔχωμεν πλέον τῶν 10 μερικῶν γινομένων, τουτέστι περισσότερον ἀπὸ δέκα ψηφία εἰς τὸν πολλαπλασιαστήν. Διὰ νὰ ἀποφύγωμεν κάθε σφάλμα αὐξάνομεν ἀπὸ μίαν μονάδα τὸ ὅ,τι κρατοῦμεν ἀπὸ κάθε μερικὸν πολλαπλασιασμὸν, ὅταν τὸ δεύτερον ψηφίον εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ γινομένου, τὸ ὁποῖον δίδει τὸ ὅ,τι κρατοῦμεν, εἶναι μεγαλήτερον τοῦ 5.

Ἓν ἄλλο παράδειγμα θέλει σαφηνίσει ταύτην τὴν πρᾶξιν.

Προβάλλεται νὰ προσδιορίσωμεν τὸ γινόμενον τῶν δύο ἀριθμῶν 763,05403678956 καὶ 254,4630578 μεῖον 0,00001.

Ἐπειδὴ θέλομεν νὰ ἦναι εἰς τὸ γινόμενον τὰ πέντε πρῶτα δεκαδικὰ ψηφία ἀκριβῆ, πρέπει νὰ κρατήσωμεν ὅλα τὰ μιλιονιστημόρια, τὰ ὁποῖα δύνανται νὰ δώσωσι τὰ μερικὰ γινόμενα *).

Οὕτως, ἀφ' οὗ ἀντιστρέψωμεν τὴν τάξιν τῶν ψηφίων τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, τὸ θέτομεν ὑπὸ τὸν πολλαπλασιαστέον οὕτως, ὥστε τὸ ψηφίον 4 τῶν μονάδων του νὰ εὑρίσκεται ὑπὸ τὰ μιλλιονιστημόρια τοῦ πολλαπλασιαστέου· τὰ ἄλλα ψηφία θέτονται ἀφ'

---

*) Ὁ Μεταφραστής. Ἐπειδὴ, ὅταν τὸ ἄθροισμα τῶν μιλλιονιστημορίων ὑπερβαίνῃ τὰ ἐννέα μιλλιονιστημόρια, τότε πρέπει νὰ κρατήσωμεν τὰ σχηματιζόμενα ἐξ αὐτῶν χιλιοστημόρια, διὰ νὰ τὰ ἑνώσωμεν μὲ τὰ ἑκατοχιλιοστημόρια τῶν μερικῶν γινομένων· ἀλλέως τὸ σφάλμα ἤθελεν εἶναι μεγαλήτερον ἀπὸ ἓν χιλιοστημόριον, ἐναντίον τῆς ὑποθέσεως.

ἑαυτῶν εἰς τὰς τάξεις, τὰς ὁποίας ἀνωτέρω ἐπροσδιορίσαμεν, καὶ ἐκτελοῦμεν τὸν πολλαπλασιασμόν.

Εἰς τὸν πρῶτον	763,05403678956	
πολλαπλασια-	8750364,452	
σμὸν, ἐπειδὴ τὸ	152610807358	χιλιοστημόρια
ψηφίον 9, τὸ	38152701839	
ὁποῖον ἀκολου-	3052216147	
θεῖ τὸ 8 (τοῦ	305221614	
ὁποίου μέλλο-	45783242	
μεν νὰ ἀρχίσω-	2289162	
μεν τὴν πρᾶξιν)	38152	
λόγου χάριν πολ-	5341	
λαπλασιαζόμε-	610	
νον ἐπὶ 2 δίδει	194169,063468	

18 δεκαμιλλιονιστημόρια, διὰ τοῦτο κρατοῦμεν τὰ 2 μιλλιονιστημόρια, διὰ νὰ τὰ ἐνώσωμεν μὲ τὸ γινόμενον.

Παρομοίαν παρατήρησιν κάμνομεν σχετικῶς πρὸς τὸν τρίτον καὶ πέμπτον πολλαπλασιασμὸν· εἰς ὅλους δὲ τοὺς ἄλλους κρατοῦμεν τὰ μιλλιονιστημόρια τὰ σχηματιζόμενα ἀμέσως ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

Ἐκτελοῦντες τὴν ἄθροισιν, καὶ χωρίζοντες ἓξ ψηφία δεκαδικὰ πρὸς τὰ δεξιὰ, μετὰ ταῦτα ἐξαλείφοντες μὲ ἓν σημεῖον τὸ τελευταῖον ψηφίον, συνάγομεν 194169,06346 διὰ τὸ γινόμενον μεῖον 0,00001.

Σ. Κ. Προκύπτει ἐκ τῆς αὐξήσεως τῆς γινομένης εἰς τὰς μονάδας, τὰς ὁποίας ἐκρατήσαμεν, ἓν εἶδος ἀνταμοιβῆς ἐκείνων τὰς ὁποίας ἐπαρατήσαμεν καὶ τὸ ψηφίον τὸ ἐξαλειφθὲν δὲν εἶναι συνήθως διάφορον τοῦ ἀληθοῦς παρὰ μίαν ἢ δύο μονάδας. *)

*) Ὁ Μεταφραστής. Καὶ ἐπειδὴ ἡ διαφορὰ τῆς μιᾶς ἢ δύο μονάδων συνίσταται εἰς τὸ ψηφίον, τὸ ὁποῖον ἀποφράσσομεν,

§. 106. Συμβαίνει κάποτε ὁ πολλαπλασιαστέος νὰ μὴν ἔχῃ πολλὰ δεκαδικὰ ψηφία, ὥστε νὰ κάμωμεν νὰ ἀνταποκρίνωνται τὰ ψηφία τῶν μονάδων, δεκάδων, ἑκατοντάδων κ. τ. λ. τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, εἰς τὰ ψηφία ἐπὶ τῶν ὁποίων διορίζει ὁ κανὼν νὰ γραφθῶσιν. Εἰς ταύτην τὴν περίστασιν γράφομεν εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ πολλαπλασιαστέου ἕνα ἱκανὸν ἀριθμὸν μηδενικῶν.

Ἔστω π. χ. νὰ πολλαπλασιάσωμεν 1825, 4037 ἐπὶ 2427, 125, καὶ ὑποθέτομεν, ὅτι ζητοῦμεν γινόμενον ἀκριβὲς ἕως εἰς τὰ δεκαχιλιοστημόρια.

Ἐπειδὴ τὸ ψηφίον τῶν μονάδων τοῦ πολλαπλασιαστοῦ πρέπει νὰ ἀνταποκρίνεται μὲ τὸ ψηφίον τῶν ἑκατοχιλιοστημορίων τοῦ πολλαπλασιαστέου, καὶ αἱ δεκάδες, ἑκατοντάδες κ. τ. λ. νὰ ἀνταποκρίνωνται μὲ τὰ μιλλιονιστημόρια, δεκαμιλλιονιστημόρια καὶ ἐφεξῆς, προσθέτομεν τέσσαρα μηδενικὰ εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ πολλαπλασιαστέου, καὶ οὕτως ἔχομεν 1825, 40370000. Ἡ πρᾶξις γίνεται ὡς ἀνωτέρω.

1825,40370000	
521,9242	
365080740000	ἑκατοχιλιοστημόρια.
73016148000	
3650807400	
127778259O	
18254037	
3650807	
912701	
4430482,95538	

καὶ τὸ ὁποῖον μὴ δυνάμενον νὰ περιέχῃ ὑπὲρ τὰς 9, διὰ τοῦτο δὲν δύναται νὰ σχηματίσῃ οὔτε μίαν μονάδα τοῦ ἀμέσως ψηφίου εἰς τὰ ἀριστερὰ αὐτοῦ, τουτέστι τοῦ τελευταίου ὅπερ ζητοῦμεν νὰ εὕρωμεν εἰς τὸ γινόμενον.

Ὑποχρεοῦμεν τοὺς ἀρχαρίους νὰ γυμνασθῶσιν εἰς τὰ παραδείγματα τὰ περὶ πολλαπλασιασμοῦ, περὶ ὧν ἀναφέρομεν εἰς τὸν ἀριθμὸν 100 καὶ 104.

§. 107. Τέλος πάντων ἡ ἀνωτέρω μέθοδος δύναται νὰ ἐφαρμοσθῇ εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν δύο ἀκεραίων ἀριθμῶν συγκειμένων ἐκ πολλῶν ψηφίων, τῶν ὁποίων ζητοῦμεν τὸ γινόμενον ἴσον ὡς ἔγγιστα τοῦ ἀκριβοῦς γινομένου κατὰ μονάδα μιᾶς τινὸς τάξεως.

Ἔστωσαν π. χ. οἱ δύο ἀριθμοὶ 279456 καὶ 89764, τῶν ὁποίων θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον μεῖον μιλλιονίου.

Διὰ νὰ διαφέρῃ τοῦ ἀκριβοῦς ὀλι-	279456	
γώτερον ἑνὸς μιλ-	46798	
λιονίου, πρέπει νὰ	223565	ἑκατοντάδες χιλιάδος.
βάλλωμεν εἰς τὸν	25150	
ὑπολογισμὸν ὅλας	1956	
τὰς ἑκατοντάδας	167	
τῶν χιλιάδων τὰς	11	
ἐξαγομένας ἐκ τῶν μερικῶν γινομένων.	250849	

Οὕτως γράφομεν κατὰ πρῶτον τὸν πολλαπλασιαστὴν ἀντιστρεφόμενον ὑπὸ τὸν πολλαπλασιαστέον εἰς τρόπον, ὥστε αἱ μονάδες νὰ ἦναι θεμέναι ὑπὸ τῶν ἑκατοντάδων τῶν χιλιάδων, τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων του ὑπὸ τῶν ψηφίων τῶν δεκάδων τῶν χιλιάδων· καὶ ἐκτελεῖται ἡ πρᾶξις ὡς ἀνωτέρω, οὕτως εὑρίσκομεν τὸ ζητούμενον γινόμενον, ἀφ' οὗ ἐξαλείψωμεν τὸ τελευταῖον ψηφίον, 25084 μιλλιόνια.

§. 108. Μέθοδος σύντομος διὰ τὴν Διαίρεσιν. Ὑπάρχει παρομοίως διὰ τὴν διαίρεσιν δύο ἀριθμῶν συνθέτων ἐκ πολλῶν ψηφίων μέ-

σου ἁπλούστερον, παρὰ τὸ σύνηθες, τοῦ εὑρίσκειν τὸ πηλίκον κατὰ βαθμὸν τινὰ προσεγγίσεως.

Κατὰ πρῶτον θεωροῦμεν τὴν περίστασιν εἰς ἣν ὁ διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης εἶναι ἀκέραιοι ἀριθμοὶ, καὶ ζητοῦμεν νὰ προσδιορίσωμεν τὸ πηλίκον, ὥστε νὰ διαφέρῃ τοῦ ἀληθοῦς ὀλιγώτερον μιᾶς μονάδος. Θέλει εἶσθαι εὔκολον μετὰ ταῦτα νὰ συνάξωμεν τὸ πηλίκον εἰς τὴν περίστασιν εἰς τὴν ὁποίαν εὑρίσκονται δεκαδικὰ κλάσματα.

Ἡ μέθοδος, τὴν ὁποιαν ἤδη ἑρμηνεύομεν, ἐπιστηρίζεται εἰς τοῦτο, ὅτι εἰς τὴν συνήθη διαίρεσιν ἕκαστον ψηφίον τοῦ πηλίκου προκύπτει, διαιρουμένων μόνον δύο ἢ τριῶν πρώτων ψηφίων τοῦ μερικοῦ διαιρετέου, διὰ τοῦ πρώτου, ἢ τῶν δύο πρώτων ψηφίων τοῦ διαιρέτου οὕτως εἴμεθα βέβαιοι, ὅτι ἔχομεν τὰ ἀληθῆ ψηφία τοῦ πηλίκου, πράττοντες οὕτως, ὥστε νὰ φυλάττωμεν τὰ δύο ἢ τρία πρῶτα ψηφία ἑκάστου μερικοῦ διαιρετέου· καὶ ἰδοὺ εἰς τί συνίσταται ἡ πρᾶξις.

Ἔκθλιψε ἀπὸ τὰ δεξιὰ τοῦ διαιρετέου τόσα ψηφία μεῖον ἑνὸς ἀφ' ὅσα εὑρίσκονται εἰς τὸν διαιρέτην. Μετὰ ταῦτα ἐκτέλεσε τὴν διαίρεσιν τοῦ ἀριστεροῦ μέρους διὰ τοῦ διαιρέτου κατὰ τὴν κοινὴν μέθοδον. Ἐὰν δὲν μείνῃ ὑπόλοιπον, τότε βάλε κατ' ἐξακολούθησιν τοῦ πηλίκου τόσα μηδενικὰ, ὅσα ψηφία ἐξέθλιψες ἀπὸ τὸν διαιρετέον· ἐὰν ὅμως ἀφεθῇ τι ὑπόλοιπον, ἐξακολούθει νὰ διαιρῇς, ὄχι πλέον διὰ τοῦ ἰδίου διαιρέτου ὡς πρότερον, ἐπειδὴ εἶναι ἀδύνατον, ἀλλ' ἀφ' οὗ εἰς τὸν τοιοῦτον διαιρέτην ἐξαλείψῃς τὸ τελευταῖον ψηφίον εἰς τὰ δεξιὰ, μ' ὅλον τοῦτο εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν τοῦ νέου διαιρέτου ἐπὶ τὸ συναγόμενον ψηφίον εἰς τὸ πηλίκον, πρόσθες τὸ κρατηθὲν ἐκ τοῦ γινομένου τοῦ ἐκθλιβέντος ψηφίου ἐπὶ τὸ ψηφίον τοῦ πηλί-

κού. Μετὰ ταύτην τὴν διαίρεσιν, διαίρεσε τὸ νέον ὑπόλοιπον διὰ τοῦ ἰδίου διαιρέτου, ἀφ' οὗ ὅμως ἐξαλείψῃς ἀκόμη τὸ τελευταῖον ψηφίον πρὸς τὰ δεξιά· (παρομοία παρατήρησις ὡς ἀνωτέρω, εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν τοῦ νέου διαιρέτου ἐπὶ τὸ ψηφίον τοῦ πηλίκου).

Τέλος πάντων ἐξακολούθησε οὕτως τὴν διαίρεσιν, ἐκθλίβων εἰς κάθε διαίρεσιν ἓν ψηφίον πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ διαιρέτου.

Διὰ νὰ δώσωμεν λόγον περὶ ταύτης τῆς πράξεως, λαμβάνομεν ἁπλούστατόν τι παράδειγμα, τὸ ὁποῖον ἐκτελοῦμεν κατὰ πρῶτον μὲ τὴν συνειθισμένην μέθοδον, καὶ μετὰ ταῦτα μὲ ἐκείνην, τὴν ὁποίαν ἀνωτέρω ἐκφράσαμεν.

Διαιαιρεθήτω 430456896 διὰ 5683.

430456896	5683	430456	896	5683
32646	75744	32646		75|744
42318		4231		
25379		253		
20476		26		
3744		4		

Ἡ διαίρεσις εἰς τὰ ἀριστερὰ ἐκτελέσθη διὰ τῆς κοινῆς μεθόδου, καὶ εἶναι ἀνωφελὲς νὰ διατρίβωμεν εἰς αὐτήν. Ἄς ἀσχοληθῶμεν μόνον εἰς τὴν δευτέραν.

Συμφώνως μὲ τὸν κανόνα χωρίζομεν τρία ψηφία κατὰ τὰ δεξιὰ τοῦ διαιρετέου, ἐπειδὴ ὑπάρχουσι 4 εἰς τὸν διαιρέτην, καὶ διαιροῦμεν τὸ μέρος εἰς τὰ ἀριστερὰ 430456 διὰ 5683, κατὰ τὸ σύνηθες, καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον 75, καὶ ὑπόλοιπον 4231.

Τούτου τεθέντος ἐκθλίβομεν τὸ τελευταῖον ψηφίον 3 τοῦ διαιρέτου, καὶ διαιροῦμεν 4231 διὰ 568,

ὅθεν προκύπτει πηλίκον 7. Πολλαπλασιάζομεν 568 ἐπὶ 7 προσθέτοντες εἰς τὸ γινόμενον τὰς 2 μονάδας, τὰς ὁποίας κρατοῦμεν ἀπὸ τὸ σχηματιζόμενον γινόμενον 21, τοῦ ἐξαλειφομένου ψηφίου ἐπὶ 7, καὶ ἀφαιροῦντες τὸ γινόμενον ἀπὸ 4231 εὑρίσκομεν ὑπόλοιπον 253.

Ἐξαλείφοντες τὸ ψηφίον 8 εἰς τὸν τελευταῖον διαιρέτην, καὶ διαιροῦντες 253 διὰ 56, συνάγομεν πηλίκον 4. Πολαπλασιάζοντες 56 διὰ 4. καὶ ἑνόνοντες μὲ τὸ γινόμενον τὰς 3 μονάδας, αἱ ὁποῖαι προέρχονται ἀπὸ τὸν πολλαπλασιασμὸν τοῦ ἐξαλειφομένου ψηφίου ἐπὶ 4, συνάγομεν ὕστερον ἀπὸ τὴν ἀφαίρεσιν τοῦ τοιούτου γινομένου, τὸ ὑπόλοιπον 26.

Ἐὰν, ἀφ' οὗ ἐξαλείψωμεν τὸ τελευταῖον ψήφιον τοῦ 56, διὰ τὸ ὁποῖον εὑρίσκομεν 5, διαιρέσωμεν 26 διὰ 5, εὑρίσκομεν πηλίκον 5· ἀλλὰ παρατηροῦμεν ὅτι πρέπει, διὰ νὰ ἦναι ἀκριβὲς τὸ πηλίκον, νὰ ἦναι δυνατὸν νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοῦ 26 τὸ γινόμενον τοῦ 5 ἐπὶ 5, αὐξανόμενον ἀπὸ 3 μονάδας, τὰς ὁποίας δίδει τὸ γινόμενον τοῦ ἐκθλιβέντος ψηφίου 6 ἐπὶ 5· καὶ ἐπειδὴ τοῦτο εἶναι ἀδύνατον, ὀλιγοστεύομεν τὸ πηλίκον ἀπὸ 1 μονάδα, καὶ οὕτως συνάγομεν 4 διὰ τὸ ἀληθινὸν ψηφίον τῶν μονάδων.

Συγκρίνοντες τὰς δύο ἀνωτέρω πράξεις εἶναι εὔκολον νὰ γνωρίσωμεν, ὅτι τὰ δύο ἢ τρία πρῶτα ψηφία εἶναι τὰ αὐτὰ εἰς κάθε μερικὴν διαίρεσιν, καὶ ἐπομένως τὰ ψηφία τοῦ πηλίκου πρέπει νὰ ἦναι τὰ αὐτὰ καὶ εἰς τὴν μίαν καὶ εἰς τὴν ἄλλην· ἀλλὰ πρέπει νὰ φέρωμεν τὰς μονάδας τὰς κρατηθείσας, αἵτινες συνάγονται ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ ἐξαλειφομένου ψηφίου ἐπὶ τὸ ληφθὲν πηλίκον· ἀλλέως ἠθέλαμεν φθάσει εἰς μεγαλήτερα ὑπόλοιπα, τὰ ὁποῖα ἤθελαν

δώσει εἰς τὸ πηλίκον ψηφία μεγαλήτερα μᾶλλον, παρὰ ἀληθινά.

Ἂς λάβωμεν δεύτερον παράδειγμα τοὺς δύο ἀριθμοὺς 540347056789046 καὶ 2786459.

Ἀφ' οὗ χωρίσωμεν ἓξ ψηφία εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ διαιρετέου, διαιροῦμεν τὸ ἀριστερὸν μέρος δι' ὅλου τοῦ διαιρέτου, καὶ εὑρίσκομεν πρῶτον πηλίκον 193, καὶ ὑπόλοιπον 2560469.

```
540347056|789046|2786459
26170115  |      |193|918897.
10919846
2560469
52656
24791
2500
271
21
2
```

Μετὰ ταῦτα χωρίζομεν τὸ τελευταῖον ψηφίον 9 τοῦ διαιρέτου, καὶ διαιροῦμεν τὸ ὑπόλοιπον διὰ 278645. Εὑρίσκομεν δὲ τὸ πηλίκον 9, καὶ τὸ νέον ὑπόλοιπον 52656, τὸ ὁποῖον διαιροῦμεν μετὰ ταῦτα διὰ 27864, καὶ εὑρίσκομεν νέον πηλίκον 1· ἀλλ' ἀντὶ νὰ ἀφαιρέσωμεν 27864, ἀφαιροῦμεν 27865, ἐπειδὴ τὸ τελευταῖον ἐξαλειφόμενον ψηφίον εἶναι 5· καὶ εὑρίσκομεν ὑπόλοιπον 24791.

Πράττομεν δὲ ἐπὶ τούτου τοῦ ὑπολοίπου καὶ ἐπὶ τῶν ἀκολούθων, κατὰ τὸν ἄνω εἰρημένον κανόνα· εἰς τὴν προτελευταίαν πρᾶξιν εὑρίσκομεν ὑπόλοιπον 21, τὸ ὁποῖον διαιρούμενον διὰ 2 δίδει τὸ ὀλιγώτερον διὰ πηλίκον 9. Ἐὰν ὅμως παρατηρήσωμεν τὸ ἐξαλειφόμενον τελευταῖον ψηφίον, μὲ εὐκολίαν θέλομεν γνωρίσει, ὅτι εἶναι ἀδύνατον νὰ θέσωμεν εἰς τὸ πηλίκον περισσότερα ἀπὸ 7, ἐπειδὴ 8 φοραῖς 2 ἢ 16 αὐξανόμενα ἀπὸ 6 μονάδας, τὰς ὁποίας κρατοῦμεν ἐκ τοῦ

γινομένου τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ 7 ἐπὶ 8 κάμνουν 22.

Σ. Κ. Ἐὰν, εἰς τὴν ἀρχὴν τῆς πράξεως, ἀφ' οὗ ἐξαλείψαμεν κατὰ τὰ δεξιὰ τοῦ διαιρετέου τὰ ψηφία, τὰ ὁποῖα ὁ κανὼν διορίζει, τὸ μέρος κατὰ τὰ ἀριστερὰ δὲν περιέχῃ τὸν διαιρέτην, ἐκθλίβομεν διαδοχικῶς τόσα ψηφία εἰς τὸν διαιρέτην, ὅσα εἶναι ἀναγκαῖα, ὥστε ὁ νέος διαιρέτης νὰ περιέχηται εἰς τὸ ἐν ἀριστερᾷ τοῦτο μέρος.

Διαιρεθήτω 30564897 διὰ 67364.

3056	4897	67364
362		453
25		
5		

Ἀφ' οὗ χωρίσωμεν τὰ τέσσαρα τελευταῖα ψηφία εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ διαιρετέου, τὸ ἐν ἀριστερᾷ μέρος 3056 δὲν περιέχει πλέον τὸν διαιρέτην· ἀλλὰ ἐξαλείφοντες τὰ δύο τελευταῖα ψηφία τοῦ διαιρέτου ἔχομεν 673· καὶ ἐκτελοῦμεν τὴν πρᾶξιν, κατὰ τὸν σημειωθέντα δρόμον.

§. 109. Δυνάμεθα ἤδη νὰ συστήσωμεν τὰς ἀρχὰς, τὰς ὁποίας ἀπαιτεῖ ἡ περίστασις, ὅτε οἱ δύο ἀριθμοὶ εἶναι δεκαδικὰ κλάσματα, καὶ ζητοῦμεν τὸ πηλίκον ὡς ἔγγιστα τοῦ ἀκριβοῦς π. χ. μεῖον χιλιοστημορίου, ἢ δεκαχιλιοστημορίου καὶ ἐφεξῆς.

Φέρομεν κατὰ πρῶτον τὴν διαίρεσιν εἰς ἐκείνην δύο ἀκεραίων ἀριθμῶν, κατὰ τὸν κανόνα τοῦ ἀριθμοῦ 87, καὶ προσθέτομεν ἔπειτα εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ διαιρετέου τόσα μηδενικὰ, ὅσα ψηφία δεκαδικὰ θέλομεν εἰς τὸ πηλίκον· κάμνομεν τὴν διαίρεσιν κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανονα, καὶ συνάγομεν οὕτως τὸ πηλίκον μεῖον μονάδος· χωρίζομεν τέλος πάντων κατὰ τὰ δεξιὰ τοῦ πηλίκου τὰ ζητούμενα δεκαδικὰ ψηφία.

Πρῶτον παράδειγμα. Ζητεῖται μεῖον χιλιοστημορίου τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ 1234,569

διὰ 27,35894. Ἀρχίζω (ἀριθμ. 87) νὰ προσθέτω δύο μηδενικὰ εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ διαιρετέου, καὶ τότε ἔχω νὰ διαιρέσω 12456900 διὰ 2735894. Μετὰ ταῦτα, ἐπειδὴ ζητῶ τρία ψηφία δεκαδικὰ εἰς τὸ πηλίκον, γράφω ἄλλα τρία μηδενικὰ εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ διαιρετέου· τουτέστι διαιρῶ 123456900000 διὰ 2735894, καὶ ζητῶ τὸ πηλίκον μεῖον μονάδος.

```
123456|900000|2735894
------        |-------
 14020        |45124
 -----
   341
   ---
    68
    --
    13
    --
     2
```

Εὑρίσκω 45124· ἀλλ' ἐπειδὴ ἐπρόσθεσα τρία νέα μηδενικὰ εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ διαιρετέου, τὰ ἐκατάστησα 1000 φοραῖς μεγαλήτερα· πρέπει λοιπὸν, διὰ νὰ ἄξω τὸ πηλίκον εἰς τὴν ἀληθινήν του τιμὴν νὰ χωρίσω τρία ψηφία δεκαδικὰ εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ πηλίκου, καὶ οὕτως θέλομεν ἔχει 45,124 τὸ ζητούμενον πηλίκον.

Δεύτερον παράδειγμα. Ζητοῦμεν νὰ εὕρωμεν μεῖον δεκαχιλιοστημορίου τὸ πηλίκον τοῦ 229,4703568 διαιρουμένου διὰ 7,3594.

Ἐπειδὴ ἔπρεπε κατὰ πρῶτον, ἐξαιτίας τοῦ κανόνος τοῦ ἀριθμοῦ 87, νὰ προσθέσωμεν τρία μηδενικὰ εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ διαιρέτου, καὶ μετὰ ταῦτα νὰ προσθέσωμεν τέσσαρα εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ διαιρετέου, δηλαδὴ νὰ διαιρέσωμεν 22947035680 διὰ 73594.

2294703	5680	73894
86883		31 | 1805.
13289		
5930		
43		
6		

Καὶ εὑρίσκομεν πράττοντες οὕτως διὰ ἐξαγόμενον 31,1805. Λοιπὸν 31,1805 εἶναι τὸ ζητούμενον πηλίκον.

Μ' ὅλον ὅτι αὐτὴ ἡ μέθοδος τῷ ὄντι εἶναι ἁπλουστέρα, παρὰ τὸν συνήθη τρόπον τῆς διαιρέσεως, μ' ὅλον τοῦτο πρέπει σπανίως νὰ τὴν μεταχειριζώμεθα· ἐπειδὴ πρέπει νὰ ἠξεύρωμεν, ὅτι ἡ προσδιόρισις τοῦ τελευταίου ψηφίου ἀφίνει κάποτε ἀμφιβολίαν μιᾶς ἢ δύο μονάδων τῆς ἀληθινῆς τιμῆς της. Αὐτὴ ἡ μέθοδος δὲν εἶναι τόσον εὔκολος, ὡς ἡ σύντομος μέθοδος τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, ἥτις δὲν παῤῥησιάζει καμμίαν ἐναντιότητα εἰς τὰς πράξεις, καὶ διὰ τοῦτο αὐτὴ ἡ τελευταία εἶναι εἰς μεγάλην χρῆσιν.

§. 110. Συμπέρασμα Γενικόν. Τὸ πρῶτον τοῦτο μέρος τοῦ παρόντος συγγράμματος περιέχει πᾶν ὅ,τι συγκροτεῖ τὴν στοιχειώδη Ἀριθμητικὴν, τῆς ὁποίας τὸ πρώτιστον ἀντικείμενον εἶναι ἡ ἔκφρασις καὶ ἀνάπτυξις τῶν κανόνων, τοὺς ὁποίους πρέπει νὰ ἐξακολουθῶμεν, διὰ νὰ ἐκτελέσωμεν ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν ὅλας τὰς δυνατὰς πράξεις. Αἱ ἀρχικαὶ πράξεις εἶναι αἱ ἀκόλουθοι τέσσαρες. Πρόσθεσις, Ἀφαίρεσις, Πολλαπλασιασμὸς καὶ Διαίρεσις. Ὅλαι αἱ ἄλλαι, καθὼς ἡ ἀναγωγὴ τῶν κλασμάτων εἰς τὴν ἁπλουστέραν μορφήν των, ἡ ἀναγωγὴ εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν, ἡ τροπὴ κυρίου κλάσματος εἰς δεκαδικὸν καὶ

ἐφεξῆς, ἄλλο δὲν εἶναι εἰμὴ συμπλοκή τις τῶν προειρημένων τεσσάρων.

Ὑπάρχουσιν ἄλλαι δύο ἀριθμητικαὶ πράξεις, περὶ τῶν ὁποίων ἀκόμη δὲν ὡμιλήσαμεν, ἐπειδὴ εἰς τὴν τελείαν διασάφησιν τούτων ἀπαιτοῦνται μερικαὶ ἀρχαὶ ἑνὸς ἄλλου μέρους τῆς Μαθηματικῆς. Αὗται εἶναι ὁ σχηματισμὸς τῶν δυνάμεων, καὶ ἡ ἐξαγωγὴ τῶν ῥιζῶν τῶν ἀριθμῶν. Περὶ τούτων θέλομεν ὁμιλήσει εἰς τὸν ἀριθμὸν τοῦ εον κεφαλαίου.

Εἰς τὸ εον κεφάλαιον θέλομεν θεωρήσει τοὺς ἀριθμοὺς μὲ τρόπον γενικὸν καὶ ἀνεξάρτητον ἀπὸ κάθε σύστημα ἀριθμήσεως, καὶ θέλομεν γνωστοποιήσει ἰδιότητας ἀνηκούσας εἰς τοιοῦτον ἢ εἰς ἄλλο σύστημα κατὰ μέρος.

Ἡ ἐπιστήμη, ἥτις ἔχει αὐτὸν τὸν σκοπὸν, εἶναι σχεδὸν ἐκείνη, ἥτις καλεῖται Γενικὴ Ἀριθμητική.

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΝ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ε΄.

Γενικαὶ Ἰδιότητες τῶν ἀριθμῶν.

§. 111. Εἰσαγωγή. Πρὶν προχωρήσωμεν εἰς τὴν τῶν ἀριθμῶν ἐπιστήμην, διὰ νὰ ἀνακαλύψωμεν εὐκολώτερα νέας αὐτῶν ἰδιότητας, εἶναι ἀναπόφευκτον νὰ δανεισθῶμεν ἀπὸ τὴν Ἄλγεβραν μέρη τινὰ τῆς ὕλης της, καθὼς τὰ γράμματα καὶ τὰ σημεῖα, διὰ τῶν ὁποίων ἐκφράζομεν μὲ γενικὸν καὶ σύντομον τρόπον τὰς πράξεις καὶ τοὺς συλλογισμοὺς τοὺς εἰς τὴν λύσιν τινῶν ζητημάτων ἀπαιτουμένους.

Τὰ στοιχεῖα ταῦτα εἶναι δέκα τὸν ἀριθμὸν ἀρχικὰ, τὰ ὁποῖα κατὰ σειρὰν θέλομεν γνωστοποιήσει.

1ον. Τὰ γράμματα, τὰ ὁποῖα μεταχειριζόμεθα ἀντὶ χαρακτήρων ἢ ψηφίων πρὸς παράστασιν τῶν ἀριθμῶν. Ἡ χρῆσις αὐτῶν παῤῥησιάζει ἐν ταυτῷ γενικωτέραν καὶ συντομωτέραν γραφὴν, παρὰ τὴν τῶν ψηφίων καὶ ἐκ ταύτης ἐξάγεται καλήτερα ἡ ὕπαρξις τοιαύτης ἰδιότητος, ὡς πρὸς μίαν ἢ πολλὰς κλάσεις ἀριθμῶν.

2ον. Τὸ σημεῖον $+$, μὲ τὸ ὁποῖον σημειόνομεν τὴν πρόσθεσιν δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν, καὶ τὸ ὁποῖον καλεῖται πλέον.

Οὕτως 45+23 ἐκφράζεται 45 πλέον 23, ἢ 45 αὐξανόμενον ἀπὸ 23. Παρομοίως α+β+γ προφέρεται α πλέον β πλέον γ, ἢ ὁ ἀριθμὸς ὁ σημειωμένος ἀπὸ α αὐξανόμενος ἐκ τοῦ ἐκφραζομένου ἀριθμοῦ διὰ β, καὶ ἐκ τοῦ ἐκφραζομένου διὰ γ.

3ον. Τὸ σημεῖον —, τὸ ὁποῖον λέγεται μεῖον, καὶ τὸ ὁποῖον μεταχειριζόμεθα διὰ νὰ σημειόνωμεν τὴν ἀφαίρεσιν δύο ἀριθμῶν τοῦ ἑνὸς ἀπὸ τὸν ἄλλον.

Οὕτως 73 — 49 προφέρεται 73 μεῖον 49, ἢ 73 ἠλαττωμένον ἀπὸ 49; ἢ προσέτι ἡ διαφορὰ τοῦ 73 καὶ 49· α — β λέγεται α μεῖον β.

4ον. Τὸ σημεῖον τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, τὸ ὁποῖον εἶναι ×, ἢ στιγμὴ βαλλομένη μεταξὺ δύο ἀριθμῶν, καὶ ἐκφραζομένη „πολλαπλασιασμένον ἐπί."

Οὕτως 29×35 ἢ 29 . 35 ἐκφράζεται οὕτως· 29 πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ 35, ἢ τὸ γινόμενον τοῦ 29 ἐπὶ 35· α×β, ἢ α . β προφέρεται α πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ β.

Σ. Κ. Ὅταν οἱ ἀριθμοὶ τῶν ὁποίων θέλομεν νὰ δείξωμεν τὸν πολλαπλασιασμὸν ἐκφέρωνται διὰ γραμμάτων, ἐσυμφωνήθη νὰ γράφωνται ὁ εἷς κατ' ἐξακολούθησιν τοῦ ἄλλου χωρὶς παρένθεσιν σημείου· οὕτως αβ σημαίνει ἀκόμη α πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ β· ἀλλ' ἐννοεῖται καλῶς, ὅτι ἡ σημείωσις αβ εἶναι εἰς χρῆσιν μόνον, ὅταν οἱ ἀριθμοὶ σημειόνωνται μὲ γράμματα· ἐπειδὴ ἂν θέλωμεν, φερ' εἰπεῖν, νὰ παραστήσωμεν τὸ γινόμενον τοῦ 5 ἐπὶ 6, καὶ γράψωμεν 56, ἠθέλαμεν συγχίσει ταύτην τὴν σημείωσιν μὲ τὸν ἀριθμὸν 56. Κατὰ ταύτην λοιπὸν τὴν περίστασιν ἀφεύκτως μεταχειριζόμεθα τὸ σημεῖον × ἢ μίαν στιγμὴν, καὶ γράφομεν 5×6, ἢ 5 . 6.

5^{ov}. Τὸ σημεῖον τῆς διαιρέσεως, τὸ ὁποῖον σύγκειται ἀπὸ δύο στιγμὰς:, καὶ τὸ ὁποῖον θέτομεν μεταξὺ τοῦ διαιρετέου καὶ διαιρέτου· ἢ μίαν γραμμὴν — ἄνω τῆς ὁποίας θέτομεν τὸν διαιρετέον, καὶ ὑποκάτω τὸν διαιρέτην· οὕτως $24:6$ ἢ $\frac{24}{6}$ ἐκφράζεται 24 διαιρεθὲν διὰ 6, ἢ τὸ πηλίκον τοῦ 24 διὰ τοῦ 6· παρομοίως $\alpha:\beta$ ἢ $\frac{\alpha}{\beta}$ ἐκφράζεται α διαιρεθὲν διὰ τοῦ β. Ἡ σημείωσις $\frac{\alpha}{\beta}$ εἶναι ἡ πλέον εὔχρηστος.

6^{ov}. Ὁ συντελεστὴς, σημεῖον τὸ ὁποῖον μεταχειριζόμεθα, ὅταν εἷς ἀριθμὸς ἐκφραζόμενος διὰ γράμματος πρέπει νὰ προστεθῇ εἰς τὸν ἴδιον ἑαυτόν του πολλαῖς φοραῖς· οὕτως ἀντὶ νὰ γράψωμεν $\alpha+\alpha+\alpha+\alpha+\alpha$, ὅστις παρασταίνει τὸν ἀριθμὸν α ἠνωμένον τετράκις εἰς τὸν ἑαυτόν του, γράφομεν 5α. Παρομοίως 11α παρασταίνει α νὰ προστεθῇ εἰς τὸν ἑαυτόν του 10 φοραῖς· $12\alpha\beta$ ἐκφράζει τὸ γινόμενον τοῦ α ἐπὶ β προσθεμένον 11 φοραῖς εἰς τὸν ἑαυτόν του.

Ὁ συντελεστὴς εἶναι ὁ μερικὸς ἀριθμὸς γραμμένος εἰς τὰ ἀριστερὰ ἄλλου σημειωμένου δι' ἑνὸς ἢ πολλῶν γραμμάτων, παριστῶν τὸν ἀριθμὸν τῶν φορῶν, πλέον μία, κατὰ τὰς ὁποίας ὁ ἀριθμὸς οὗτος ἐπροστέθη εἰς τὸν ἑαυτόν του.

7^{ov}. Ὁ ἐκθέτης, σημεῖον τὸ ὁποῖον μεταχειριζόμεθα, ὅταν εἷς ἀριθμὸς παῤῥησιαζόμενος διὰ γράμματος, πολλαπλασιάζεται πολλαῖς φοραῖς ἐπὶ τὸν ἑαυτόν του.

Οὕτως ἀντὶ νὰ γράψωμεν $\alpha\times\alpha\times\alpha\times\alpha\times\alpha$ ἢ ααααα, γράφομεν ἁπλούστερον α^5, τὸ ὁποῖον δηλοῖ α πολλαπλασιασθὲν τετράκις ἐφ' ἑαυτό· β^6 ἐκφράζει β

πολλοπλασιασθὲν πεντάκις ἐπὶ τὸν ἑαυτόν του. Ὁ ἐκθέτης εἶναι ἀριθμὸς, ὅστις γράφεται εἰς τὰ δεξιὰ, καὶ ὀλίγον τι ἄνω τοῦ γράμματος, ἐκφράζει δὲ πόσαις φοραῖς πλέον μίαν ὁ διὰ γράμματος ἐκτεθεὶς ἀριθμὸς πολλαπλασιάζεται ἐφ' ἑαυτὸν, ἢ πόσαις φοραῖς τὸ γράμμα τοῦτο εἶναι παράγων εἴς τι γινόμενον.

Καλεῖται δύναμις τὸ ἐξαγόμενον τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἀριθμοῦ τινὸς πολλαῖς φοραῖς ἐφ' ἑαυτὸν, καὶ βαθμὸς τῆς δυνάμεως, ὁ ἐκθέτης· τουτέστιν ὁ ἀριθμὸς τῶν φορῶν, πλέον μίαν, κατὰ τὰς ὁποίας ὁ τοιοῦτος ἀριθμὸς πρέπει νὰ πολλαπλασιασθῇ ἐφ' ἑαυτόν. Οὕτως a^5 προφέρεται ἀκόμη α νὰ ὑψωθῇ εἰς $\overline{5}^{\nu\nu}$ δύναμιν, ἢ α $\overline{5}^{\eta}$ δύναμις· β^6 ἐκφράζεται, β $\overline{6}^{\eta}$ δύναμις.

$\overline{8}^{ov}$ Τὸ σημεῖον $\sqrt{}$, τὸ ὁποῖον προτάττομεν εἴς ἀριθμόν τινα, ὅταν δεικνύωμεν, ὅτι ἐξάγομεν ἐκ τοῦ τοιούτου ἀριθμοῦ μίαν ῥίζαν ἑνὸς βαθμοῦ. Οὕτως, τὸ $\sqrt[3]{a}$ προφέρεται ῥίζα τρίτη τοῦ α, $\sqrt[4]{\beta}$ προφέρεται ῥίζα τετάρτη τοῦ β.

Καλεῖται ῥίζα $2^{+\alpha}$, $3^{+\eta}$, $4^{+\eta}$, κτλ. ἑνὸς ἀριθμοῦ ἕνας ἄλλος ἀριθμὸς, ὅστις ὑψωμένος εἰς $2^{+\alpha\nu}$, $3^{+\eta\nu}$, $4^{+\eta\nu}$ . . . δύναμιν, δύναται νὰ προάξῃ τὸν πρῶτον ἀριθμόν. Οὕτως 3 εἶναι ἡ $2^{+\alpha}$ ῥίζα τοῦ 9, ἐπειδὴ 3 φοραῖς 3 σχηματίζουν τὸ 9· 7 εἶναι ἡ $2^{+\alpha}$ ῥίζα τοῦ 49, ἐπειδὴ 7 φοραῖς 7 σχηματίζουν τὸ 49· 4 εἶναι ἡ $3^{+\eta}$ ῥίζα τοῦ 64, ἐπειδὴ 4 φοραῖς 4 κάμνουν 16, καὶ 4 φοραῖς 16 κάμνουν 64.

Αἱ ῥίζαι 2 καὶ 3 καλοῦνται ἀκόμη ῥίζα, ἡ μὲν τετραγωνική, καὶ ἡ ἄλλη κυβική. Ὅταν θέλωμεν νὰ φανερώσωμεν ἁπλῆν ἐξαγωγὴν ῥίζης τετραγωνικῆς ἢ 2^{ας}, γράφομεν μόνον ἔμπροσθεν τοῦ ἀριθμοῦ τὸ σημεῖον $\sqrt{}$, χωρὶς νὰ θέσωμεν κἀνὲν σημεῖον ἐντὸς αὐτοῦ. Οὕτως $\sqrt{α}$ φανερόνει ῥίζαν τετραγωνικὴν ἢ 2^{αν} τοῦ α.

9^{ον} Τὸ σημεῖον, διὰ τοῦ ὁποίου φανερόνομεν, ὅτι δύο ποσότητες εἶναι ἴσαι, εἶναι τὸ $=$, καὶ ἐκφράζεται εἶναι ἴσον μὲ, ἢ ἁπλούστερα ἴσον· οὕτως $α=β$ ἐκφράζει, ὅτι α εἶναι ἴσον μὲ τὸ β, ἢ α ἴσον β.

Διὰ νὰ ἐκφράσωμεν μὲ συντομίαν, ὅτι ἡ διαφορὰ τοῦ 36 καὶ 25 εἶναι ἴση μὲ 11 γράφομεν $36-25=11$· τουτέστι 36 μεῖον 25 ἴσον 11.

Αἱ ἐκφράσεις $α=β$, $36-25=11$ καλοῦνται Ἰσότητες· τὸ μέρος εἰς τὰ ἀριστερὰ τοῦ σημείου $=$ καλεῖται πρῶτον μέλος, καὶ τὸ μέρος εἰς τὰ δεξιὰ, δεύτερον μέλος.

10^{ον} Τὸ σημεῖον τῆς ἀνισότητος $>$, τὸ ὁποῖον μεταχειριζόμεθα, διὰ νὰ ἐκφράσωμεν, ὅτι μία ποσότης εἶναι μεγαλητέρα ἢ μικροτέρα ἄλλης· οὕτως $α>β$ σημαίνει, ὅτι α εἶναι μεγαλήτερον τοῦ β· $α<β$ σημαίνει, ὅτι α εἶναι μικρότερον τοῦ β· τουτέστιν ὅτι τὸ ἄνοιγμα τοῦ σημείου πρέπει νὰ εἶναι γυρισμένον πρὸς τὸ μέρος τῆς μεγαλητέρας ποσότητος.

§. 112. Πρὸς κατάληψιν δὲ τῆς χρήσεως τούτων τῶν διαφόρων σημείων, καὶ τῆς ἁπλότητος τῆς ἀλγεβραϊκῆς γλώσσης, ἂς κάμωμεν μερικὰς ἐφαρμογάς.

Ἂν ὑποθέσωμεν κατὰ πρῶτον, ὅτι θέλομεν νὰ ἐκφράσωμεν, ὅτι ὁ ἀριθμὸς α πρέπει νὰ πολλαπλασιασθῇ 3 φοραῖς ἐφ' ἑαυτὸν, καὶ ὅτι τὸ ἐξαχθὲν γινόμενον πρέπει νὰ πολλαπλασιασθῇ 3 φοραῖς διαδοχικῶς

ἐπὶ β, καὶ ὅτι τέλος πάντων τὸ νέον τοῦτο γινόμενον πρέπει νὰ πολλαπλασιασθῇ 2 φοραῖς διαδοχικῶς διὰ τοῦ γ, γράφομεν μόνον $\alpha^4\beta^3\gamma^2$.

Ὅταν ἐκφράζωμεν, ὅτι τοῦτο τὸ τελευταῖον ἐξαγόμενον πρέπει νὰ προστεθῇ 6 φοραῖς εἰς ἑαυτὸ, ἤγουν ὅτι πρέπει νὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 7, γράφομεν $7\alpha^4\beta^3\gamma^2$.

Παρομοίως $6\alpha^5\beta^2$ εἶναι ἡ σύντομος ἔκφρασις τοῦ 6 φοραῖς τὸ γινόμενον τῆς 5ης δυνάμεως τοῦ α ἐπὶ τὴν 2αν δύναμιν τοῦ β.

$3\alpha-5\beta$ εἶναι ἡ σύντομος ἔκφρασις τῆς διαφορᾶς μεταξὺ τοῦ τριπλοῦ τοῦ α καὶ τοῦ πενταπλοῦ τοῦ β.

$2\alpha^2-3\alpha\beta+4\beta^2$ εἶναι ἡ σύντομος ἔκφρασις τοῦ διπλοῦ τοῦ τετραγώνου α, ἠλαττωμένου κατὰ τὸ τριπλοῦν τοῦ γινομένου α ἐπὶ β, καὶ αὐξανομένου ἐκ τοῦ τετραπλοῦ τοῦ τετραγώνου τοῦ β.

Καλεῖται Μονώνυμον ἡ ποσότης μ' ἕνα μόνον ὅρον, ἢ ἁπλούστερα ὅρος ἀλγεβραϊκή τις ποσότης, ἥτις δὲν ἑνόνεται μὲ καμμίαν ἄλλην διὰ τοῦ σημείου τῆς προσθέσεως ἢ τῆς ἀφαιρέσεως, καὶ Πολυώνυμον ἡ ποσότης μὲ πολλοὺς ὅρους, ἀλγεβραϊκή τις ἔκφρασις, σύνθετος ἀπὸ πολλὰ μέρη χωρισμένα διὰ τοῦ + καὶ — · οὕτως 3α, $5\alpha^2$, $7\alpha^3\beta^2$ εἶναι μονώνυμα· $3\alpha-5\beta$, $2\alpha^2-3\alpha\beta+4\beta^2$ εἶναι πολυώνυμα. Ἡ πρώτη τῶν δύο τούτων ἐκφράσεων καλεῖται διώνυμον, ἐπειδὴ ἔχει δύο ὅρους· ἡ δευτέρα, τριώνυμον, ἐπειδὴ ἔχει τρεῖς ὅρους, καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

§. 113. Ἂς ἴδωμεν τώρα πῶς δυνάμεθα νὰ ἐκτελέσωμεν ἐπὶ τῶν ἀλγεβραϊκῶν ἐκφράσεων τὰς θεμελιώδεις ἐργασίας τῆς ἀριθμητικῆς, περιοριζόμενοι πάντοτε εἰς τὰς πλέον ἁπλουστέρας περιστάσεις, δηλαδὴ

εἰς ἐκείνας μόνον εἰς τὰς ὁποίας θέλομεν ἐπιστηριχθῇ εἰς τὴν σειρὰν τῆς πραγματείας ταύτης.

Πρόσθεσις. Διὰ νὰ συνάψωμεν τοὺς δύο ἀριθμοὺς α καὶ β, γράφομεν α+β, παρομοίως α+β+γ ἐκφράζει τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν α, β, γ. Τοῦτο συνάγομεν ἐκ τῶν κατὰ συνθήκην σημειώσεων. Παρομοίως α—β καὶ γ+δ—ζ συναθροιζόμενα σχηματίζουσι τὴν μόνην ποσότητα α—β+γ+δ—ζ.

Ἐὰν εἴχαμεν νὰ προσθέσωμεν α—β καὶ β—γ, ἐγράφαμεν α—β+β—γ· ἀλλ' ἐπειδὴ ἀπὸ ἓν μέρος τὸ β ἀφαιρεῖται, καὶ ἀπὸ τὸ ἄλλο προσθέτεται, ἕπεται ὅτι αὗται αἱ δύο πράξεις ἀνταμείβονται, καὶ ἡ ἔφρασις ἀνάγεται εἰς α—γ. Τοῦτο καλεῖται εἰς τὴν Ἄλγεβραν, πράττειν τὴν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων.

§. 114. Ἀφαίρεσις. Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν β ἀπὸ α, γράφομεν α—β· παρομοίως ἐὰν θέλωμεν νὰ ἀφαιρέσωμεν γ ἀπὸ α—β, γράφομεν α—β—γ. Ἐὰν ὅμως ἔχωμεν νὰ ἀφαιρέσωμεν τὴν ἔκφρασιν γ—δ ἀπὸ τὴν ἔκφρασιν α—β, κατ' ἀρχὰς σημειόνομεν τὴν ἀφαίρεσιν οὕτως α—β—(γ—δ), γράφοντες μεταξὺ εἰς δύο παρενθέσεις τὴν δευτέραν ποσότησα γ—δ, καὶ προτάττοντες τὸ σημεῖον —. Ἐὰν ὅμως θέλωμεν νὰ ἀνάξωμεν τὸ ἐξαγόμενον εἰς ἓν μόνον πολυώνυμον, ἰδοὺ τίνι τρόπῳ πρέπει νὰ συλλογισθῶμεν. Ἐὰν εἴχαμεν νὰ ἀφαιρέσωμεν ὅλον τὸ γ ἀπὸ τὸ α—β, ἠθέλαμεν εὕρει ἐξαγόμενον α—β—γ· πλὴν δὲν εἶναι τὸ γ, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ ἀφαιρέσωμεν, ἀλλ' εἶναι τὸ γ ἠλαττωμένον κατὰ δ, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ ἀφαιρέσωμεν, τὸ ἐξαγόμενον α—β—γ εἶναι μικρότερον τοῦ ἀριθμοῦ τῶν μονάδων τῶν εὑρισκομένων εἰς τὸ δ· οὕτως ἔχομεν τὸ ἐξαγόμενον εἰς τὴν ἀκριβῆ του τιμὴν, προσθέτοντες δ εἰς α—β—γ, καὶ συνάγομεν α—β—γ+δ.

Τουτέστι διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν πολυώνυμον ἀπὸ πολυώνυμον, πρέπει νὰ γράψωμεν τὸ δεύτερον κατ' ἐξακολούθησιν τοῦ πρώτου μὲ σημεῖα ἐναντία τῶν ὅσα πρότερον εἶχε.

Εὑρίσκομεν κατὰ τὸν κανόνα τοῦτον δι' ἀναλόγων συλλογισμῶν

$3\alpha - (2\beta - 3\gamma) = 3\alpha - 2\beta + 3\gamma$.

$5\alpha - 4\beta - (6\delta - \zeta + \eta) = 5\alpha - 4\beta - 6\delta + \zeta - \eta$.

§. 115. Πολλαπλασιασμός. Ἂς πολλαπλασιασθῇ α^4 ἐπὶ β^3· γράφομεν $\alpha^4 \times \beta^3$ ἢ ἁπλῶς $\alpha^4\,\beta^3$.

Ἐὰν ὅμως ἔχωμεν α^5 νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ α^3, παρατηροῦμεν, ὅτι ὁ ἀριθμὸς α μὲ τὸ νὰ εἶναι 5 φοραῖς παράγων εἰς τὸν πολλαπλασιαστέον, καὶ 3 φοραῖς παράγων εἰς τὸν πολλαπλασιαστὴν, πρέπει νὰ εἶναι 5+3 ἢ 8 φοραῖς παράγων εἰς τὸ γινόμενον· οὕτως συνάγομεν $\alpha^5 \times \alpha^3 = \alpha^8$, τουτέστιν ὅταν τὸ γράμμα ἦναι τὸ αὐτὸ εἰς τοὺς δύο παράγοντας τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, τὸ γράφομεν μίαν μόνην φορὰν, δίδοντές του ἐκθέτην τὸ ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν τῶν δύο παραγόντων.

Εὑρίσκομεν παρομοίως $\alpha^4\beta^2 \times \alpha^2\beta^3 = \alpha^6\beta^5$.

Ἔστω ἤδη $\alpha - \beta$ νὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ γ.

Δυνάμεθα κατὰ πρῶτον νὰ σημειώσωμεν τὸ γινόμενον τοιουτοτρόπως $(\overline{\alpha - \beta})\,\gamma$.

Ἐὰν ὅμως θέλωμεν νὰ εὕρωμεν ἓν μόνον πολυώνυμον, παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ νὰ πολλαπλασιάσωμεν $\alpha - \beta$ ἐπὶ γ εἶναι τὸ αὐτὸ (ἀριθμ. 27) ὡς καὶ νὰ πολλαπλασιάσωμεν γ ἐπὶ $\alpha - \beta$, τουτέστι νὰ λάβωμεν γ τόσαις φοραῖς, ὅσαι μονάδες εἶναι εἰς τὸ α ἠλαττωμένου κατὰ β. Ἐὰν λοιπὸν πολλαπλασιάσωμεν κατὰ πρῶτον τὸ γ ἐφ' ὅλον τὸ α, ἐκ τοῦ ὁποίου προκύπτει γα ἢ αγ, τὸ γινόμενον εἶναι μεγαλήτερον κατὰ τὸ γ ἐπὶ β

ἢ τὸ βγ· οὕτως πρέπει νὰ ἀφαιρέσωμεν βγ ἀπὸ αγ· τὸ δὲ αγ—βγ εἶναι τὸ ζητούμενον γινόμενον, τουτέστι (α—β) γ=αγ—βγ.

Ἄς πολλαπλασιάσωμεν προσέτι α—β ἐπὶ γ—δ.

Τὸ γινόμενον δύναται κατὰ πρῶτον νὰ παρασταθῇ οὕτως (α—β).(γ—δ)· ἀλλὰ διὰ νὰ λάβωμεν ἓν μόνον πολυώνυμον, πολλαπλασιάζομεν πρῶτον α—β ἐπὶ γ, ὅθεν προκύπτει αγ—βγ. Παρατηροῦμεν ἔπειτα, ὅτι δὲν ἔπρεπε νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐφ' ὅλον τὸ γ τὸ α—β, ἀλλ' ἐπὶ γ ἠλαττωμένον κατὰ δ.

Οὕτως τὸ γινόμενον αγ—βγ εἶναι μεγαλήτερον τοῦ γινομένου τοῦ α—β ἐπὶ δ, τουτέστι τοῦ αδ—βδ· λοιπὸν διὰ νὰ ἄξωμεν τὸ γινόμενον εἰς τὴν ἀκριβῆ του τιμὴν πρέπει νὰ ἀφαιρέσωμεν αδ—βδ ἀπὸ αγ—βγ· ὅθεν προκύπτει κατὰ τὸν κανόνα τῆς ἀφαιρέσεως, αγ—βγ—αδ+βδ.

Διὰ νὰ ἐκτελέσωμεν τὸν πολλαπλασιασμὸν δύο δυωνύμων, πολλαπλασιάζομεν διαδοχικῶς ἕκαστον ὅρον τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐφ' ἕκαστον ὅρον τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, παρατηροῦντες τὸν ἀκόλουθον κανόνα σχετικῶς πρὸς τὰ σημεῖα. Ἐὰν οἱ δύο ὅροι τοῦ πολλαπλασιαστέου καὶ πολλαπλασιάστου ἔχωσι καὶ οἱ δύο τὸ αὐτὸ σημεῖον + ἢ —, τὸ γινόμενον θέλει ἔχει πάντοτε τὸ σημεῖον +· ἀλλ' ἐὰν ἔχωσιν ἐναντία σημεῖα, τὸ γινόμενόν των θέλει ἔχει τὸ σημεῖον —.

Εὑρίσκομεν κατὰ τοῦτον τὸν κανόνα ὅτι (α+β) (γ+δ)=αγ+βγ+αδ+βδ, (α—β) (γ+δ) = αγ—βγ+αδ—βδ.

§. 116. Διαίρεσις. Θέλομεν θεωρήσει μίαν μόνην περίστασιν ταύτης τῆς πράξεως, ἐκείνην δύο μονωνύμων ποσοτήτων ἐκ τοῦ αὐτοῦ γράμματος συντιθεμένων.

Ἄς διαιρεθῇ $α^7$ διὰ $α^3$.

Δυνάμεθα κατὰ πρῶτον νὰ σημειώσωμεν τὸ πηλίκον οὕτως $\frac{\alpha^7}{\alpha^3}$ ἢ $\alpha^7 : \alpha^3$· ἀλλὰ παρατηροῦμεν, ὅτι ἐπειδὴ α^7 εἶναι γινόμενον, τοῦ ὁποίου α^3 καὶ τὸ πηλίκον εἶναι οἱ δύο παράγοντες, ὁ ἐκθέτης 7 τοῦ διαιρετέου πρέπει νὰ ἦναι (ἀριθμ. 115) ἴσος μὲ τὸ ἄθροισμα τοῦ ἐκθέτου 3 τοῦ διαιρέτου, καὶ τοῦ ἀγνώστου ἐκθέτου τοῦ πηλίκου· λοιπὸν ἀντιστρόφως οὗτος εἶναι ἴσος μὲ τὴν διαφορὰν μεταξὺ τοῦ ἐκθέτου τοῦ διαιρετέου, καὶ τοῦ ἐκθέτου τοῦ διαιρέτου, τουτέστι μὲ $7-3$ ἢ 4.

Οὕτως $\frac{\alpha^7}{\alpha^3} = \alpha^4$· καὶ τῷ ὄντι $\alpha^4 \times \alpha^3 = \alpha^7$.

Εὑρίσκομεν παρομοίως $\frac{\beta^9}{\beta^4} = \beta^5$, $\frac{\gamma^4}{\gamma^3} = \gamma^1$ ἢ γ, $\frac{\alpha^3\beta^2}{\alpha^2\beta} = \alpha^1\beta^1 = \alpha\beta$.

Αἱ ἄλλαι περιστάσεις τῆς διαιρέσεως εἶναι ἀνωφελεῖς νὰ θεωρηθῶσι τώρα διὰ τὸν προτεινόμενόν μας σκοπόν. Μόνας δὲ ταύτας τὰς ἀλγεβραϊκὰς γνώσεις θέλομεν χρειασθῆ εἰς τὸ πέμπτον κεφάλαιον καὶ εἰς τὰ ἀκόλουθα.

§. 117. Διὰ νὰ παραστήσωμεν τὴν ὠφέλειαν, τὴν ὁποίαν λαμβάνομεν ἐκ τῆς χρήσεως τῶν γραμμάτων πρὸς παράστασιν τῶν ἀριθμῶν, θέλομεν λύσει τὰ ἀκόλουθα δύο ζητήματα.

1ον Ποία τροπὴ προκύπτει εἰς ἓν κλάσμα, ὅταν προστεθῇ ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς εἰς τοὺς δύο ὅρους του; (τοῦτο ἤδη ἐξηγήθη εἰς τὸν ἀριθμ. 46).

Ἂς σημειώσωμεν διὰ $\frac{\alpha}{\beta}$ τὸ δεδομένον κλάσμα, καὶ διὰ μ τὸν ἀριθμὸν, τὸν ὁποῖον θέλομεν νὰ προσ-

θέσωμεν εἰς τοὺς δύο ὅρους α καὶ β τοῦ τοιούτου κλάσματος· ἡ πρᾶξις αὕτη δίδει τὸ νέον κλάσμα $\frac{\alpha+\mu}{\beta+\mu}$.

Διὰ νὰ συγκρίνωμεν τὰ δύο ταῦτα κλάσματα, τὰ ἄγομεν εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν, ἐκ τοῦ ὁποίου συνάγομεν διὰ τὸ πρῶτον κλάσμα $\frac{\alpha(\beta+\mu)}{\beta(\beta+\mu)}$, καὶ διὰ τὸ δεύτερον $\frac{(\alpha+\mu)\beta}{(\beta+\mu)\beta}$, ἢ ἐκτελοῦντες τοὺς ὑπολογισμοὺς κατὰ τὸν κανόνα τοῦ ἀριθμοῦ 115, $\frac{\alpha\beta+\alpha\mu}{\beta^2+\beta\mu}$ καὶ $\frac{\alpha\beta+\beta\mu}{\beta^2+\beta\mu}$.

Ἀλλ' οἱ δύο ἀριθμηταὶ $\alpha\beta+\alpha\mu$, καὶ $\alpha\beta+\beta\mu$ ἔχουσι κοινὸν μέρος τὸ $\alpha\beta$, τὸ δὲ μέρος $\beta\mu$ τοῦ δευτέρου ἀριθμητοῦ εἶναι μεγαλήτερον παρὰ τὸ μέρος $\alpha\mu$ τοῦ πρώτου, ἐπειδὴ ἔχομον $\beta>\alpha$· οὕτω λοιπὸν, τὸ δεύτερον κλάσμα εἶναι μεγαλήτερον τοῦ πρώτου· οὕτως, αὐξάνομεν τὴν τιμὴν τοῦ κλάσματος, προσθέτοντες τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν εἰς τοὺς δύο του ὅρους.

Βλέπομεν πρὸς τούτοις ἐκ τοῦ ἀνωτέρω συλλογισμοῦ ὅτι $\frac{\alpha}{\beta}$ πρέπει νὰ εἶναι κύριον κλάσμα, ἢ νὰ ἔχωμεν $\alpha<\beta$, διὰ νὰ ἀληθεύῃ ἡ πρότασις· ἐὰν ἐξ ἐναντίας εἴχαμεν $\alpha>\beta$, ἡ πρότασις ἤθελει ὑπάρχε εἰς ἀντίστροφον τάξιν· ἐπειδὴ τότε ἠθέλαμεν ἔχει $\alpha\beta+\beta\mu<\alpha\beta+\alpha\mu$.

Σ. Κ. Τοῦτο τὸ μέσον τῶν ἀκριβῶν καὶ γενικῶν ἀποδείξεων, ὅταν οἱ ἀριθμοὶ σημειόνωνται διὰ γραμμάτων, δὲν ἤθελε μένει, ἐὰν εἰργαζόμεθα ἐπὶ μερικῶν ἀριθμῶν. Π. χ. ἐὰν εἴχαμεν τὸ κλάσμα $\frac{12}{17}$, καὶ

επροσθέταμεν 3 μονάδας εἰς τοὺς δύο τοῦ ὅρους, ἠθέλαμεν εὕρει $\frac{15}{20}$.

Ἀνάγοντες τὰ δύο κλάσματα εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν, συνάγομεν διὰ τὸ πρῶτον $\frac{240}{340}$, καὶ διὰ τὸ δεύτερον $\frac{255}{340}$.

Ἐντεῦθεν βλέπομεν, ὅτι τὸ δεύτερον κλάσμα εἶναι μεγαλήτερον τοῦ πρώτου· ἀλλὰ τίποτε δὲν μᾶς δείχνει, ὅτι ἡ ἀλήθεια τούτου τοῦ μερικοῦ παραδείγματος ἀναφέρεται καὶ πρὸς πᾶν ἄλλο.

Ἡ ἀπόδειξις, τὴν ὁποίαν ἐκθέταμεν εἰς τὸν ἀριθμὸν 46, εἶναι κατὰ τὴν φύσιν τῶν συλλογισμῶν οὕτω γενικὴ, ὡς ἐκείνη, τὴν ὁποίαν ἀνωτέρω ἐδώκαμεν· ὅμως αὕτη, ἂν ὄχι τόσον πολὺ ἔξοχος, εἶναι ὅμως δεκτικὴ συντομίας. Ἰδοὺ λοιπὸν ἄγεται εἰς πλέον συντόμους ὅρους ὡς ἀκολούθως.

Ἔστωσαν $\frac{\alpha}{\beta}$ καὶ $\frac{\alpha+\mu}{\beta+\mu}$ τὰ δύο κλάσματα, τὰ ὁποῖα θέλομεν νὰ συγκρίνωμεν.

Ἂν τὰ ἀνάξωμεν εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν, προκύπτει $\frac{\alpha\beta+\alpha\mu}{\beta^2+\beta\mu}$ καὶ $\frac{\alpha\beta+\beta\mu}{\beta^2+\beta\mu}$· ἀλλ' ἐξ ὑποθέσεως ἔχομεν $\alpha<\beta$· λοιπὸν $\alpha\mu<\beta\mu$· ὅθεν $\alpha\beta+\alpha\mu<\alpha\beta+\beta\mu$· οὕτως τὸ δεύτερον κλάσμα εἶναι μεγαλήτερον τοῦ πρώτου.

2ον Ζητεῖται τὸ γινόμενον τοῦ ἀθροίσματος δύο ἀριθμῶν πολλαπλασιασμένου ἐπὶ τὴν διαφορὰν τῶν ἰδίων τούτων ἀριθμῶν.

Ἔστωσαν α καὶ β οἱ δύο προτεθέντες ἀριθμοὶ, τὸ ἄθροισμά των θέλει ἐκφρασθῆ διὰ $\alpha+\beta$, καὶ ἡ διαφορά των διὰ $\alpha-\beta$.

Ἤδη ἐὰν ἐκτελέσωμεν τὸν πολλαπλασιασμὸν τοῦ $\alpha+\beta$ ἐπὶ τοῦ $\alpha-\beta$, κατὰ τὸν κανόνα τοῦ ἀριθμοῦ 115, λαμβάνομεν γινόμενον $\alpha^2-\alpha\beta+\alpha\beta-\beta^2$, ἢ ἀποῤῥίπτοντες τοὺς δύο ὅρους $-\alpha\beta$ καὶ $+\alpha\beta$, οἵτινες ἀναμεταξύ των ἐξαλείφονται, ἔχομεν $\alpha^2-\beta^2$· Λοιπὸν $(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=\alpha^2-\beta^2$.

Τοῦτο φανερόνει, ὅτι τὸ ἄθροισμα δύο ὁποιωνδήποτε ἀριθμῶν πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ τὴν διαφορὰν αὐτῶν, δίδει πάντοτε γινόμενον τὴν διαφορὰν τῶν τετραγώνων των, ἢ τῶν δευτέρων δυνάμεών των.

Παράδειγμα. Ἔστωσαν αἱ δύο ἀριθμοὶ 25 καὶ 12, τὸ ἄθροισμά των εἶναι 37, καὶ ἡ διαφορά των 13· πολλαπλασιάζοντες 37 ἐπὶ 13 ἔχομεν γινόμενον 481· ἀπὸ ἄλλο μέρος 25×25 δίδει 625, 12×12 δίδει 144.

Ὅθεν $625-144=481$· λοιπὸν $(25+12)(25-12)=625-144=(25)^2-(12)^2$.

Οἱ τελευταῖοι οὗτοι συλλογισμοὶ ἄλλο δὲν εἶναι εἰμὴ βεβαίωσίς τις τῆς ἰδιάτητος ἐπάνω εἰς δύο μερικοὺς ἀριθμοὺς, ἐν ᾧ οἱ προηγούμενοι σχηματίζουν ἀκριβῆ καὶ γενικὴν ἀπόδειξιν, ὅταν οἱ ἀριθμοὶ σημειόνωνται διὰ γραμμάτων.

Τὰ ζητήματα ταῦτα ἀρκοῦσι διὰ νὰ κάμωσιν ἱκανοὺς τοὺς ἀρχαρίους νὰ ἐννοῶσι τὰς ἐκ τῆς χρήσεως τῶν γραμμάτων πρὸς παράστασιν τῶν ἀριθμῶν ὠφελείας! Διὰ ταύτης τῆς χρήσεώς των ὄχι μόνον καταστaίνομεν τοὺς συλλογισμοὺς πλέον γενικοὺς, καὶ πολλάκις πλέον συντόμους, ἀλλὰ προσέτι φυλάττουν τὸ ἴχνος τῶν πράξεων, αἱ ὁποῖαι πρέπει νὰ ἐκτελεσθῶσιν ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν, οἵτινες ἀποτελοῦν μέρος

τῆς ἐκφράσεως τοῦ ζητήματος, καὶ δὲν δύνανται νὰ ἀναλυθῶσι μεταξύ των, ὡς ὅταν ἐργαζώμεθα ἐπὶ μερικῶν ἀριθμῶν. *)

Μετὰ τὰς τοιαύτας γνώσεις ἐπιστρέφομεν εἰς τὸ προκείμενον, τουτέστι ἀναλαμβάνομεν ἓν τῶν ὑποκειμένων τῶν ἐξηγημένων εἰς τὸ πρῶτον τμῆμα διὰ νὰ τὸ σπουδάσωμεν περισσότερον. Οὕτως θέλομεν φθάσει εἰς νέας ἰδιότητας, καὶ εἰς μέσα τοῦ νὰ μεταποιῶμεν ἢ νὰ καταστaίνωμεν ἁπλουστέρους τοὺς τρόπους τῶν διαφόρων πράξεων τῆς ἀριθμητικῆς.

§. α$^{\text{ος}}$. Θεωρία τῶν διαφόρων συστημάτων τῆς ἀριθμήσεως.

§. 118. Εἴδομεν (ἀρ. 5) τίνι τρόπῳ διὰ μέσου δέκα ψηφίων ἐκφράζομεν ὅλους τοὺς ἀριθμοὺς κατὰ μόνην τὴν συνθήκην, ὅτι κάθε ψηφίον θεμένον εἰς τὰ ἀριστερὰ ἄλλου ἐκφράζει μονάδας δέκα φοραῖς μεγαλητέρας παρ' αὐτό. Πρόκειται δὲ ἤδη νὰ δείξωμεν, ὅτι δυνάμεθα παρομοίως νὰ γράφωμεν ὅλους τοὺς ἀριθμοὺς μὲ περισσοτέρους ἢ ὀλιγωτέρους τῶν δέκα χαρακτήρων, ἀρκεῖ νὰ ἦναι κἂν δύο, καὶ ἓν τούτων νὰ ἦναι τὸ μηδέν.

Καλεῖται ἐν γένει βάσις ἑνὸς συστήματος ἀριθμήσεως, ὁ ἀριθμὸς τῶν ψηφίων, τὰ ὁποῖα μεταχειρίζονται. Τὸ σύστημα, εἰς τὸ ὁποῖον μεταχειρίζονται μόνον δύο ψηφία, καλεῖται σύστημα δυαδικόν· ἐκεῖνα,

*) Ὁ Μεταφραστής· Π. χ. ἐὰν α πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ β, γράφομεν αβ, καὶ πάντοτε ἐννοοῦμεν, ὅτι ὁ ἀριθμὸς α πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τοῦ β· ἐὰν ὅμως πολλαπλασιάσωμεν 2 ἐπὶ 8, τὸ γινόμενον 16 δὲν παρρησιάζει ὅ,τι παρρησιάζει τὸ αβ· ἐπειδὴ 16 ὄχι μόνον σχηματίζεται ἀπὸ 2 × 8, ἀλλὰ καὶ ἀπὸ 4 × 4.

εἰς τὸ ὁποῖον μεταχειρίζονται τρία, σύστημα τριαδικὸν κ. τ. λ.

Εἰς κάθε σύστημα ἀριθμήσεως ἀναλόγως μὲ τὸ δεκαδικὸν σύστημα πρέπει κάθε ψηφίον θεμένον εἰς τὰ ἀριστερὰ ἄλλου νὰ ἐκφράζῃ μονάδας τόσαις φοραῖς μεγαλητέρας σχετικῶς εἰς ἐκείνας αὐτοῦ τοῦ ἄλλου ψηφίου, ὅσας μονάδας ἔχει ἡ βάσις, τουτέστιν ὁ ἀριθμὸς τῶν ψηφίων τοῦ συστήματος· οὕτως εἰς τὸ δυαδικὸν σύστημα ἕκαστον ψηφίον ἀποκτᾷ τιμὴν ἀνὰ δύο φορὰς μεγαλητέραν, καθ' ὅσον προχωρεῖ μίαν, δύο, τρεῖς τάξεις κατὰ τὰ ἀριστερά· εἰς τὸ τριαδικὸν σύστημα, ἡ τιμὴ ἑνὸς ψηφίου εἶναι ἀνὰ τρεῖς φορὰς μεγαλητέρα· καὶ ἐν γένει εἰς ἓν σύστημα, τοῦ ὁποίου ἡ βάσις εἶναι β, ἕκαστον ψηφίον ἀποκτᾷ τιμὴν ἀπὸ β εἰς β φορὰς μεγαλητέραν. Ὅταν εἷς ἀριθμὸς ἦναι γραμμένος εἰς σύστημα, τοῦ ὁποίου ἡ βάσις εἶναι β, τὸ πρῶτον ψηφίον εἰς τὰ δεξιὰ ἐκφράζει τὰς μονάδας τῆς πρώτης τάξεως, τὸ ψηφίον τὸ ἀμέσως εἰς τὰ ἀριστερὰ κείμενον, τὰς μονάδας τῆς δευτέρας τάξεως, τὸ δὲ εἰς τὰ ἀριστερὰ τῶν δύο τούτων εὑρισκόμενον ψηφίον τὰς μονάδας τῆς τρίτης τάξεως, καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

Ἔχομεν δὲ χρείαν ἀπὸ β μονάδας τῆς πρώτης τάξεως διὰ νὰ σχηματίσωμεν τὴν μονάδα τῆς δευτέρας τάξεως, β μονάδας τῆς δευτέρας τάξεως, διὰ νὰ σχηματίσωμεν τὴν μονάδα τῆς τρίτης τάξεως, καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

§. 119. Τούτου καλῶς ἐννοηθέντος, ἂς περάσωμεν εἰς τὸν τρόπον τοῦ ἐκφράζειν διὰ ψηφίων ὁλόκληρον τινὰ ἀριθμὸν, ὁποιονδήποτε καὶ ἂν ἦναι τὸ σύστημα, τὸ ὁποῖον παρεδέχθημεν. Πρὸς ἀκριβῆ τούτου κατάληψιν, θέλομεν θεωρήσει τὸ ἑπταδικὸν σύστημα, ἢ τὸ σύστημα, εἰς τὸ ὁποῖον μεταχειρίζονται

ἑπτὰ ψηφία· καὶ ἔπειτα τοὺς αὐτοὺς συλλογισμοὺς ἐφαρμόζομεν καὶ εἰς κάθε ἄλλο σύστημα.

Οἱ χαρακτῆρες τοῦ ἑπταδικοῦ συστήματος εἶναι 1, 2, 3, 4, 5, 6, 0, ἐκ τῶν ὁποίων οἱ ἓξ πρῶτοι ἐκφράζουσι τοὺς ἓξ πρώτους ἀριθμοὺς, προσθέτοντες τὴν μονάδα εἰς τὸ ἓξ σχηματίζομεν τὸν ἀριθμὸν ἑπτὰ, ἢ τὴν μονάδα τῆς δευτέρας τάξεως, ἥτις κατὰ τὴν προσυστηθεῖσαν ἀρχὴν δύναται νὰ ἐκφρασθῇ διὰ 10, ἐπειδὴ τὸ 0 μηδὲν μὴ ἔχον εἰς τὸν ἑαυτόν του καμμίαν τιμὴν, κάμνει νὰ ἐκφράζῃ τὸ ψηφίον 1, τὸ ὁποῖον εἶναι εἰς τὰ ἀριστερὰ του ἑπτὰ ἁπλᾶς μονάδας.

Θέτοντες δὲ διαδοχικῶς ὅλα τὰ ψηφία τοῦ συστήματος εἰς τὴν πρώτην καὶ δευτέραν θέσιν, θέλομεν σχηματίσει ὅλους τοὺς διαδοχικοὺς ἀριθμοὺς, τοὺς περιεχομένους μεταξὺ ἑπτὰ ἢ 10, ἕως εἰς τὸν ἀριθμὸν 66.

Οὗτος ὁ ἀριθμὸς γραφεὶς, μετὰ τὴν εἰς αὐτὸν πρόσθεσιν νέας μονάδος, θέλει ἀποτελέσει ἓξ μονάδας τῆς δευτέρας τάξεως, πλέον ἑπτὰ μονάδας τῆς πρώτης, τουτέστιν ἑπτὰ μονάδας τῆς δευτέρας τάξεως, ἢ μίαν μόνην μονάδα τῆς τρίτης τάξεως, ἥτις ἠμπορεῖ νὰ ἐκφρασθῇ μὲ 100.

Θέτοντες διαδοχικῶς εἰς τὴν πρώτην, δευτέραν, καὶ τρίτην τάξιν, τὰ διάφορα ψηφία τοῦ συστήματος, σχηματίζομεν ὅλους τοὺς διαδοχικοὺς ἀριθμοὺς τοὺς περιεχομένους μεταξὺ τοῦ 100 καὶ τοῦ 666.

Συλλογιζόμενοι ἐπὶ τούτου τοῦ τελευταίου ἀριθμοῦ ὡς ἐπὶ τοῦ 66, φθάνομεν κατὰ πρῶτον εἰς τὴν μονάδα τῆς τετάρτης τάξεως, ἥτις θέλει ἐκφρασθῇ μὲ 1000. Μετὰ ταῦτα συνάγομεν διαδοχικῶς ὅλους τοὺς διαδοχικοὺς ἀριθμοὺς τοὺς περιεχομένους ἀπὸ τὸ 1000 ἕως εἰς τὸν ἐκφραζόμενον ἀριθμὸν διὰ 6666, καὶ οὕτω ἕως εἰς τὸ ἄπειρον.

Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι ὅλοι οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοὶ δύνανται νὰ γραφθῶσιν εἰς τοῦτο τὸ σύστημα· καὶ ὁποῖον καὶ ἂν ἦναι ἀποδεκτὸν σύστημα, αἱ μονάδες τῶν διαφόρων τάξεων παρασταίνονται ἀμοιβαίως διὰ 1, 10, 100, 1000, 10000, ὡς εἰς τὸ δεκαδικὸν σύστημα.

§. 120. Σ. Κ. εἴπομεν εἰς τὸν ἀριθμὸν 118, ὅτι τὸ ψηφίον 0, ἦτον ψηφίον ἀπαραίτητον εἰς ὅλα τὰ συστήματα τὰ ἀνάλογα μὲ τὸ δεκαδικὸν σύστημα, τουτέστιν εἰς σύστημα, ὅπου ἡ σχετικὴ τιμὴ ἑνὸς ψηφίου ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸν βαθμὸν, τὸν ὁποῖον κρατεῖ εἰς τὰ ἀριστερὰ τῶν ἄλλων· ἀλλ' ἀκριβέστερου θεωροῦντες ἐδυνάμεθα νὰ τὸ παραιτήσωμεν, πλὴν τὸ σύστημα δὲν ἤθελεν εἶναι τόσον κανονικὸν, ὡς θέλομεν δείξει.

Προτεθείσθω π. χ. νὰ συστήσωμεν τὸ τριαδικὸν σύστημα, παραδεχόμενοι τὰ τρία μόνον σημαντικὰ ψηφία 1, 2, 3.

Οἱ τρεῖς πρῶτοι ἀριθμοὶ ἤθελαν ἐκφρασθῆ κατὰ πρῶτον διὰ τούτων τῶν ψηφίων.

Διὰ νὰ γράψωμεν τέσσαρα, πέντε καὶ ἕξ, ἀρκεῖ νὰ γράψωμεν 11, 12, 13. Διὰ νὰ ἐκφράσωμεν δὲ ἑπτὰ, ὀκτὼ, ἐννέα, δέκα, ἕνδεκα, δώδεκα, γράφομεν 21, 22, 23, 31, 32, 33. Παρομοίως 111, 112, 113, 121, 122, 123 ἐκφράζουσι δεκατρία, δεκατέσσαρα, δεκαπέντε, δεκαέξ, δεκαεπτὰ, δεκαοκτώ.

Δὲν εἶναι ἀνάγκη νὰ ἐκτανθῶμεν περισσότερον διὰ νὰ καταλάβωμεν τὴν δυσχέρειαν τούτου τοῦ συστήματος. Τὸ πρῶτόν του ἐλάττωμα συνίσταται εἰς τὸ ὅτι αἱ μονάδες τῆς ἰδίας τάξεως ἐκφράζονται μὲ τρόπον διαφορετικόν· οὕτως εἰς τὸ 13 καὶ 23 τὸ ψηφίον 3 ἐκφράζει μονάδα δευτέρας τάξεως, καθὼς τὰ

ψηφία, 1, καὶ 2, τὰ ὁποῖα εἶναι εἰς τὰ ἀριστερά των· Εἰς τὸ 123 ἡ ἕνωσις τῶν ψηφίων 23 ἐκφράζει ἐννέα ἢ τὴν μονάδα τῆς τρίτης τάξεως, καθὼς καὶ τὸ ψηφίον 1, τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται εἰς τὰ ἀριστερὰ τούτων.

Μεταχειριζόμενοι τὸ ψηφίον 0, ἀρκεῖ νὰ προσδιορίσωμεν τὸν ἀριθμὸν τῶν μονάδων τῶν διαφόρων τάξεων, αἵτινες περιέχονται εἰς τὸν δεδομένον ἀριθμὸν· καὶ νὰ γράψωμεν τὰ ψηφία, τὰ ὁποῖα ἐκφράζουσι τοῦτον τὸν ἀριθμὸν, τὸ ἓν εἰς τὰ ἀριστερὰ τοῦ ἄλλου.

§. 121. Ἡ ἀκριβὴς συμφωνία, ἥτις ὑπάρχει μεταξὺ τῆς ὀνοματολογίας τῶν ἀριθμῶν, καὶ τοῦ τρόπου τοῦ γράφειν αὐτοὺς διὰ ψηφίων εἰς τὸ δεκαδικὸν σύστημα, μᾶς κάμνει μὲ εὐκολίαν νὰ τοὺς ἐκφράζωμεν, καὶ διὰ νὰ εἴπω οὕτω, ὑπὸ τὴν ὑπαγόρευσιν εἰς τὴν κοινὴν γλῶσσαν. Ἀλλὰ δὲν ἀκολουθεῖ τὸ αὐτὸ εἰς τὰ ἄλλα συστήματα, τὰ ὁποῖα δὲν παῤῥησιάζουσι κάμμίαν συνάφειαν μὲ τὴν παροῦσαν ὀνοματολογίαν.

Πρόκειται π. χ. νὰ γράψωμεν τὸν ἀριθμὸν τριακόσια ἑξῆντα ἐννέα, εἰς τὸ ἑπταδικὸν σύστημα. Εἶναι δύσκολον πρότερον νὰ γνωρίσωμεν, ποῖα εἶναι τὰ ἐπιτήδεια ψηφία εἰς τὸ νὰ ἐκφράσωσι τὰς μονάδας τῆς πρώτης, δευτέρας καὶ τρίτης κ. τ. λ. τάξεως, τὰς ὁποίας ὁ δεδομένος ἀριθμὸς περιέχει· ἀλλ' ἐπειδὴ οὗτος ὁ ἀριθμὸς γραφόμενος διὰ ψηφίων εἰς τὸ δεκαδικὸν σύστημα ἄγεται εἰς 369, ἕπεται, ὅτι τὸ ζήτημα τοῦτο ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸ ἀκόλουθον, τὸ ὁποῖον εἶναι πολὺ πλέον γενικόν.

Ἀριθμοῦ ἐκφρασμένου εἰς γλῶσσαν κοινὴν, ἢ γεγραμμένου εἰς τὸ δεκαδικὸν σύστημα, νὰ μεταφράσωμεν τὸν αὐτὸν τοῦτον ἀριθμὸν εἰς σύστημα, τοῦ ὁποίου ἡ βάσις εἶναι β.

Διὰ νὰ τὸ λύσωμεν, παρατηροῦμεν, ὅτι ἐπειδὴ χρειάζονται β μονάδες τῆς πρώτης τάξεως, διὰ νὰ

σχηματισθῇ μία μονὰς τῆς δευτέρας, τοσάκις ὁ δεδομένος ἀριθμὸς περιέχει τὸν ἀριθμὸν β, ὅσας μονάδας περικλείει τῆς δευτέρας τάξεως τοῦ συστήματος β, τουτέστιν, ὅτι διαιροῦντες τοῦτον τὸν ἀριθμὸν διὰ τοῦ β, θέλομεν ἔχει πηλίκον ἐκφράζον μονάδας τῆς δευτέρας τάξεως, τὸ δὲ ὑπόλοιπον, τὸ ὁποῖον ἀναγκαίως θέλει εἶναι μικρότερον τοῦ β, θέλει ἐκφράζει τὰς μονάδας τῆς πρώτης τάξεως τοῦ γεγραμμένου ἀριθμοῦ εἰς τὸ σύστημα, τοῦ ὁποίου ἡ βάσις εἶναι β. Παρομοίως, ἐπειδὴ β μονάδες τῆς δευτέρας τάξεως τοῦ συστήματος β, σχηματίζουσι μίαν μονάδα τῆς τοιαύτης τάξεως τοῦ ἰδίου συστήματος, ἐὰν διαιρέσωμεν τὸ πηλίκον, τὸ ὁποῖον ἐκφράζει τὰς μονάδας τῆς δευτέρας τάξεως διὰ τοῦ β, τὸ νέον πηλίκον, τὸ ὁποῖον λαμβάνομεν, ἐκφράζει μονάδας τῆς τρίτης τάξεως, καὶ τὸ ὑπόλοιπον πάντοτε μικρότερον τοῦ β, θέλει περικλείει τὰς μονάδας τῆς δευτέρας τάξεως τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ γεγραμμένου εἰς τὸ σύστημα, τοῦ ὁποίου ἡ βάσις εἶναι β, καὶ οὕτω καθεξῆς.

Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι διὰ νὰ περάσωμεν ἐκ τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος εἰς τὸ σύστημα, τοῦ ὁποίου ἡ βάσις εἶναι β, πρέπει. 1ον Νὰ διαιρέσωμεν τὸν δεδομένον ἀριθμὸν διὰ τῆς βάσεως τοῦ νέου συστήματος γραμμένου εἰς τὸ δεκαδικὸν σύστημα, ἐκ τοῦ ὁποίου ἔχομεν ὑπόλοιπον, τὸ ὁποῖον γράφομεν κατὰ μέρος, ὡς ἐκφράζον τὰς μονάδας τῆς πρώτης τάξεως εἰς τὸ νέον σύστημα. 2ον Νὰ διαιρέσωμεν τὸ συναγόμενον πηλίκον διὰ τῆς ἰδίας βάσεως, ἐκ τοῦ ὁποίου ἔχομεν ὑπόλοιπόν τι, τὸ ὁποῖον γράφομεν εἰς τὰ ἀριστερὰ τοῦ πρώτου ὡς ἐκφράζον μονάδας τῆς δευτέρας τάξεως. 3ον Νὰ διαιρέσωμεν τὸ δεύτερον πηλίκον διὰ τῆς ἰδίας βάσεως, καὶ νὰ γράψωμεν τὸ τρίτον λαμβα-

νόμενον ὑπόλοιπον εἰς τὰ ἀριστερὰ τῶν δύο προτεθέντων, ἐπειδὴ ἐκφράζει μονάδας τῆς τρίτης τάξεως, καὶ νὰ ἐξακολουθῶμεν ταύτας τὰς πράξεις, ἕως οὗ νὰ φθάσωμεν εἰς πηλίκον ἔλασσον τῆς βάσεως τοῦ νέου συστήματος. Τὸ τελευταῖον δὲ τοῦτο πηλίκον ἐκφράζει τὰς μονάδας τῆς ἀνωτέρας τάξεως, καὶ γράφεται τότε εἰς τὰ ἀριστερὰ ὅλων τῶν διαδοχικῶν ληφθέντων ὑπολοίπων.

Ἃς ἐφαρμόσωμεν τοῦτον τὸν κανόνα εἰς τὸν ἀριθμὸν τριακόσια ἑξῆντα ἐννέα ἢ 369, τὸν ὁποῖον πρόκειται νὰ μεταφράσωμεν εἰς τὸ ἑπταδικὸν σύστημα.

```
369) 7
 19 )52 ) 7
  5 ) 3 ) 7 ) 7
          0 ) 1        (1035)
```

Διαιροῦντες 369 διὰ 7 εὑρίσκομεν πηλίκον 52 καὶ ὑπόλοιπον 5, τὸ ὁποῖον γράφομεν κατὰ μέρος, καὶ τὸ ὁποῖον ἐκφράζει τὰς μονάδας τῆς πρώτης τάξεως εἰς τὸ νέον σύστημα.

Διαιροῦντες 52 διὰ 7, εὑρίσκομεν πηλίκον 7 καὶ ὑπόλοιπον 3, τὸ ὁποῖον ἐκφράζει τὰς μονάδας τῆς δευτέρας τάξεως, καὶ γράφομεν εἰς τὰ ἀριστερὰ τοῦ ψηφίου 5.

Διαιροῦντες 7 διὰ 7 εὑρίσκομεν πηλίκον 1, καὶ 0 ὑπόλοιπον· τοῦτο φανερόνει, ὅτι δὲν ὑπάρχουσι μονάδες τῆς τρίτης τάξεως, ἀλλὰ γράφομεν τὸ 0, διὰ νὰ ἐπέχῃ τὴν θέσιν αὐτῶν.

Τέλος πάντων ἐπειδὴ τὸ πηλίκον 1 εἶναι μικρότερον τοῦ 7, ἐκφράζει τὰς μονάδας τῆς τετάρτης τάξεως, ὁ δὲ ἀριθμὸς μεταφραζόμενος εἰς τὸ ἑπταδικὸν σύστημα ἄγεται εἰς (1035).

Εὑρίσκομεν παρομοίως, ὅτι ὁ ἀριθμὸς 5347 μεταφράζεται εἰς τὸ ὀκταδικὸν σύστημα, τουτέστι γραφόμενος μὲ τὰ ψηφία 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 0, δίδει εἰς τὸ νέον σύστημα (12343).

```
5347 )  8
 54   (668)  8
 67   ( 28 (83)  8
  3   )  4 ) 3 (10) 8
                2 (1
```

(12343).

Παρατήρησις. Ἡ βάσις τοῦ νέου συστήματος εἶναι ἐνίοτε μεγαλητέρα τοῦ 10 ἢ τῆς τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος.

Εἰς ταύτην τὴν περίστασιν πρέπει νὰ κάμωμεν μίαν μακρὰν μεταβολὴν, διὰ νὰ ἄξωμεν τὴν πρᾶξιν εἰς τὸν κανόνα.

Ἂς ἐκφρασθῇ π. χ. ὁ ἀριθμὸς 8423 εἰς τὸ δωδεκαδικὸν σύστημα, ἢ εἰς τὸ σύστημα δώδεκα ψηφίων.

Τὰ ψηφία τούτου τοῦ συστήματος εἶναι 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, α', β', 0. (μεταχειριζόμεθα ἐκ συνθήκης τὰ δύο ταῦτα γράμματα α', β', διὰ νὰ σημειόνωμεν τοὺς ἀριθμοὺς δέκα καὶ ἕνδεκα).

```
8423 )  12
 023 (701 ) 12
  11 )101  (58 ) 12
        5  )10 ( 4
```

(4α'5β')

Τῆς βάσεως δώδεκα ἐκφρασθείσης διὰ 12 εἰς τὸ δωδεκαδικὸν σύστημα, διαιροῦμεν 8423 διὰ 12, διὰ τῆς ὁποίας πράξεως εὑρίσκομεν πηλικὸν 701 καὶ ὑπόλοιπον 11, τὸ ὁποῖον ἐκφράζει τὰς μονάδας τῆς πρώτης τάξεως τοῦ νέου συστήματος, ἀλλὰ 11 γραμ-

μένον εἰς τὸ δεκαδικὸν σύστημα σημαίνει ἕνδεκα, καὶ επομένως πρέπει νὰ ἐκφρασθῇ διὰ β′ εἰς τὸ δωδεκαδικὸν σύστημα.. Γράφομεν λοιπὸν κατὰ μέρος ὄχι πλέον 11, ἀλλὰ β′, ὡς ἐκφράζον τὸ ψηφίον τῶν μονάδων τῆς πρώτης τάξεως.

Παρομοίως εἰς τὴν τρίτην διαίρεσιν, συνάγομεν ὑπόλοιπον 10 ἢ δέκα, τὸ ὁποῖον εἰς τὸ νέον σύστημα ἐκφράζεται διὰ α′. Γράφομεν λοιπὸν α′ εἰς τὰ ἀριστερὰ τῶν δύο ἤδη εὑρεθέντων ψηφίων. Εὑρίσκομεν οὕτως (4α′5β′) τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν μεταφρασθέντα εἰς τὸ δωδεκαδικὸν σύστημα.

§. 122. Ἀντιστρόφως, ἀφ' οὗ γράφθῇ ὁποιοσδήποτε ἀριθμὸς εἰς σύστημα, τοῦ ὁποίου ἡ βάσις εἶναι β, δύναται νὰ προτεθῇ τὸ νὰ ἐκφράσωμεν αὐτὸν εἰς τὴν κοινὴν γλῶσσαν, ἢ, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ αὐτὸ, νὰ μεταφράσωμεν αὐτὸν εἰς τὸ δεκαδικὸν σύστημα.

Ἔστω ἐν γένει . . . . θηζδγα εἰς ἀριθμὸς γραμμένος εἰς τὸ σύστημα ἀπὸ β ψηφία, α, γ, δ, ζ . . . . ἐκφράζουσι τὰς μονάδας τῆς πρώτης, δευτέρας, τρίτης καὶ ἐφεξῆς τάξεως. Ἕπεται ἐκ τῆς θεμελιώδους ἀρχῆς, συσταθείσης εἰς τὸν ἀριθμὸν 118, ὅτι τὸ ψηφίον τὸ σημειωμένον διὰ τοῦ γ ἐκφράζει μονάδας β φοραῖς μεγαλητέρας παρὰ ἐὰν ἦτον μόνον του· λοιπὸν ἡ σχετική του τιμὴ εἶναι ἴση μὲ τὸ γινόμενον τοῦ γ ἐπὶ β, καὶ δύναται νὰ παῤῥησιασθῇ (ἀρ. 111) διὰ $\gamma\times\beta$ ἢ ἁπλῶς γβ. Παρομοίως τὸ ψηφίον δ ἐκφράζει μονάδας β φοραῖς μεγαλητέρας ἀπὸ τὸ ψηφίον γ. οὕτως ἡ σχετική του τιμὴ εἶναι ἴση μὲ τὸ γινόμενον τοῦ δ ἐπὶ $\beta\times\beta$ ἢ β^2, καὶ δύναται νὰ ἐκφρασθῇ διὰ $\delta\beta^2$.

Εὑρίσκομεν παρομοίως, ὅτι $\zeta\beta^3$, $\eta\beta^4$, $\vartheta\beta^5$.... εἶναι αἱ σχετικαὶ τιμαὶ τῶν ἄλλων ψηφίων· λοιπὸν ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς ἔχει ἔκφρασιν

$$\alpha+\beta\gamma+\delta\beta^2+\zeta\beta^3+\eta\beta^4+\vartheta\beta^5+ \text{κ. τ. λ.} \ldots$$

Καὶ δίδοντες εἰς τὴν βάσιν β, καὶ εἰς τὰ ψηφία α, γ, δ, ζ . . . . μερικὰς τιμάς, θέλομεν ἐκτελέσει εἰς τὸ δεκαδικὸν σύστημα ὅλας τὰς ἀριθμητικὰς ἐργασίας, τὰς ὁποίας παῤῥησιάζει ἡ τοιαύτη ἔκφρασις; καὶ οὕτω συνάγομεν τὸν εἰς ταῦτα τὰ μερικὰ δοθέντα ἀνταποκρινόμενον ἀριθμόν, καὶ μεταφρασμένον εἰς τὸ δεκαδικὸν σύστημα.

Προκείσθω π. χ. ὁ ἀριθμὸς (4367) γραμμένος εἰς τὸ σύστημα τὸ ὀκταδικόν, νὰ τραπῇ εἰς τὸ δεκαδικὸν σύστημα. Ὁ ἀριθμὸς οὗτος κατὰ τὴν προτέραν ἔκφρασίν δύναται νὰ λάβῃ τὴν ἀκόλουθόν μορφήν.

$$7+6\times8+3\times8^2+4\times8^3.$$

Ἔχομεν κατὰ πρῶτον 7 . . . . . $= 7$

καὶ . . . . 6×8 . . . . $= 48$

μετὰ ταῦτα 8^2, ἢ $8\times8=64$· λοιπὸν 3×8^2

$=3\times64$ . . . . $= 192$

τέλος πάντων $8^3=64\times8=512$· λοιπὸν $4\times$

$8^3=4\times512$ . . . . $=2048$

προσθέτοντες τούτους τοὺς ἀριθμοὺς εὑρίσκομεν 2295.

Τὸ κεφάλαιον 2295 εἶναι ἡ τιμὴ τοῦ (4367) μεταφρασμένου εἰς τὸ δεκαδικὸν σύστημα.

Δυνάμεθα νὰ βεβαιώσωμεν τὴν ἀκρίβειαν ταύτης τῆς πράξεως διὰ τοῦ κανόνός τοῦ ἀριθμοῦ 121

$$\begin{array}{r|r|r|r}
2295 & 8 & & \\
69 & 286 & 8 & \\
55 & 46 & 35 & 8 \\
7 & 6 & 3 & 4
\end{array} \qquad (4367).$$

Ἀντιστρόφως, τοῦτο ἐδῶ βεβαιοῦται διὰ τοῦ παρόντος κανόνος, τὸν ὁποῖον ἐκφράζομεν, ὡς ἀκολουθεῖ.

Σχημάτισε κατὰ πρῶτον τὰς διαφορετικὰς δυνάμεις τῆς βάσεως β, γραμμένας εἰς τὸ δεκαδικὸν σύστημα, πολλαπλασίασε μετὰ ταῦτα ὅλα τὰ ψηφία . . . . α, γ, δ, ζ, η, ϑ . . . . . γραμμένα παρομοίως εἰς τὸ δεκαδικὸν σύστημα, ἀμοιβαίως διὰ τῶν ἀριθμῶν 1, β, β^2, β^3, β^4, β^5 . . . . . καὶ μετὰ ταῦτα πρόσθες ὅλα τὰ μερικὰ γινόμενα, καὶ οὕτως θέλεις ἔχει τὸν ζητούμενον ἀριθμόν.

Προκείσθω προσέτι ἀριθμὸς (4α′ 5β′) γραμμένος εἰς τὸ δωδεκαδικὸν σύστημα (ἰδὲ ἀρ. 121) νὰ ἐκφρασθῇ εἰς τὸ δεκαδικὸν σύστημα (τὰ γράμματα α′ καὶ β′ ἐκφράζουν τοὺς ἀριθμοὺς δέκα καὶ ἕνδεκα). Ὁ ἀριθμὸς οὗτος βάλλεται κατὰ πρῶτον ὑπὸ τὴν μορφήν.

$$11+5\times 12+10\times 12^2+4\times 12^3$$

Ὅθεν ἔχωμεν.

1ον . . . . $11 = 11$

2ον . . . . $5\times 12 = 60$

3ον $12^2=144$· ὅθεν $10\times 12^2 = 144\times 10 = 1140$

4ον $12^3=144\times 12=1728$· λοιπὸν $4\times 12^3 = 6912$

8423.

Λοιπὸν (4α′5β′) ἰσοδυναμεῖ μὲ 8423 γραμμένον εἰς τὸ δεκαδικὸν σύστημα.

Σ. Κ. Ἡ ἔκφρασις $\alpha+\gamma\beta+\delta\beta^2+\zeta\beta^3+\eta\beta^4+\vartheta\beta^5$ κ.τ.λ. . . . καλεῖται εἰς τὴν ἄλγεβραν τύπος, ἐπειδὴ οὗτος περικλείει ὑπὸ σύντομον μορφὴν τὸ σύστημα τῶν ἀριθμητικῶν πράξεων, αἵτινες πρέπει νὰ ἐκτελεσθῶσιν ἐπὶ τῶν διαφόρων ἀριθμῶν, διὰ νὰ λύσωμεν γενικόν τι ζήτημα, καὶ νὰ δυνηθῶμεν νὰ ἐξάξωμεν ὅλους τοὺς ἀριθμούς, ὅταν ἔχωμεν ζητήματα τοῦ ἰδίου

εἴδους, τῶν ὁποίων ἡ ἔκφρασις διαφέρει μόνον κατὰ τὰς ἀριθμητικὰς τιμὰς τῶν δοθέντων.

§. 123. Οἱ προηγούμενοι δύο κανόνες μᾶς ἄγουσιν εἰς τρίτον ἄλλον πλέον γενικὸν, ὅστις ἔχει σκοπὸν νὰ φέρῃ ἀριθμὸν τινὰ ὁποιουδήποτε συστήματος, τοῦ ὁποίου ἡ βάσις εἶναι β, εἰς ἄλλο σύστημα, τοῦ ὁποίου ἡ βάσις εἶναι γ.

Πέρασε τὸν δεδομένον ἀριθμὸν ἐκ τοῦ συστήματος β εἰς τὸ σύστημα τὸ δεκαδικὸν, κατὰ τὸν κανόνα τοῦ ἀριθμοῦ 122. Μετὰ ταῦτα ἀπὸ τὸ δεκαδικὸν σύστημα εἰς τὸ σύστημα γ, κατὰ τὸν κανόνα τοῦ ἀριθμοῦ 120· καὶ οὕτως ἔχεις τὸ ζητούμενον ἐξαγόμενον.

Προκείσθω π. χ. νὰ περάσωμεν τὸν ἀριθμὸν (23104) τοῦ πενταδικοῦ συστήματος (ἢ ἀπὸ πέντε ψηφία) εἰς τὸ δωδεκαδικὸν σύστημα.

Λαμβάνομεν κατὰ πρῶτον διὰ τοῦτον τὸν ἀριθμὸν μεταμορφωθέντα εἰς τὸ δεκαδικὸν σύστημα 1654, μετὰ ταῦτα διὰ τοῦτον μεταμορφωθέντα εἰς τὸ δωδεκαδικὸν σύστημα (β'5'α). Βεβαιόνομεν δὲ τὴν πρᾶξιν ἐκτελοῦντες τὰς μεταμορφώσεις εἰς τάξιν ἀντίστροφον *).

§. 124. Οἱ τρόποι, διὰ τῶν ὁποίων ἐκτελοῦνται αἱ τέσσαρες θεμελιώδεις πράξεις τῆς ἀριθμητικῆς ἐπὶ ἀριθμῶν γραμμένων εἰς ὁποιονδήποτε σύστημα, δὲν διαφέρουν ἀπὸ ἐκείνας, τὰς ὁποίας ἐσυστήσαμεν διὰ τὸ δεκαδικὸν σύστημα· μόνον πρέπει νὰ ἐνθυμώμεθα καλὰ τὸν νόμον, ὅστις ὑπάρχει μεταξὺ τῶν μονάδων τῶν διαφόρων τάξεων, διὰ νὰ ἠμποροῦμεν κατὰ τὴν

*) Τουτέστι πράττομεν εἰς τὸν ἀριθμὸν (β'5α') τοῦ συστήματος γ κατὰ τὸν κανόνα 122 καὶ εὑρίσκομεν 1644. Μετὰ ταῦτα ἄγοντες τοῦτον εἰς τὸ σύστημα τῆς βάσεως β κατὰ τὸν κανόνα τοῦ ἀριθ. 120, εὑρίσκομεν (23104). Ὁ Μεταφραστής.

χρείαν νὰ τρέπωμεν τὰς μονάδας ὁποιασδήποτε τάξεως εἰς μονάδας τῆς ἀμέσως μεγαλητέρας, ἢ κατωτέρας τάξεως.

Διὰ νὰ λάβουν γύμνασιν οἱ ἀρχάριοι εἰς τὰ διάφορα συστήματα τῆς ἀριθμήσεως, θέλομεν προτάξει ἓν παράδειγμα ἑκάστης τῶν τεσσάρων πράξεων, αἱ ὁποῖαι πρέπει νὰ ἐκτελεσθῶσιν εἰς τὸ δωδεκαδικὸν σύστημα.

Ἂς ἐνθυμηθῶμεν δὲ, ὅτι εἰς τοῦτο τὸ σύστημα τὰ ψηφία εἶναι

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, α', β', 0,

(α' καὶ β' ἐκφράζουν δέκα καὶ ἕνδεκα).

1ον Ἂς προστεθῶσιν οἱ ἀριθμοὶ 3704α', β'2956, 27β'α'5, 48α'β'.

Κατὰ πρῶτον εὑρίσκομεν διὰ τὸ ἄθροισμα τῶν ἁπλῶν μονάδων τριάκοντα δύο, τουτέστι δύο δωδεκάδας πλέον 8 μονάδας· γράφομεν λοιπὸν 8 εἰς τὸν βαθμὸν τῶν μονάδων, καὶ κρατοῦμεν τὰς δύο διὰ νὰ τὰς φέρωμεν εἰς τὴν στήλην τῶν μονάδων τῆς δευτέρας τάξεως.	3704α' β'2956 27β'α'5 48α'β' ―――― 15α'678

Τὸ ἄθροισμα τῶν περιεχομένων μονάδων εἰς ταύτην τὴν δευτέραν στήλην εἶναι 31, ἢ 2 μονάδες τῆς τρίτης τάξεως, πλέον 7 μονάδες τῆς δευτέρας· γράφομεν λοιπὸν 7, καὶ κρατοῦμεν τὰς δύο, διὰ νὰ τὰς φέρωμεν εἰς τὴν ἀκόλουθον στῆλην.

Καὶ πράττοντες κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἐπὶ τῶν ἄλλων στηλῶν, λαμβάνομεν ἐξαγόμενον 15α'678.

	β' β'
2ον Ἔστω νὰ ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ .	5α'0046
ὁ ἀριθμὸς	47α'68β'
	12β77

Ἐπειδὴ δὲν δυνάμεθα νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸ β' ἢ 11 ἀπὸ τὸ 6, δανειζόμεθα ἀπὸ τὸ ψηφίον 4 μίαν μονάδα, ἥτις ἰσοδυναμεῖ μὲ 12 τῆς ἀκολούθου τάξεως, ὥστε ἔχομεν 18, καὶ λέγομεν 11 ἀπὸ 18 μένει 7.

Περνῶντες εἰς τὴς ἀκόλουθον ἀφαίρεσιν, ἐπειδὴ δὲν δυνάμεθα νὰ ἀφαιρέσωμεν 8 ἀπὸ 3, δανειζόμεθα μίαν μονάδα ἀπὸ τὸ κατ' ἀριστερὰν σημαντικὸν ψηφίον, ὅταν εὑρίσκεται μηδενικόν. Αὕτη ἰσοδυναμεῖ μὲ 12 ἢ 11 πλέον 1 τῆς ἀκολούθου τάξεως· αὕτη ἰσοδυναμεῖ μὲ 11 πλέον 1 τῆς ἀκολούθου αὐτῆς τάξεως. Τέλος πάντων αὐτὴ ἡ τελευταία ἰσοδυναμεῖ μὲ δώδεκα ἀπὸ ἐκείνας ἐπὶ τῶν ὁποίων ἐργαζόμεθα, καὶ λέγομεν 12 καὶ 3 κάμνουν 15; 8 ἀπὸ 15 μένουν 7.

Εἰς τὰς ἀκολούθους δύο ἀφαιρέσεις, θεωροῦμεν ἀντὶ τῶν μηδενικῶν ἀντεισαγμένα τὰ 11 ἢ β', καὶ ἐξακολουθοῦμεν τὴν πρᾶξιν οὕτως ἕως εἰς τὸ τέλος, εὑρίσκομεν δὲ ἐξαγόμενον 121577. Τοῦτο βεβαιοῦται προστιθεμένου τοῦ μικροτέρου ἀριθμοῦ εἰς τὸ ὑπόλοιπον.

Ἂς πολλαπλασιασθῇ 3407α' ἐπὶ 5α'68.

Ὑποθέτομεν, ὅτι ἔχομεν ὑπὸ τὰ βλέμματα πίνακα πολλαπλασιασμοῦ ἐκτεινόμενον ἕως εἰς 11 ἢ β', τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ μεγαλήτερον ψηφίον τοῦ συστήματος.

Λοιπὸν πολλαπλασιάζομεν κατὰ πρῶτον 3407α' ἐπὶ 8, καὶ λέγομεν 8 φοραῖς α' ἢ δέκα δίδουσιν 80, ὀγδοῆντα, ἢ 6 δωδεκάδες καὶ 8 μονάδες τῆς πρώτης τάξεως, γράφομεν 8 καὶ κρατοῦμεν 6. Μετὰ ταῦτα 8 φοραῖς 7 δίδουσι πεντήκοντα ἕξ, καὶ 6 τὰ κρατηθέντα, κάμνουσιν ἑξήκοντα δύο, ἢ 5 μονάδες τῆς τρίτης τάξεως καὶ δύο τῆς δευτέρας, τὰς ὁποίας γράφομεν εἰς τὸν βαθμὸν τούτων τῶν μονάδων· κρατοῦμεν δὲ 5 διὰ νὰ τὰς φέρωμεν εἰς τὸ γινόμενον τῶν μο-

```
   3407α'
    5α'68
 --------
   228528
  1803β0
 294664
148332
---------
17760882 8
```

νάδων τῆς τρίτης τάξεως. Ἐξακολουθοῦντες οὕτω τὴν ἐργασίαν λαμβάνομεν μερικὸν γινόμενον 728528· ὅσον δὲ διὰ τὰ γινόμενα τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐπὶ τὰ ἄλλα ψηφία τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, ἀποδείχνομεν διὰ συλλογισμῶν ἀναλόγων, μὲ τοὺς ὁποίους ἐκφράσαμεν (ἀρ. 121) διὰ τὸ δεκαδικὸν σύστημα, ὅτι πρέπει καὶ ἐδῶ νὰ πολλαπλασιάσωμεν διαδοχικῶς τὸν πολλαπλασιαστιαστέον ἐφ' ἕκαστον τῶν ψηφίων τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, θεωρουμένων ὡς ἁπλῶν μονάδων, καὶ νὰ γράφωμεν τὰ γινόμενα ὑπὸ τὸ προηγούμενον, προχωροῦντές τα μίαν τάξιν πρὸς τὰ ἀριστερὰ, καὶ τέλος πάντων προσθέτοντες ὅλα ταῦτα τὰ γινόμενα, εὑρίσκομεν τὸ ὁλκὸν γινόμενον 17760882́8.

4ον. Βεβαιόνομον δὲ ταύτην τὴν πρᾶξιν διὰ τῆς διαιρέσεως· πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν τὸ ληφθὲν γινόμενον δι' ἑνὸς τῶν παραγόντων. π. χ. τοῦ 5ά68.

```
17760882́8 | 5ά68
           |------
           | 3407ά
1β́ά08
 3ά082
  4ά968
   0000
```

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ψηφίον τῶν ἀνωτέρων μονάδων τοῦ πηλίκου, πρέπει νὰ λάβωμεν τὰ πρῶτα πέντε ψηφία εἰς τὰ ἀριστερὰ τοῦ διαιρετέου, καὶ νὰ διαιρέσωμεν 1776ο διὰ 5ά68, διὰ τοῦτο ζητοῦμεν εἰς τὸ 17 ἢ 19, ποσάκις εἰσέρχεται τὸ 5· εἰσέρχεται δὲ τρεῖς φοραῖς. Λοιπὸν γράφομεν 3 εἰς τὸ πηλίκον. Πολλαπλασιάζοντες τὸν διαιρέτην διὰ 3, καὶ ἀφαιροῦντες τὸ γινόμενον ἐκ τοῦ πρώτου μερικοῦ διαιρετέου, λαμβάνομεν ὑπόλοιπον 1β́ά0, τὸ ὁποῖον ἀκο-

λουθούμενον ἐκ τοῦ ψηφίου 8, δίδει 1β'α'08, δεύτερον μερικὸν διαιρετέον, ἐπὶ τοῦ ὁποίου πράττομεν, ὡς ἐπὶ τοῦ προηγουμένου.

Διαιροῦντες 1β'α'08 διὰ 5α'68 ἢ 1β' διὰ 5, τουτέστι 23 διὰ 5 ἔχομεν πηλίκον 4, τὸ ὁποῖον γράφομεν εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ προηγουμένου, καὶ ὑπόλοιπον 3α'0· καὶ ἐπειδὴ καταβιβασθέντος τοῦ ἀκολούθου ψηφίου, ὁ νέος μερικὸς διαιρετέος 3α'08 δὲν περιέχει τὸν διαιρέτην, θέτομεν 0 εἰς τὸ πηλίκον, καὶ κατεβάζομεν τὸ ψηφίον 2 τοῦ διαιρετέου, ὥστε συνάγομεν 3α'082 νέον μερικὸν διαιρετέον.

Καὶ ἐκτελοῦντες ἐπὶ τούτου, ὡς ἐπὶ τῶν προηγουμένων εὑρίσκομεν πηλίκον 7, καὶ ὑπόλοιπον 4α'96. Τέλος πάντων καταβιβάζοντες τὸ τελευταῖον ψηφίον τοῦ διαιρετέου, καὶ διαιροῦντες 4α'0968 διὰ 5α'68 εὑρίσκομεν α' πηλίκον, καὶ 0 ὑπόλοιπον.

Λοιπὸν 3407α' εἶναι τὸ ζητούμενον πηλίκον *).

Ὑποχρεόνομεν δὲ τοὺς ἀρχαρίους νὰ γυμνασθῶσι καὶ μὲ ἄλλα παραδείγματα λαμβανόμενα κατὰ τύχην, καὶ ἐπὶ διαφόρων συστημάτων, μάλιστα ἐπὶ τῶν δύο τελευταίων ἐργασιῶν. Ἡ τοιαύτη γύμνασις θέλει τοὺς γυμνάσει ἐξαίρετα εἰς τὸν ὑπολογισμόν.

§. 125. Τὸ ζήτημα τοῦ ἀριθμοῦ 123, τὸ ὁποῖον ἔχει σκοπὸν νὰ περάσῃ ἀριθμός τις ἀπὸ ὁποιονδήποτε σύστημα β εἰς ἓν ἄλλο σύστημα γ, δύναται νὰ λυθῇ

---

*) 17760 διαιρεῖται διὰ τοῦ 5α'68. Οὕτως 5 εἰς 17 δίδει 3, πολλαπλασιάζομεν 3 ἐπὶ 5α'68· πράττομεν δὲ οὕτως· 3 φοραῖς 8 δίδει 24 ἢ 2 δωδεκάδες· 3 φοραῖς 6 δίδει 18 καὶ 2 δίδει 20 δωδεκάδας, ἢ 1 μονάδα τῆς τρίτης τάξεως, καὶ 8 δωδεκάδας· 3 φοραῖς α' δίδει 30 τῆς τρίτης τάξεως καὶ 1 τὸ κρατηθὲν σχηματίζουν 31 ἢ 2 τῆς τετάρτης καὶ 7 τῆς τρίτης· πάλιν 3 φοραῖς 5 κάμνουν 15 τῆς τετάρτης, καὶ 2 τὰ κρατηθέντα κάμνουν 17 ἢ 1 τῆς πέμπτης, καὶ 5 τῆς τετάρτης, ὥστε τὸ γινόμενον εἶναι 15780. Ὁ Μεταφραστής.

κατ' εὐθεῖαν, τουτέστι χωρὶς νὰ ἔχωμεν ἀνάγκην να περάσωμεν κατὰ πρῶτον ἐκ τοῦ συστήματος β εἰς τὸ δεκαδικὸν σύστημα, καὶ μετὰ ταῦτα ἀπὸ τοῦτο εἰς τὸ σύστημα γ. Ἀρκεῖ τῷ ὄντι νὰ μεταφράσωμεν τὴν βάσιν γ εἰς τὸ σύστημα β, καὶ νὰ ἐφαρμόσωμεν τὸν κανόνα τοῦ ἀριθμοῦ 121 ἐκτελοῦντες τὰς πράξεις εἰς τὸ ἴδιον σύστημα.

Οὕτως διὰ νὰ απεράσωμεν τὸν (23104) (ὅρα ἀρ. 123) τοῦ πενταδικοῦ συστήματος εἰς τὸ δωδεκαδικὸν, πρέπει (ἀρ. 121) νὰ διαιρέσωμεν 23104 διὰ 22 ἢ δώδεκα γραμμένον εἰς τὸ πενταδικὸν σύστημα, καὶ νὰ κάμωμεν τὴν διαίρεσιν εἰς τοῦτο τὸ σύστημα· ἐντεῦθεν λαμβάνομεν ὑπόλοιπον, τὸ ὁποῖον θέλει ἐκφράζει τὰς μονάδας τῆς πρώτης τάξεως εἰς τὸ δωδεκαδικὸν σύστημα, καὶ πηλίκον, τὸ ὁποῖον διαιροῦμεν ἀκόμη διὰ τοῦ δώδεκα ἢ 22, διὰ νὰ ἐξάξωμεν τὰς μονάδας τῆς δευτέρας τάξεως, καὶ οὕτως ἐφεξῆς *).

---

*) Ἐπειδὴ θέλομεν νὰ τρέψωμεν τὸν ἀριθμὸν τοῦ συστήματος β εἰς ἀριθμὸν συστήματος γ, εἶναι φανερὸν, ὅτι ἐὰν θεωρήσωμεν τὸν ἀριθμὸν τοῦ συστηματος β ἠγμένον εἰς ἁπλᾶς μονάδας, καὶ διαιρέσωμεν αὐτὰς διὰ τῶν μονάδων, τὰς ὁποίας περιέχει ἡ βάσις γ, θέλομεν εὑρεῖ πηλίκον ἐκφράζον μονάδας γ φοραῖς μεγαλητέρας ἀπὸ τὰς ἁπλᾶς μονάδας, τουτέστι μονάδας τῆς δευτέρας τάξεως τοῦ συστήματος γ, καὶ τὸ ὑπόλοιπον μὴ σχηματίζον γ μονάδας, θέλει ἐκφράζει τὰς μονάδας τῆς πρώτης τάξεως τοῦ συστήματος γ. Ἐὰν τώρα διαιρέσωμεν τὸ εὑρεθὲν πηλίκον, ἢ τὰς μονάδας τῆς δευτέρας τάξεως, διὰ τοῦ συστήματος γ, ἤγουν διὰ τοῦ ἰδίου διαιρέτου, θέλομεν εὕρει τὰς μονάδας τῆς τρίτης τάξεως τοῦ συστήματος γ, καὶ τὸ ὑπόλοιπον ἐκφράζει ἐκείνας τῆς δευτέρας, καὶ οὕτως ἐφεξῆς. Ἀλλ' ὁ ἀριθμὸς τοῦ συστήματος β ἠγμένος εἰς τὰς ἁπλᾶς του μονάδας, εἶναι ἴσος μὲ τὰς μονάδας τῆς πρώτης τάξεως, τῆς δευτέρας καὶ ἐφεξῆς. Διὰ τοῦτο ἀντὶ νὰ διαιρέσωμεν αὐτὸν οὕτως ἠγμένον, διαιροῦμεν ξεχωριστὰ τὰς μονάδας τῶν διαφόρων τάξεών του, διὰ τοῦ διαιρέτου, ὅστις ἔχει τόσας μονάδας, ὅσα ψηφία ἔχει τὸ σύστημα γ· ἐπειδὴ διὰ νὰ διαιρέσωμεν ἀριθμὸν δι' ἄλλου εἶναι ἀνάγκη νὰ γράψωμεν τὸν διαιρετέον καὶ διαιρέ-

Δὲν προχωροῦμεν περαιτέρω εἰς ταύτας τὰς πράξεις, αἱ ὁποῖαι δὲν προσφέρουν καμμίαν δυσκολίαν.

§. 126. Γενικὴ παρατήρησις. Τὸ δωδεκαδικὸν σύστημα προσφέρει κάποιαν ὠφέλειαν ἐπάνω εἰς τὸ δεκαδικὸν σύστημα, ἐπειδὴ ἡ βάσις τοῦ δώδεκα περιέχει μεγαλήτερον ἀριθμὸν παραγόντων ἀπὸ τὸ 10. Τῷ ὄντι δώδεκα διαιρεῖται διὰ 2, 3, 4, 6, ἐν ᾧ οἱ μόνοι παράγοντες τοῦ 10 εἶναι τὸ 2 καὶ 5.

Μ' ὅλον τοῦτο εἶναι ἀδύνατον νὰ ἀντεισάξωμεν τὸ δωδεκαδικὸν σύστημα, ἢ κάθε ἄλλο ἀντὶ τοῦ δεκαδικοῦ, χωρὶς νὰ ἀντικαταστήσωμεν ἀντὶ τῆς παλαιᾶς ὀνοματολογίας μίαν νέαν ἀναλογωτέραν εἰς τὸ παραδεχθησόμενον σύστημα, καὶ ἐκφράζουσαν εὐκολώτερον τοὺς διὰ ψηφίων γεγραμμένους ἀριθμούς.

Θέλομεν δὲ πολλάκις ἰδεῖ, ὅτι αἱ πλειότεραι ἰδιότητες ἀφ' ὅσας ἀνεκαλύψαμεν τῶν ἀριθμῶν, εἶναι πάντοτε ἀληθεῖς, ὁποιονδήποτε καὶ ἂν ἦναι τὸ σύστημα, τὸ ὁποῖον παραδεχόμεθα. Μερικαὶ θέλουν φανῆ, ὅτι ἀνήκουσι μόνον εἰς τὸ δεκαδικὸν σύστημα· ἀλλ' αἱ ἀνάλογοι τούτων ὑπάρχουσιν ἐπίσης καὶ εἰς τὰ ἄλλα συστήματα.

Ἡ χρῆσις τῶν γραμμάτων τοῦ ἀλφαβήτου πρὸς παράστασιν τῶν ἀριθμῶν, εἶναι πολλὰ ἐπιτηδεία εἰς τὸ νὰ ἐξάξωμεν τὴν γενικότητα τούτων τῶν ἰδιοτήτων, ἐπειδὴ δύνανται νὰ παῤῥησιάζωσιν ἀριθμοὺς προφερο-

---

την διὰ ψηφίων, καὶ ὄντος τοῦ διαιρετέου γραμμένου εἰς τὸ σύστημα β, ἀνάγκη εἶναι νὰ γράψωμεν καὶ τὸν διαιρέτην μὲ τὰ ψηφία τοῦ ἰδίου συστήματος, τουτέστι τὸν ἀριθμὸν, ὅστις ἐκφράζει πόσα ψηφία ἔχει τὸ ἄλλο σύστημα, ἢ τὸν ὅστις ἔχει τόσας μονάδας, ὅσας ἐκφράζει ἡ βάσις γ. Οὕτως λοιπὸν, ἀριθμὸν τινὰ τοῦ πενταδικοῦ συστήματος, θέλοντες νὰ τρέψωμεν εἰς τὸ δωδεκαδικὸν σύστημα, πρέπει νὰ γράψωμεν τὸ 12 διὰ τῶν ψηφίων τοῦ πενταδικοῦ συστήματος, ἢ εἰς τὸ πενταδικὸν σύστημα, ἤγουν διὰ 22. Ὁ Μεταφραστής.

μένους, ἢ ἐκφραζομένους εἰς ὁποιονδήποτε σύστημα ἀριθμήσεως.

§. β'. Ἀρχαὶ περὶ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ καὶ τῆς Διαιρέσεως.

Διαιρετότης τῶν ἀριθμῶν.

§. 127. Ἀπεδείξαμεν ἤδη εἰς τὸν ἀριθμὸν 25 καὶ 26 1ον ὅτι τὸ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀριθμὸν ἐπὶ γινόμενον δύο ἢ περισσοτέρων παραγόντων, εἶναι τὸ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμὸν τοῦτον ἐφ' ἕκαστον τῶν παραγόντων διαδοχικῶς.

2ον Ὅτι τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν εἶναι τὸ αὐτὸ, εἰς ὁποίαν τάξιν ἐκτελεσθῇ ὁ πολλαπλασιασμός.

Μ' ὅλον ὅτι οἱ συλλογισμοὶ ἐσαφηνίσθησαν διὰ μερικῶν ἀριθμῶν, εἶναι ὅμως ἐπίσης γενικοὶ, καὶ διὰ νὰ τοὺς βεβαιωθῶμεν, ἀρκεῖ νὰ τοὺς ἐπαναλάβωμεν, γράφοντές τους διὰ τῶν γραμμάτων α, β, γ, δ . . .

Πρόκειται λοιπὸν μόνον νὰ βεβαιώσωμεν τὴν ἀκρίβειαν τῆς δευτέρας προτάσεως, ὁποῖος καὶ ἂν ἦναι ὁ ἀριθμὸς τῶν παραγόντων, τοὺς ὁποίους μέλλομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν μεταξύ των.

Κατ' ἀρχὰς ἂς παρατηρήσωμεν, ὅτι ἐὰν εἴχαμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀριθμόν τινὰ Ν ἐπὶ β, καὶ νὰ πολλαπλασιάσωμεν μετὰ ταῦτα τὸ ἐξαγόμενον γινόμενον ἐπὶ γ, ἔπρεπε παρομοίως νὰ πολλαπλασιάσωμεν κατὰ πρῶτον τὸ Ν ἐπὶ γ, καὶ μετὰ ταῦτα τὸ ἐξαγόμενον γινόμενον ἐπὶ β.

Ἢ κατ' ἄλλον τρόπον, εἰς ἕνα πολλαπλασιασμὸν περισσοτέρων ἀπὸ δύο παράγοντας, δυνάμεθα νὰ ἀλλάξωμεν τὴν τάξιν τῶν δύο τελευταίων πολλαπλασιασμῶν, χωρὶς νὰ ἀλλάξωμεν τὸ γινόμενον.

Ἢ διὰ νὰ ὁμιλήσωμεν ἀλγεβραϊκῶς $N\times\beta\times\gamma=N\times\gamma\times\beta$. Τῷ ὄντι προκύπτει ἐκ τῆς προειρημένης πρώτης ἀρχῆς, ὅτι $N\times\beta\times\gamma=N\times\beta\gamma$ (τὸ $\beta\gamma$ ἐκφράζει τὸ ἐκτελούμενον γινόμενον δύο ἀριθμῶν β καὶ γ, (ὅρα. Σ. Κ. τοῦ ἀρ. 111). ἀλλὰ κατὰ τὴν δευτέραν ἀρχὴν, ἔχομεν $\beta\gamma=\gamma\beta$, λοιπὸν $N\times\beta\times\gamma=N\times\gamma\beta$, ἢ κατὰ τὴν πρώτην ἀρχὴν $N\times\beta\times\gamma=N\times\gamma\times\beta$, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ἐκ τῆς παρεμπεσούσης ταύτης προτάσεως, καὶ ἐκ τῆς προτάσεως, ὅτι τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν εἶναι τὸ αὐτὸ εἰς ὁποιανδήποτε τάξιν, καὶ ἐφεξῆς . . . . . μὲ εὐκολίαν ἐξάγομεν τὴν ἰδίαν πρότασιν καὶ διὰ τρεῖς.

Ἔστωσαν α, β, γ οἱ προβαλλόμενοι ἀριθμοί.

Λέγω, ὅτι ἔχομεν $\alpha\beta\gamma=\beta\alpha\gamma=\beta\gamma\alpha=\gamma\beta\alpha=\gamma\alpha\beta$ $\alpha\gamma\beta$.

Τῷ ὄντι τὸ δεύτερον γινόμενον εἶναι ἴσον μὲ τὸ πρῶτον, κατὰ τὴν διὰ δύο παράγοντας πρότασιν· τὸ τρίτον εἶναι ἴσον μὲ τὸ δεύτερον, κατὰ τὴν παρεμπεσοῦσαν πρότασιν· τὸ τέταρτον ἴσον μὲ τὸ τρίτον κατὰ τὴν διὰ δύο παράγοντας πρότασιν· τὸ πέμπτον εἶναι ἴσον μὲ τὸ τέταρτον, κατὰ τὴν παρεμπεσοῦσαν πρότασιν. Τέλος πάντων τὸ ἕκτον εἶναι ἴσον μὲ τὸ πέμπτον· κατὰ τὴν πρότασιν δύο παραγόντων. Λοιπὸν ὅλα ταῦτα τὰ γινόμενα εἶναι ἴσα.

Ἐκ τῆς παρεμπεσούσης προτάσεως, καὶ ἐκ τῆς προτάσεως διὰ τρεῖς παράγοντας, ἐξάγομεν μὲ τὴν ἰδίαν εὐκολίαν τὴν πρότασιν διὰ τέσσαρας.

Ἔστωσαν α, β, γ, δ οἱ προβαλλόμενοι ἀριθμοί,
Λέγω, ὅτι ἔχομεν $\alpha\beta\gamma\delta=\beta\alpha\delta\gamma=\beta\gamma\alpha\delta=\gamma\beta\alpha\delta=\gamma\alpha\beta\delta=\alpha\gamma\beta\delta$
$=\alpha\beta\delta\gamma$ . . . . . .
$=\beta\gamma\delta\alpha$ . . . . . .
$=\gamma\alpha\delta\beta$ . . . . . .

Κατὰ πρῶτον τὰ ἓξ γινόμενα τῆς πρώτης ὁριζοντίου γραμμῆς εἶναι ἴσα μεταξύ των, κατὰ τὴν πρότα-

σιν διὰ τρεῖς παράγοντας, διότι προκύπτουν ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν γινομένων αβγ, βαγ . . . . . διὰ τοῦ ἰδίου παράγοντος δ.

Τὸ πρῶτον γινόμενον τῆς δευτέρας γραμμῆς εἶναι ἴσον μὲ τὸ πρῶτον γινόμενον τῆς πρώτης, κατὰ τὴν παρεμπεσοῦσαν πρότασιν· τὰ δὲ ἄλλα γινόμενα ταύτης τῆς γραμμῆς, τὰ ὁποῖα δὲν ἐγράψαμεν, σχηματίζονται, φυλαττομένου πάντοτε τοῦ γράμματος γ, εἰς τὴν τελευταίαν θέσιν, καὶ εἶναι ὅλα ἴσα, κατὰ τὴν διὰ τρεῖς παράγοντας πρότασιν.

Τὸ πρῶτον γινόμενον τῆς τρίτης γραμμῆς εἶναι ἴσον μὲ τὸ τρίτον γινόμενον τῆς πρώτης, κατὰ τὴν παρεμπεσοῦσαν πρότασιν, καὶ τὰ ἄλλα γινόμενα ταύτης τῆς γραμμῆς εἶναι ἴσα μ' ἐκεῖνα, κατὰ τὴν διὰ τρεῖς παράγοντας πρότασιν.

Τέλος πάντων τὸ πρῶτον γινόμενον τῆς τετάρτης γραμμῆς εἶναι ἴσον μὲ τὸ πέμπτον γινόμενον τῆς πρώτης, κατὰ τὴν παρεμπεσοῦσαν πρότασιν, καὶ ὅλα τὰ γινόμενα ταύτης τῆς γραμμῆς εἶναι ἴσα, κατὰ τὴν διὰ τρεῖς παράγοντας πρότασιν. Οὕτως συνάγομεν ὅλα τὰ γινόμνα τῶν τεσσάρων παραγόντων α, β, γ, δ, ἐπειδὴ δὲν δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν ἄλλα, παρὰ ἓξ γινόμενα τελευτῶντα εἰς τὸ αὐτὸ γράμμα. Ὁ ἀριθμὸς τῶν γινομένων ἀνὰ τέσσαρα εἶναι ἴσος μὲ 4 φοραῖς 6 ἢ 24 *).

Σ. Κ. Μὲ εὐκολίαν γνωρίζομεν, ὅτι τὰ δύο πρῶτα γινόμενα ἑκάστης τῶν τριῶν τελευταίων γραμ-

---

*) Σχηματίζονται μὲ τέσσαρα ψηφία μόνον ἓξ γινόμενα, τὰ ὁποῖα ἔχουσι τελευταῖον παράγοντα τὸ τέταρτον ψηφίον, ἐπειδὴ ἀμελουμένου τοῦ τετάρτου παράγοντος, οἱ τρεῖς πρῶτοι παράγοντες δίδουν ἓξ γινόμενα καὶ προσθέτοντες τὸν τέταρτον παράγοντα εἰς τὸ τέλος ἑκάστου γινομένου, συνάγομεν πάλιν ἓξ γινόμενα ἀπὸ τέσσαρας παράγοντας ἕκαστον. Ὁ Μεταφραστής.

μῶν λαμβάνονται, ἀφ' οὗ θεωρηθῶσι τὰ γινόμενα τῆς πρώτης γραμμῆς, εἰς τὰ ὁποῖα τὸ παραλῆγον γινόμενον εἶναι διαφορετικὸν, ἐπειδὴ τότε ἀπερνοῦμεν τὸν παράγοντα εἰς τὴν τελευταίαν θέσιν, κατὰ τὴν παρεμπεσοῦσαν πρότασιν.

Μ' ὅλον ὅτι ἡ τοιαύτη ἀπόδειξις δύναται νὰ ἐκτανθῇ εἰς ὁποιονδήποτε ἀριθμὸν παραγόντων· εἶναι ὅμως ὠφέλιμον νὰ ἐξάξωμεν τὴν γενικότητάτης.

Διὰ νὰ ἀποδείξωμεν, ὅτι τὸ γινόμενον ἑνὸς ὁποιουδήποτε ἀριθμοῦ παραγόντων μένει τὸ αὐτὸ, εἰς ὁποιανδήποτε τάξιν ἐκτελεσθῇ ὁ πολλαπλασιασμός· θέλομεν δείξει, ὅτι ἐὰν ἡ ἀρχὴ ἦναι ἀληθὴς δι' ἕνα ἀριθμὸν μ παραγόντων, θέλει εἶναι παρομοίως ἀληθὴς διὰ τὸν ἀριθμὸν μ+1. Ἡ ἀρχὴ θέλει ἀποδειχθῆ παρομοίως, ἐπειδὴ μετὰ τὴν ἀλήθευσίν της διὰ δύο παράγοντας, θέλει ἀληθεύσει καὶ διὰ τρεῖς, καὶ ἐὰν ἀληθεύσῃ διὰ τρεῖς, θέλει ἀληθεύσει καὶ διὰ τέσσαρας κ. τ. λ.

Ἔστω λοιπὸν ἀριθμός τις μ+1 παραγόντων α, β, γ, δ . . . . κ, ρ, σ· καὶ ἐπειδὴ ἡ ἀρχὴ ὑπετέθη ἀληθὴς διὰ ἕνα ἀριθμὸν μ παραγόντων, δυνάμεθα νὰ ἀλλάξωμεν καθ' ὅλους τοὺς τρόπους τὴν τάξιν τῶν μ πρώτων παραγόντων α, β, γ, δ . . . κ, ρ, πολλαπλασιάζοντες ὅλα τὰ οὕτω ληφθέντα ἴσα γινόμενα ἐπὶ τοῦ σ, καὶ οὕτως σχηματίζομεν ὅλα τὰ γινόμενα τῶν μ+1 παραγόντων, τελευτώντων, εἰς τὸν παράγοντα σ. Ταῦτα δὲ τὰ τελευταῖα γινόμενα θέλουν εἶναι ἐπίσης ἴσα· ἀλλ' ἔχομεν ἐκ τῆς παρεμπεσούσης προτάσεως,

αβγδ . . . . . κρσ=αβγδ . . . . κσρ·

καὶ ἀλλάττοντες κατὰ πάντα τρόπον τοὺς μ πρώτους παράγοντας τοῦ δευτέρου ἀριθμοῦ ταύτης τῆς ἰσότητος, ἔπειτα πολλαπλασιάζοντες τὸ γινόμενον ἐπὶ

ρ, λαμβάνομεν νέαν σειρὰν γινομένων ὅλων ἴσων μεταξύ των καὶ μὲ τὰ προηγούμενα, εἰς τὰ ὁποῖα ὁ παράγων ρ, ἐπέχει τὴν τελευταίαν θέσιν, θέλομεν ἔχει ἀκόμη,

αβγδ . . . κρσ = αβγδ . . . ρκσ = αβγδ . . . ρσκ· καὶ δυνάμεθα ἐκ τούτου τοῦ τελευταίου γινομένου νὰ ἐξάξωμεν ὅλα τὰ ἴσα γινόμενα, εἰς τὰ ὁποῖα ὁ παράγων κ ἐπέχει τὴν τελευταίαν θέσιν.

Ἐν ἑνὶ λόγῳ, ἐπειδὴ δυνάμεθα νὰ περάσωμεν οὕτως ἕκαστον τῶν μ+1 παραγόντων κατὰ διαδοχὴν εἰς τὴν προτελευταίαν θέσιν, καὶ μετὰ ταῦτα εἰς τὴν τελευταίαν, καὶ νὰ μεταλλάξωμεν καθ' ὅλους τοὺς τρόπους τοὺς μ+1 πρώτους παράγοντας, ἕπεται, ὅτι τὰ γινόμενα τῶν μ+1 παραγόντων πολλαπλασιαζομένων μεταξύ των εἰς ὁποιανδήποτε τάξιν, εἶναι ὅλα ἴσα μεταξύ των, λοιπὸν κ. τ. λ.

§. 128. Σ. Κ. Οὗτος ὁ τρόπος τοῦ ἀποδεικνύειν μίαν πρότασιν, βεβαιωθεῖσαν πρότερον εἰς μερικὰς περιστάσεις, εἶναι πολὺ εὔχρηστος εἰς τὰ διάφορα μέρη τῆς μαθηματικῆς. Μ' ὅλον τοῦτο πρέπει νὰ τὸν μεταχειριζώμεθα, ἀφ' οὗ οἱ προηγούμενοι συλλογισμοὶ μᾶς ἔπεισαν σχεδὸν διὰ τὴν γενικότητα τῆς προτάσεως.

Τὸ ἄθροισμα τῶν συλλογισμῶν, οἱ ὁποῖοι γίνονται εἰς μερικὰς περιστάσεις καλεῖται μέθοδος δείξεως ἐξ ἀναλογίας, ἢ ἐξ ἐπαγωγῆς· εἶναι δὲ πλήρης, ὅταν ἀκολουθῆται ἀπὸ ὁμοίαν τῇ προτεθείσῃ ἀπόδειξιν. Πρέπει προσέτι οἱ συλλογισμοὶ ταύτης νὰ πλησιάζωσι κατὰ τὴν μορφήν τους εἰς μερικὰς περιστάσεις ἀναπτυχθέντας συλλογισμούς.

§. 129. Ἡ ἀπόδειξις τῆς προειρημένης ἀρχῆς ὑποθέτει, ὅτι οἱ ἀριθμοί, ἐπὶ τῶν ὁποίων συλλογιζόμεθα, εἶναι ἀκέραιοι (ἀρ. 21 καὶ 26)· ἀλλ' ἐὰν σκεφθῶμεν ὀλίγον ἐπάνω εἰς τοὺς συσταθέντας κανόνας

διὰ τὸν πολλαπλασιασμὸν τῶν κλασμάτων, θέλομεν καταλάβει, ὅτι ἡ ἰδιότης αὕτη ἐφαρμόζεται ἐπίσης καὶ εἰς κλασματικοὺς ἀριθμούς.

Προσέτι αὕτη ἡ πρότασις πληροῖ τὴν ἀπόδειξιν συσταθείσης ἀρχῆς (ἀρ. 43) περὶ τῆς ἀναγωγῆς τῶν κλασμάτων εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστήν.

Διαιρετότης τῶν ἀριθμῶν.

§. 130. Ἡ ἰδιότης τινῶν ἀριθμῶν νὰ διαιρῶνται ἐντελῶς δι' ἄλλων καὶ ἡ ἀναζήτησις τῶν διαιρετῶν ἑνὸς ἀριθμοῦ, σχηματίζουσι μίαν ἀπὸ τὰς πλέον ἀξιολόγους θεωρίας τῆς ἀριθμητικῆς.

Αὕτη δὲ ἐπιστηρίζεται ἐπὶ μιᾶς σειρᾶς ἀρχῶν, τῶν ὁποίων ἡ ἔκθεσις ἀπαιτεῖ μεγάλην τάξιν, θέλομεν δὲ τὰς ἀναπτύξει διαδοχικῶς.

Προοιμιώδεις ὁρισμοί. Λέγομεν, ὅτι ἀκέραιός τις ἀριθμὸς εἶναι ἀκριβῶς δι' ἄλλου διαιρετὸς, ὅταν ὑπάρχῃ τρίτος ἄλλος ἀκέραιος ἀριθμὸς, ὅστις πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν δεύτερον δίδει τὸν πρῶτον.

Πᾶς ἀκέραιος ἀριθμὸς, ὅστις διαιρεῖ ἀκριβῶς ἄλλον, καλεῖται παράγων, ἢ διαιρέτης, ἢ ὑποπολλαπλάσιος τοῦ ἀριθμοῦ τούτου, καὶ οὗτος καλεῖται πολλαπλάσιος τοῦ πρώτου.

Πᾶς ἀκέραιος ἀριθμὸς, ὅστις δὲν ἔχει ἄλλον διαιρέτην παρὰ τὸν ἑαυτόν του, ἢ τὴν μονάδα καλεῖται πρῶτος ἀπόλυτος ἀριθμὸς, ἢ πρῶτος.

Δύο ἀκέραιοι ἀριθμοὶ καλοῦνται πρῶτοι μεταξύ των, ὅταν δὲν ἔχωσιν ἄλλον κοινὸν διαιρέτην, παρὰ τὴν μονάδα, ἥτις εἶναι διαιρέτης ὅλων τῶν ἀριθμῶν.

Ἐντεῦθεν προκύπτει, ὅτι εἷς πρῶτος ἀριθμὸς, ὅστις δὲν διαιρεῖ ἀκριβῶς ἄλλον ἀκέραιον ἀριθμὸν, εἶναι πρῶτος μὲ τοῦτον τὸν ἄλλον, ἐπειδὴ τότε δὲν

δύνανται νὰ ἔχωσιν ἄλλον κοινὸν διαιρέτην παρὰ τὴν μονάδα. *)

Οἱ ὁρισμοὶ οὗτοι ἐσυστήθησαν ἤδη (ἀρ. 48).

§. 131. Πρώτη ἀρχή. Πᾶς ἀριθμὸς Π, ὅς τις διαιρεῖ ἀκριβῶς τὸν ἕνα ἐκ τῶν παραγόντων τοῦ γινομένου $A \times B$, διαιρεῖ ἐξ ἀνάγκης καὶ τὸ γινόμενόν των, ἤ, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ αὐτό, πᾶς ἀκέραιος ἀριθμὸς, ὅς τις διαιρεῖ ἀκριβῶς ἄλλον, διαιρεῖ ἐξ ἀνάγκης τὰ πολλαπλάσια τοῦ ἄλλου ἀριθμοῦ (ὅρα ἀρ. 48).

Τῷ ὄντι, ἔστω Κ τὸ ἐξ ὑποθέσεως ἀκριβὲς πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ Α διὰ Π, ἔχομεν $A = \Pi \times K$· ὅθεν πολλαπλασιάζοντες τὰ δύο μέλη ταύτης τῆς ἰσότητος διὰ τοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ Β

$$A \times B = \Pi \times K \times B = \Pi \times KB$$

βλέπομεν, ὅτι τὸ Π εἶναι παράγων τοῦ γινομένου ΑΒ.

§. 132. Δευτέρα ἀρχή. Πᾶς ἀριθμὸς Π, ὅς τις διαιρεῖ ἀκριβῶς γινόμενόν τι ΑΒ, καὶ ὅς τις εἶναι πρῶτος μὲ ἕνα ἀπὸ τοὺς δύο παράγοντας, διαιρεῖ ἐξ ἀνάγκης τὸν ἄλλον παράγοντα.

Ἄς ὑποθέσωμεν π. χ. ὅτι Π εἶναι πρῶτος μὲ τὸ Α· λοιπὸν λέγω, ὅτι Π διαιρεῖ τὸ Β.

Τῷ ὄντι, ἐπειδὴ Α καὶ Π εἶναι δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι μεταξύ των, ἕπεται ὅτι, ἐὰν εἰς αὐτοὺς ἐφαρμόσωμεν τὴν μέθοδον τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου (ἀρ. 49), τουτέστιν, ἐὰν διαιρέσωμεν Α διὰ Π (ὑποθέτοντες κατὰ πρῶτον $A > \Pi$)· μετὰ ταῦτα Π διὰ τοῦ πρώτου ὑπολοίπου, καὶ τὸ πρῶτον ὑπόλοιπον διὰ

---

*) Ὅταν ἀριθμός τις διαιρῇ μὲν τὸν διαιρετέον, δὲν δύναται δὲ νὰ διαιρέσῃ τὸν διαιρέτην, ὅς τις εἶναι πρῶτος, ὁ διαιρέτης καὶ ὁ διαιρετέος δὲν ἔχουσι μεταξύ των κοινὸν μέτρον. Ὁ Μεταφραστής.

τοῦ δευτέρου, καὶ οὕτω καθεξῆς, θέλομεν φθάσει ἐξ ἀνάγκης ὕστερον ἀπό τινας πράξεις εἰς τελευταῖον ὑπόλοιπον ἴσον μὲ τὴν μονάδα.

Τούτου τεθέντος, ἂς σημειώσωμεν διὰ K, K′ K″, K‴ κ. τ. λ. καὶ διὰ P, P′, P″, P‴ . . . . . τὰ διαδοχικὰ πηλίκα, καὶ τὰ διαδοχικὰ ὑπόλοιπα. Ἐντεῦθεν θέλομεν λάβει τὰς ἀκολούθους ἰδιότητας.

$$A = \Pi K + P$$
$$\Pi = PK + P'$$
$$P = P'K'' + P''$$
$$P' = P''K''' + P''' .$$
. . . . . .

Καὶ πολλαπλασιάζοντες τὰ δύο μέλη ἑκάστης τούτων τῶν ἰσοτήτων ἐπὶ B, καὶ διαιροῦντες μετὰ ταῦτα τὸ γινόμενον διὰ Π, ἐξάγομεν.

$$\frac{AB}{\Pi} = BK + \frac{BP}{\Pi} \quad \ldots\ldots (1)$$
$$B = \frac{BPK'}{\Pi} + \frac{BP'}{\Pi} \quad \ldots\ldots (2)$$
$$\frac{BP}{\Pi} = \frac{BP'K''}{\Pi} + \frac{BP''}{\Pi} \quad \ldots (3)$$
$$\frac{BP'}{\Pi} = \frac{BP''K'''}{\Pi} + \frac{BP'''}{\Pi} \quad \ldots (4)$$
. . . .

Ἤδη ἐὰν θεωρήσωμεν τὴν ἰσότητα (1), βλέπομεν, ὅτι τὸ πρῶτον μέλος εἶναι ἀκέραιος ἀριθμὸς, ἐπειδὴ AB εἶναι ἐξ ὑποθέσεως διαιρετὸς διὰ Π. Ὁ πρῶτος ὅρος BK τοῦ δευτέρου μέλους εἶναι παρομοίως ἀκέραιος ἀριθμός. Λοιπὸν πρέπει καὶ ὁ δεύτερος ὅρος $\frac{BP}{\Pi}$ νὰ ἦναι καὶ αὐτὸς ἀκέραιος, ἀλλέως ἠθέλαμεν ἔχει ἀκέραιον ἀριθμὸν ἴσον μὲ ἀριθμὸν κλασματικὸν, τὸ ὁποῖον εἶναι ἄτοπον. Λοιπὸν ἐπειδὴ AB εἶναι διαιρετὸς διὰ Π, ἕπεται, ὅτι καὶ τὸ γινόμενον τοῦ B ἐπὶ τὸ πρῶτον ὑπόλοιπον P εἶναι παρομοίως διαιρετὸν διὰ Π.

Ἂς θεωρήσωμεν ἤδη τὴν ἰσότητα (2). Τὸ πρῶτον μέλος εἶναι ἀκέραιος ἀριθμὸς, ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ δευτέρου μέλους εἶναι παρομοίως ἀκέραιος, ἐπειδὴ ΒΡ ὄντος διαιρετοῦ διὰ Π, πρέπει προσέτι νὰ διαιρῆται καὶ τὸ πολλαπλάσιόν του ΒΡΚ′ (ὅρα ἀρ. 131), λοιπὸν πρέπει καὶ ὁ δεύτερος ὅρος $\frac{BP'}{\Pi}$ νὰ ἦναι καὶ αὐτὸς ἀκέραιος ἀριθμός. Οὕτω τὸ γινόμενόν τοῦ Β ἐπὶ τὸ δεύτερον ὑπόλοιπον Ρ′, εἶναι ἀκόμη διαιρετὸν διὰ Π.

Τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἰσότητος (3) εἶναι ἀριθμὸς ἀκέραιος, ἐπειδὴ ΒΡ εἶναι διαιρετὸν διὰ Π· ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ δευτέρου μέλους εἶναι παρομοίως ἀκέραιος ἀριθμὸς, διότι εἶναι καὶ ΒΡ′, καὶ ἐπομένως ΒΡ′Κ″ εἶναι διαιρετὸν διὰ Π. Λοιπὸν ὁ δεύτερος ὅρος $\frac{BP''}{\Pi}$ πρέπει νὰ ἦναι καὶ αὐτὸς ἀκέραιος ἀριθμός.

Ἐν ἑνὶ λόγῳ βλέπομεν, ὅτι ἡ διαιρετότης τοῦ ΑΒ διὰ Π ἐπισύρει ἐξ ἀνάγκης τὴν τῶν γινομένον ΒΡ, ΒΡ′, ΒΡ″, ΒΡ‴ . . . . . καὶ ἐπειδὴ μετὰ τινὰ ἀριθμὸν πράξεων μέλλομεν νὰ φθάσωμεν εἰς ὑπόλοιπον ἴσον μὲ 1, ἕπεται, ὅτι τὸ γινόμενον Β×1 ἢ ἁπλῶς Β, πρέπει καὶ αὐτὸ νὰ διαιρῆται διὰ Π . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ὑπεθέσαμεν κατ' ἀρχὰς Α>Π, ἐὰν ὅμως εἴχαμεν Α<Π, ἠθέλαμεν διαιρέσει Π διὰ Α, Α διὰ Ρ, Ρ διὰ Ρ′ . . . . . ἡ δὲ ἀπόδειξις ἤθελ' εἶναι ἀπολύτως ἡ αὐτή.

Σ. Κ. Πρέπει πάντοτε τὸ Π νὰ ἦναι πρῶτος μὲ ἕνα τῶν δύο παραγόντων, ἐπειδὴ π. χ. 56×15, ἢ 840 εἶναι διαιρετὸν διὰ 40, καὶ δίδει πηλίκον 21, μ' ὅλον ὅτι ἕκαστος τῶν ἀριθμῶν 56 καὶ 15 δὲν διαι-

ρεῖται διὰ τοῦ 40. Τοῦτο ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸ, ὅτι, ὄντος 40 ἴσου μὲ 8×5, ὁ πρῶτος παράγων εὑρίσκεται εἰς τὸ 56 ἢ 7×8, καὶ ὁ δεύτερος παράγων 5, εὑρίσκεται εἰς τὸ 15 ἢ 3×5. Λοιπὸν 56×15 εἶναι ἴσον μὲ 7×8×5×3, ἢ 7×3×8×5, ἢ τέλος μὲ 21×40. *)

§. 133. Τρίτη ἀρχή. Πᾶς ἀριθμὸς Π, ἀπολύτως πρῶτος, ὅς τις διαιρεῖ ἀκριβῶς ἓν γινόμενον Α×Β, πρέπει νὰ διαιρῇ ἀκριβῶς ἕνα τῶν δύο παραγόντων.

Τῷ ὄντι, ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι Π δὲν διαιρεῖ Α, λοιπὸν εἶναι πρῶτος μὲ τὸ Α (ἀρ. 130), ὅθεν πρέπει νὰ διαιρῇ τὸ Β (ἀρ. 132).

Ἐκ τούτου προκύπτουν αἱ ἀκόλουθοι συνέπειαι.

§. 134. 1α Πᾶς ἀριθμὸς ἀπολύτως πρῶτος, ὅς τις διαιρεῖ A^2, καὶ ἐν γένει ὁποιανδήποτε δύναμιν A^μ τοῦ Α, πρέπει νὰ διαιρῇ καὶ τὸ Α.

Τῷ ὄντι A^2 εἶναι τὸ αὐτὸ ὡς Α×Α. Ἠξεύρομεν, ὅτι πᾶς πρῶτος ἀριθμὸς, ὅς τις διαιρεῖ τὸ γινόμενον τοῦτο, πρέπει (ἀρ. 133) νὰ διαιρῇ ἕνα τῶν παραγόντων. Παρομοίως A^3 ὄντος ἴσου μὲ $A \times A^2$, πᾶς ἀριθμὸς πρῶτος, ὅς τις διαιρεῖ A^3, πρέπει νὰ διαιρῇ τὸ Α ἢ τὸ A^2· ἀλλὰ διὰ νὰ διαιρῇ τὸν τελευταῖον παράγοντα, πρέπει νὰ διαιρῇ τὸ Α, καὶ οὕτω διαδοχικῶς.

§. 135. 2α Πᾶς ἀριθμὸς Π, πρῶτος μὲ ἕκαστον τῶν δύο παραγόντων τοῦ γινομένου Α×Β, εἶναι παρομοίως πρῶτος μὲ τοῦτο τὸ γινόμενον.

---

*) Ἐπειδὴ 56 καὶ 40 ἔχουσι κοινὸν διαιρέτην τὸ 8, οὗτοι οἱ δύο ἀριθμοὶ δὲν εἶναι πρῶτοι μεταξύ των, καὶ τὸ 40 καὶ 15 ἔχοντες κοινὸν διαιρέτην τὸ 5, δὲν εἶναι πρῶτοι μεταξύ των. Ἡ δὲ ἄνω εἰρημένη πρότασις ἀπεδείχθη, ὅταν μόνον εἷς τῶν παραγόντων ἦναι πρῶτος μὲ τὸν ἀριθμὸν, ὅς τις διαιρεῖ τὸ γινόμενον. Ὁ Μεταφραστής.

Τῷ ὄντι εἷς ἀριθμὸς ἀπολύτως πρῶτος, ὅςτις διαιρεῖ Π καὶ ΑΒ, πρέπει νὰ διαιρῇ Α ἢ Β· οὕτως Π καὶ Α ἢ Π καὶ Β δὲν πρέπει νὰ ἦναι πρῶτοι ἀναμεταξύ των, τὸ ὁποῖον ἤθελεν εἶναι ἐναντίον τῆς ὑποθέσεως.

§. 136. 3η. Ὅταν εἷς ἀριθμὸς Ν ἦναι σχηματισμένος διὰ τοῦ γινομένου πολλῶν ἄλλων Α, Β, Γ . . . . . ὁ ἀριθμὸς οὗτος δὲν δύναται νὰ ἔχῃ ἄλλους πρώτους παράγοντας, παρὰ ἐκείνους, οἵτινες ἐμβαίνουν ἤδη εἰς Α, Β, Γ, Δ . . . . . .

Τῷ ὄντι πᾶς ἀριθμὸς πρῶτος, ὅς τις διαιρεῖ τὸ γινόμενον ΑΒΓΔ, καὶ δὲν διαιρεῖ τὸ Δ, πρέπει νὰ διαιρῇ τὸ ΑΒΓ (ἀρ. 133). Παρομοίως πᾶς πρῶτος ἀριθμὸς, ὅς τις διαιρεῖ τὸ ΑΒΓ, καὶ δὲν διαιρεῖ τὸ Γ, πρέπει νὰ διαιρῇ τὸ ΑΒ, καὶ διὰ τοῦτο τὸ Α ἢ τὸ Β.

Οὕτω μὲ ἄλλας λέξεις· εἷς ἀριθμὸς σχηματιζόμενος διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ πολλῶν ἄλλων, δὲν δύναται νὰ ποριςθῇ ἐκ νέου, διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἀριθμῶν, οἵτινες περιέχουσι παράγοντας πρώτους, διαφορετικοὺς ἐκείνων, οἵτινες εὑρίσκονται εἰς τοὺς ἀριθμοὺς, τοὺς ὁποίους πρότερον ἐπολλαπλασιάσαμεν.

§. 137. Τετάρτη καὶ τελευταία ἀρχή. Κάθε ἀριθμὸς Ν, ὅςτις διαιρεῖται διὰ δύο, ἢ πολλῶν ἀριθμῶν δ, δ′, δ″ . . . . πρώτων ἀναμεταξύ των, διαιρεῖται καὶ διὰ τοῦ γινομένου των.

Τῷ ὄντι, ἐπειδὴ δ, διαιρεῖ τὸ Ν, ἔχομεν Ν=δκ, ὄντος κ. ἀριθμοῦ ἀκεραίου· ἀλλ' ἐξ ὑποθέσεως δ′ διαιρεῖ παρομοίως τὸ Ν, λοιπὸν δ′ διαιρεῖ τὸ δκ, καὶ ἐπειδὴ δ καὶ δ′ τοὺς ὑποθέσαμεν πρώτους ἀναμεταξύ των, πρέπει (ἀρ. 132) τὸ δ′ νὰ διαιρῇ ἐντελῶς

τὸ x, καὶ οὕτως ἔχομεν $x=\delta' x'$, ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι $N=\delta\times\delta' x'=\delta\delta'\times x'$, οὕτως N διαιρεῖται διὰ $\delta\delta'$.

Παρομοίως ἐπειδὴ δ'' διαιρεῖ τὸ N, πρέπει νὰ διαιρῇ καὶ τὸ $\delta\delta'\times x$, ἀλλὰ δ'' εἶναι πρῶτος μὲ τὸ δ καὶ δ', καὶ διὰ τοῦτο καὶ μὲ τὸ $\delta\delta'$ (ἀρ. 135), λοιπὸν δ'' πρέπει νὰ διαιρῇ ἐντελῶς τὸ x', καὶ διὰ τοῦτο $x'=\delta'' x''$, ἐκ τοῦ ὁποίου συνάγομεν $N=\delta\delta'\times\delta'' x''=\delta\delta'\delta''\times x''$, τὸ ὁποῖον ἀποδεικνύει, ὅτι τὸ N διαιρεῖται διὰ τοῦ $\delta\delta'\delta''$, καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

§. 138. Συνέπεια. Ἐὰν δ, δ', δ'' . . . . ὄντες ἀριθμοὶ πρῶτοι μεταξύ των, ἕκαστος εἰσέρχεται, ὡς παράγων εἰς ἕνα ἀριθμὸν φορῶν εἰς τὸ N, π. χ. ν, ν', ν'' . . . . ὁ ἀριθμὸς N διαιρεῖται ἐντελῶς διὰ δ^{ν}, $\delta'^{\nu'}$, $\delta''^{\nu''}$ . . . . καὶ δι' ὅλων τῶν ἀριθμῶν, τοὺς ὁποίους ἠμποροῦμεν νὰ συνάξωμεν, πολλαπλασιάζοντες ἀνὰ δύο, ἀνὰ τρεῖς, τὰς διαφόρους δυνάμεις τοῦ δ, δ', δ'' . . . . αἵτινες περιέχονται μεταξὺ τῆς πρώτης, ἕως εἰς ἐκείνην, τῆς ὁποίας ὁ βαθμὸς σημειοῦται διὰ τοῦ ν, σχετικῶς πρὸς τὸ δ, διὰ τοῦ ν', σχετικῶς πρὸς τὸ δ', διὰ τοῦ ν'', σχετικῶς πρὸς τὸ δ'' . . . . . . Τῷ ὄντι δ, δ', δ'' . . . . μὲ τὸ νὰ ἦναι πρῶτοι ἀριθμοὶ ἀναμεταξύ των, ἀκολουθεῖ τὸ αὐτὸ καὶ εἰς δ^{ν}, $\delta'^{\nu'}$, $\delta''^{\nu''}$ . . . . λοιπὸν (ἀρ. 137) τὰ γινόμενά των ἀνὰ δύο, ἀνὰ τρία . . . πρέπει νὰ ἦναι ἀκριβεῖς διαιρέται τοῦ N.

Αὕτη ἡ ἀρχὴ χρησιμεύει ὡς βάσις εἰς τὸ ζήτημα τῶν διαιρετῶν τόσον ἁπλῶν, ὅσον καὶ συνθέτων ἑνὸς ἀριθμοῦ· ζήτημα, τὸ ὁποῖον θέλομεν θεωρήσει εὐθύς.

Εἶναι ἀνωφελὲς νὰ παρατηρήσωμεν, ὅτι ὅλαι αἱ μέχρι τοῦδε συσταθεῖσαι προτάσεις εἶναι ἀληθεῖς εἰς ὅλα τὰ συστήματα τῆς ἀριθμήσεως. Ἰδοὺ καὶ ἀλ-

λαι, αἱ ὁποῖαι ἔχουν ἰδιαιτέραν σχέσιν μὲ τὸ δεκαδικὸν σύστημα.

§. 139. Χαρακτηριστικὰ τῆς διαιρετότητος ἑνὸς ἀριθμοῦ δι' ἄλλου. Ὑπάρχουσι μερικὰ σημεῖα, διὰ τῶν ὁποίων συχνάκις δυνάμεθα νὰ γνωρίσωμεν, ὅτι εἷς ἀριθμὸς εἶναι, ἢ δὲν εἶναι διαιρετὸς δι' ἄλλων ἀριθμῶν. Τοῦτο εἶναι ὠφέλιμον εἰς τὰς πράξεις. Οἱ συλλογισμοὶ οἱ ἐπιτήδειοι εἰς τὴν σύστασιν ταύτης τῆς ἀρχῆς ἐπιστηρίζονται εἰς τὴν ἀκόλουθον ἀρχήν.

Ἄς ἀναλυθῇ εἷς ἀριθμὸς A εἰς δύο μέρη B καὶ Γ, ὥστε νὰ ἔχωμεν A=B+Γ . . (1).

1ον. Ἐὰν τέταρτός τις ἀριθμὸς Δ διαιρῇ ἐντελῶς τὰ δύο μέρη B καὶ Γ, πρέπει νὰ διαιρῇ παρομοίως καὶ τὸ ἀθροισμάτων A (ὅρα ἀρ. 48).

2ον. Ἐὰν ὁ ἀριθμὸς Δ διαιρῇ ἓν τῶν μερῶν B, χωρὶς νὰ διαιρῇ τὸ ἄλλο Γ, δὲν θέλει διαιρῇ πλέον τὸ A, καὶ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ A διὰ τοῦ Δ εἶναι ἴσον μὲ ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον δίδει ἡ διαίρεσις τοῦ Γ διὰ τοῦ Δ.

Τὸ πρῶτον μέρος ταύτης τῆς ἀρχῆς εὐκόλως ἀποδεικνύεται. Τῷ ὄντι διαιροῦντες τὰ δύο μέλη τῆς ἰσότητος (1) διὰ Δ, συνάγομεν

$$\frac{A}{\Delta}=\frac{B}{\Delta}+\frac{\Gamma}{\Delta} \quad (2).$$

Τώρα οἱ δύο ὅροι τοῦ δευτέρου μέλους εἶναι ἀκέραιοι ἀριθμοί, ἐπειδὴ B καὶ Γ εἶναι ἐξ ὑποθέσεως διαιρετοὶ διὰ τοῦ Δ· λοιπὸν τὸ πρῶτον μέλος πρέπει νὰ ἦναι ἀκέραιος ἀριθμὸς, ἀλλέως ἠθέλαμεν ἔχει κλασματικὸν ἀριθμὸν ἴσον μὲ ἀκέραιον, τὸ ὁποῖον εἶναι ἄτοπον. Οὕτως A εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ Δ.

Ὅσον δὲ διὰ τὸ δεύτερον μέλος, εἶναι φανερὸν, ὅτι κατὰ τὴν ἰσότητα (2), ἐὰν, B ὄντος διαιρετοῦ

διὰ τοῦ Δ, τὸ Γ δὲν ἦναι διαιρετὸν, μήτε τὸ Α δὲν εἶναι· ἐπειδὴ ἄλλως ἠθέλαμεν ἔχει ἀριθμὸν ἀκέραιον ἴσον μὲ κλασματικόν. Πρόκειται ἤδη νὰ ἀποδείξωμεν, ὅτι τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ Α διὰ τοῦ Δ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ Γ διὰ Δ.

Διὰ τοῦτο παρατηροῦμεν, ὅτι Β μὲ τὸ νὰ ἦναι διαιρετὸν διὰ Δ, ἔχομεν $B=\Delta K$ (Κ εἶναι ἀκέραιος ἀριθμὸς), καὶ ἐπειδὴ Γ δὲν εἶναι διαιρετὸν διὰ Δ, συνάγομεν $\Gamma=\Delta K'+P$.

Λοιπὸν $B+\Gamma$ ἢ $A=\Delta K+\Delta K'+P=\Delta\,(K+K')+P$ (ἀρ. 115). Λοιπὸν βλέπομεν, ὅτι Α διαιρούμενον διὰ Δ δίδει πηλίκον $K+K'$, καὶ ὑπόλοιπον Ρ, τὸ ὁποῖον ἄλλο δὲν εἶναι, παρὰ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ Γ διὰ τοῦ Δ· τοῦτο, τὸ ὁποῖον ἔπρεπε νὰ ἀποδείξωμεν.

Ἄς περάσωμεν τώρα εἰς τὴν ἀνάπτυξιν τῶν διαφόρων χαρακτηριστικῶν τῆς διαιρετότητος.

§. 140. Ἰδιότητες τῶν ἀριθμῶν 2, 5, 4, 25, 8, 125.

1ον Πᾶς ἀριθμὸς, ὅστις τελειόνει εἰς ἓν τῶν ψηφίων 0, 2, 4, 6, 8 εἶναι διαιρετὸς διὰ 2.

Τῷ ὄντι, ὁ τοιοῦτος ἀριθμὸς δύναται νὰ ἀναλυθῇ εἰς δύο μέρη, τουτέστιν εἰς τὸ μέρος πρὸς τὰ ἀριστερὰ τῶν ἁπλῶν μονάδων, θεωρούμενον μὲ τὴν σχετικήν του τιμὴν, καὶ εἰς τὰς ἁπλᾶς μονάδας (π. χ. 38576 ἀνάγεται εἰς $38570+6$)· ἀλλὰ τὸ πρῶτον μέρος μὲ τὸ νὰ τελειόνῃ εἰς μηδὲν, εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 10, ἀλλὰ 10 εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ 2, ἐπειδὴ ἔχομεν $10=2\cdot 5$· λοιπὸν τὸ πρῶτον μέρος εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ 2· ἀλλ' ἓν ὁποιονδήποτε τῶν ψηφίων 0, 2, 4, 6, 8 εἶναι διαιρετὸν διὰ 2· οὕτως (ἀρ. 139) ὅλος ὁ ἀριθμὸς εἶναι διαιρετὸς διὰ 2.

Ἐὰν ὁ ἀριθμὸς τελειόνῃ εἰς ἓν τῶν ψηφίων 1, 3, 5, 7, 9 δὲν εἶναι διαιρετὸς διὰ 2· ἐπειδὴ ἓν τῶν μερῶν του διαιρεῖται διὰ τοῦ 2, καὶ τὸ ἄλλο ὄχι.

Σ. Κ. Πᾶς ἀριθμὸς, ὅς τις διαιρεῖται διὰ τοῦ 2, ἢ τελειόνῃ εἰς ἓν τῶν ψηφίων 0, 2, 4, 6, 8, καλεῖται ἀριθμὸς ἄρτιος· οἱ ἄλλοι καλοῦνται ἀριθμοὶ περιττοί. Ὅλοι οἱ ἄρτιοι ἀριθμοὶ λαμβάνονται ἐκ τοῦ τύπου 2ν, ὄντος ν ἀκεραίου ἀριθμοῦ· οἱ περιττοὶ ἐκ τοῦ τύπου $2\nu+1$.

2ον Πᾶς ἀριθμὸς, ὅς τις τελειόνει εἰς 0 ἢ εἰς 5, εἶναι διαιρετὸς διὰ 5· ἀλλ' εἶναι ἡ αὐτὴ ἀπόδειξις μὲ τὴν τοῦ ἀριθμοῦ 2.

Ἐὰν τὸ τελευταῖον ψηφίον διαφέρῃ τοῦ 0, ἢ τοῦ 5, ὁ ἀριθμὸς δὲν διαιρεῖται διὰ τοῦ 5, καὶ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ τοιούτου ἀριθμοῦ, διὰ τοῦ 5, εἶναι ἴσον μὲ τὸ ὑπόλοιπον τοῦ τελευταίου ψηφίου διὰ τοῦ 5 (ἀρ. 139)· οὕτως 1327 διαιρούμενον διὰ 5 δίδει ὑπόλοιπον 2, τὸ ὁποῖον εἶναι ἴσον μὲ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ 7 διὰ 5.

Παρομοίως 34789 καὶ 71436 δίδουσιν ὑπόλοιπον 4 καὶ 1.

3ον Πᾶς ἀριθμὸς, τοῦ ὁποίου τὰ δύο τελευταῖα ψηφία θεωρούμενα μὲ τὰς σχετικάς των τιμὰς, σχηματίζουσιν ἀριθμὸν διαιρετὸν διὰ 4 ἢ διὰ 25, ὁ ἀριθμὸς οὗτος διαιρεῖται διὰ τοῦ 4 καὶ 25.

Τῷ ὄντι οὗτος ὁ ἀριθμὸς δύναται νὰ ἀναλυθῇ εἰς δύο μέρη, εἰς τὸ μέρος πρὸς τὰ ἀριστερὰ τῶν δεκάδων, θεωρούμενον μὲ τὴν σχετικήν του τιμὴν, καὶ εἰς τὴν ἕνωσιν τῶν δεκάδων καὶ μονάδων (π. χ. 3548 καὶ 27875 ἄγονται εἰς $3500+48$ καὶ $27800+75$)· ἀλλ' ἐπειδὴ τὸ πρῶτον μέρος τελειόνει εἰς δύο μηδενικὰ, διὰ τοῦτο πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τοῦ 100, τὸ

100 διαιρεῖται διὰ 4, καὶ δίδει πηλίκον 25, ἐπειδὴ 100=25×4· λοιπὸν τὸ πρῶτον μέρος διαιρεῖται διὰ τοῦ 4 ἢ διὰ τοῦ 25·· ἀλλὰ καὶ τὸ δεύτερον μέρος διαιρεῖται καὶ αὐτὸ ἐξ ὑποθέσεως διὰ τοῦ 4 ἢ 25· οὕτως ὅλος ὁ ἀριθμὸς διαιρεῖται διὰ τοῦ 4 ἢ διὰ τοῦ 25·· Π. χ. 3548 διαιρεῖται διὰ τοῦ 4, ἐπειδὴ 48 εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 4· 27875 διαιρεῖται διὰ τοῦ 25, ἐπειδὴ 75 εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 25· τὸ δὲ 13758 δὲν εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ 4, ἀλλὰ δίδει ὑπόλοιπον 2, τουτέστιν ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον λαμβάνομεν διαιροῦντες τὸ 58 διὰ τοῦ 4·· 25659 δὲν διαιρεῖται διὰ τοῦ 25 ἀλλὰ δίδει ὑπόλοιπον 9, ἢ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ 59 διὰ τοῦ 25.

Σ. Κ. Διὰ τὸν ἀριθμὸν 25, μόνον οἱ ἀριθμοί, οἵτινες τελειόνουν εἰς 00, 25, 50, καὶ 75 διαιροῦντας διὰ τοῦ 25.

4ον Πᾶς ἀριθμὸς, τοῦ ὁποίου τρία τελευταῖα ψηφία, θεωρούμενα μὲ τὰς σχετικάς των τιμὰς, σχηματίζουσιν ἀριθμὸν διαιρετὸν διὰ 8, ἢ διὰ 125, εἶναι παρομοίως διαιρετὸς διὰ τοῦ 8 ἢ 125.

Δὲν ἀναπτύσσομεν τὴν δεῖξιν, ἐπειδὴ εἶναι ἀνάλογος μὲ τὰς ἀνωτέρω. Ἀρκεῖ μόνον νὰ σημειώσωμεν, ὅτι αὕτη ἐπιστηρίζεται εἰς τοῦτο; ὅτι 1000=125×8· ἀλλ' αὕτη ἡ ἰδιότης δὲν εἶναι εἰς χρῆσιν.

§. 141. Ἰδιότητες τῶν ἀριθμῶν 3 καὶ 9.

Πᾶς ἀριθμὸς, τοῦ ὁποίου τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων θεωρουμένων εἰς τὴν ἀπόλυτον τιμήν των εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ 3 ἢ διὰ τοῦ 9, εἶναι καὶ αὐτὸς ὁ ἴδιος διαιρετὸς διὰ τοῦ 3 ἢ διὰ τοῦ 9.

Παρατηροῦμεν κατὰ πρῶτον, ὅτι ἐὰν ἐξ ὁποιασδήποτε δυνάμεως τοῦ 10 ἢ τῆς μονάδος, ἥτις ἔχει εἰς τὰ δεξιά της ἀριθμόν τινα μηδενικῶν, ἀφαιρέσωμεν 1, τὸ ἐξαγόμενον εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ 9. Ἐπειδὴ

τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο συντίθεται ἀπὸ τόσα ψηφία 9, γραμμένα τὸ ἓν κατ' ἐξακολούθησιν τοῦ ἄλλου, ὅσα μηδενικὰ ἔχει· ἀλλ' ἡ ἀπόλυτος τιμὴ, ἑκάστου ψηφίου 9 εἶναι διαιρετὴ τόσον διὰ τοῦ 3, ὅσον καὶ διὰ τοῦ 9· λοιπὸν τὸ αὐτὸ ἀκολουθεῖ καὶ διὰ τὴν σχετικήν του τιμὴν, ἥτις εἶναι πολλαπλάσιος τῆς ἀπολύτου τιμῆς. Οὕτως τὸ ἐξαγόμενον εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ 3 ἢ διὰ τοῦ 9.

Τούτου τεθέντος, ἔστω θζδγβα ὁ προβαλλόμενος ἀριθμὸς, τὸν ὁποῖον σημειόνομεν διὰ N, καὶ ἔχομεν κατὰ τὴν θεμελιώδη ἀρχὴν τοῦ συστήματος τῆς ἀριθμήσεως $N=\alpha+10\beta+10^2\gamma+10^3\delta+10^4\zeta+10^5\eta$ . . . ἰσότης, τὴν ὁποίαν δυνάμεθα νὰ θέσωμεν ὑπὸ τὴν ἀκόλουθον μορφήν.

$$N=\begin{cases} +(10-1)\beta+(10^2-1)\gamma+(10^3-1)\delta+ \\ +\alpha \quad +\beta \qquad\qquad +\gamma \qquad\qquad +\delta \\ (10^4-1)\zeta+ \ldots\ldots \\ \qquad +\zeta+ \ldots\ldots \end{cases}$$

[Π. χ. $10^3.\delta=\delta.10^3-\delta+\delta=(10^3-1)\delta+\delta$] ἀλλὰ κατὰ τὰ προειρημένα $10-1$, 10^2-1, 10^3-1 . . . . καὶ ἐν γένει 10^n-1 μὲ τὸ νὰ ἦναι διαιρετὰ διὰ τοῦ 3 ἢ διὰ τοῦ 9, ἡ πρώτη ὁριζόντιος γραμμὴ σύγκειται ἀπὸ σειρὰν ἀριθμῶν πολλαπλασίων τοῦ 3 ἢ τοῦ 9, οὕτω τὸ πρῶτον μέρος τοῦ ἀριθμοῦ N εἶναι καὶ αὐτὸ διαιρετὸν διὰ 3 ἢ διὰ 9· λοιπὸν ἐὰν τὸ δεύτερον μέλος, τὸ ὁποῖον ἄλλο δὲν εἶναι, παρὰ τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων τοῦ προβαλλομένου ἀριθμοῦ, θεωρουμένου μὲ τὴν ἀπόλυτόν του τιμὴν, εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ 3 ἢ διὰ τοῦ 9, ὅλος ὁ ἀριθμὸς εἶναι καὶ αὐτὸς διαιρετὸς διὰ τοῦ 3, ἢ διὰ τοῦ 9· Ο· Ε· Δ.

§. 142. Διὰ νὰ προσδιορίσωμεν τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ὁποιουδήποτε ἀριθμοῦ διὰ 9, ἀρκεῖ νὰ

κάμωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων θεωρουμένων μὲ τὴν ἀπόλυτον τιμήν των, καὶ νὰ τὸ διαιρέσωμεν διὰ τοῦ 9· ἐὰν ἡ τοιαύτη διαίρεσις δὲν δώσῃ ὑπόλοιπον, ὁ δεδομένος ἀριθμὸς εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ 9· ἀλλ' ἐὰν εὕρωμεν ὑπόλοιπον, τοῦτο εἶναι τὸ αὐτὸ, ὡς ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον ἠθέλαμεν δείξει, ἐὰν ἐδιαιρούσαμεν τὸν δεδομένον ἀριθμὸν διὰ τοῦ 9. Τοῦτο εἶναι συνέπεια τῆς συσταθείσης ἀρχῆς εἰς τὸν ἀριθμὸν 139.

§. 143. Ἰδιότης τοῦ ἀριθμοῦ 11. Κάθε ἀριθμὸς εἶναι διαιρετὸς διὰ 11, ὅταν ἡ διαφορὰ μεταξὺ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ψηφίων τῶν περιττῶν τάξεων ἀπὸ τὰ δεξιὰ, καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων τῆς ἀρτίας τάξεως ἦναι 0, ἢ πολλαπλάσιον τοῦ 11.

Πρὶν ἀποδείξωμεν ταύτην τὴν ἰδιότητα, εἶναι ἀνάγκη νὰ παρατηρήσωμεν

1ον Ὅτι κάθε δύναμις βαθμοῦ ἀρτίου τοῦ 10 ἐλαττουμένη κατὰ μίαν μονάδα εἶναι διαιρετὴ διὰ τοῦ 11.

Τῷ ὄντι τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο εἶναι σύνθετον ἐκ σειρᾶς τινῶν ψηφίων 9 εἰς ἀριθμὸν ἄρτιον γραμμένων κατ' ἐξακολούθησιν τοῦ ἑνὸς εἰς τὸ ἄλλο· ἕκαστον δὲ τμῆμα ἐκ δύο ψηφίων θεωρούμενον μόνον, σχηματίζει 99 ἢ 9·11, καὶ διὰ τοῦτο εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ 11· λοιπὸν ἡ σχετικὴ τιμὴ ἑκάστου τμήματος, ἥτις εἶναι πολλαπλάσιος τῆς ἀπολύτου τιμῆς, εἶναι καὶ αὐτὴ διαιρετὴ διὰ τοῦ 11· λοιπὸν ἐν γένει $10^{2\nu}$ -1 εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ 11 (2ν ἐκφράζει καθὼς ἠξεύρομεν ἀριθμὸν ἄρτιον.)

2ον Κάθε δύναμις βαθμοῦ περιττοῦ τοῦ ἀριθμοῦ 10 δύναται νὰ ἐκφρασθῇ διὰ $10^{2\nu+1}$ (ἀρ. 140)· ἀλλ' ἔχομεν καὶ $10^{2\nu+1}=10^{2\nu}\times10$ (ὅρα ἀρ. 115), καὶ κατ' ἄλλον τρόπον $10^{2\nu+1}=10^{2\nu}\times10-10+10$ $=(10^{2\nu}-1)\,10+10$· προσθέτοντες 1 καὶ εἰς τὰ δύο

μέλη ἐξάγομεν $10^{2\nu+1}+1=(10^{2\nu+1}-1)\ 10+11$· ἀλλὰ $10^{2\nu}-1$ εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ 11 κατὰ τὴν πρώτην πρότασιν, 11 προσέτι εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ ἑαυτοῦ του· λοιπὸν $10^{2\nu+1}+1$ εἶναι διαιρετὸν διὰ 11.

Τούτου θετέντος, ἔστω . . . . ηθζδγβα ὁ προβαλλόμενος ἀριθμὸς, τὸν ὁποῖον καλοῦμεν N, οὕτως ἔχομεν $N=\alpha+10\cdot\beta+10^2\cdot\gamma+10^3\delta+10^4\zeta+10^5\vartheta+\ldots\ldots$ ἰσότης, τὴν ὁποίαν δυνάμεθα νὰ γράψωμεν ὑπὸ τὴν μορφήν.

$$N=\begin{cases}+(10+1)\ \beta+(10^2+1)\ \gamma+(10^3+1)\ \delta+\\ +\alpha\quad-\quad\beta\qquad\quad+\gamma\quad-\quad\delta\\ (10^4+1)\zeta+\ldots\ldots\\ \qquad\quad+\zeta-\ldots\ldots\end{cases}$$

Ἤδη κατὰ τὰς ἀνωτέρω δύο παρατηρήσεις ἡ πρώτη γραμμὴ σύγκειται ἀπὸ ἀριθμοὺς οὐσιωδῶς διαιρετοὺς διὰ 11, καὶ ἐπομένως σχηματίζει τὸ πρῶτον μέλος, τὸ ὁποῖον καὶ αὐτὸ εἶναι διαιρετὸν διὰ 11. Λοιπὸν ἐὰν τὸ δεύτερον μέρος, τὸ ὁποῖον ἄλλο δὲν εἶναι, παρὰ ἡ διάφορα μεταξὺ τοῦ ἀθροίσματος $\alpha+\gamma+\zeta+\ldots$ τῶν ψηφίων βαθμοῦ περιττοῦ, καὶ τὸ ἄθροισμα $\beta+\delta+\vartheta+\ldots$ τῶν ψηφίων βαθμοῦ ἀρτίου, εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ 11, καθὼς ὑπεθέσαμεν, ὅλος ὁ ἀριθμὸς N εἶναι παρομοίως διαιρετὸς διὰ τοῦ 11· Ο. Ε. Δ.

§. 144. Ὅταν ἡ διαφορὰ μεταξὺ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ψηφίων τάξεως περιττῆς, καὶ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ψηφίων τάξεως ἀρτίας, δὲν ἦναι 0 ἢ πολλαπλάσιον τοῦ 11, ὁ ὅλος ἀριθμὸς δὲν εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ 11, ἐπειδὴ ἓν τῶν μερῶν του εἶναι διαιρετὸν καὶ τὸ ἄλλο δὲν εἶναι· ἀλλὰ τότε πρέπει νὰ

θεωρήσωμεν δύο περιστάσεις ὡς πρὸς τὸν τρόπον τοῦ λαμβάνειν τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως.

1ον. Ἐὰν τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων τάξεως περιττῆς εἶναι μεγαλήτερον τοῦ δευτέρου, ἡ διαφορὰ πρέπει νὰ προστεθῇ εἰς τὴν πρώτην ὁριζόντιον γραμμὴν τῆς τιμῆς τοῦ Ν. Σημειόνοντες λοιπὸν ταύτην τὴν πρώτην γραμμὴν διὰ Β, καὶ τὴν διαφορὰν, τὴν ὁποίαν ἔχομεν νὰ προσθέσωμεν, διὰ Γ, θέλομεν ἔχει $N=B+\Gamma$, καὶ ἐὰν Γ δὲν ἦναι διαιρετὸν διὰ 11, τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ Γ διὰ τοῦ 11, θέλει εἶναι, ὡς ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον ἠθέλαμεν λάβει διαιροῦντες Ν διὰ τοῦ 11 (ἀρ. 139).

2ον. Ἐὰν ἐξ ἐναντίας τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων τάξεως ἀρτίας ἦναι μεγαλήτερον ἀπὸ ἐκεῖνο τῶν ψηφίων τάξεως περιττῆς, ἡ διαφορὰ πρέπει νὰ ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τὴν πρώτην γραμμὴν, καὶ θέλομεν ἔχει $N=B-\Gamma$, Γ παριστάνοντος πάντοτε τὴν ἀριθμητικὴν τιμὴν τῆς διαφορᾶς.

Διὰ νὰ προσδιορίσωμεν εἰς ταύτην τὴν περίστασιν τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ Ν διὰ τοῦ 11, παρατηροῦμεν, ὅτι ἔχομεν $B=11\times K$, Κ ὄντος ἀκεραίου ἀριθμοῦ, καὶ $\Gamma=11\times K'+E$· λοιπὸν
$N=11\times K-11\times K'-E$, ἢ ἀφαιροῦντες καὶ προσθέτοντες 11,
$N=11\times K-11\times K'-11+11-E=11\,(K-K'-1)+11-E$· ὥστε βλέπομεν, ὅτι εἰς ταύτην τὴν περίστασιν τὸ ὑπόλοιον τῆς διαιρέσεως τοῦ Ν διὰ τοῦ 11 εἶναι ἴσον ὄχι μὲ τὸ ὑπόλοιπον Ε τῆς διαιρέσεως τοῦ Γ διὰ τοῦ 11, ἀλλὰ μὲ τὸ ἐξαγόμενον, τὸ ὁποῖον προσδιορίζομεν ἀφαιροῦντες Ε ἀπὸ τὸ 11.

Ἔστω πρὸς ἀκριβῆ κατάληψιν τούτου ὁ ἀριθμὸς 47356708.

Κάμνοντες τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων τάξεως περιττῆς, ἀρχίζοντες ἀπὸ τὰ δεξιὰ, εὑρίσκομεν 27· ἐκτελοῦντες προσέτι τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων τάξεως ἀρτίας, λαμβάνομεν 13· ἤδη τὸ πρῶτον ἄθροισμα εἶναι μεγαλήτερον τοῦ δευτέρου· λοιπὸν λαμβανομένης τῆς διαφορᾶς 14, τὸ ὑπόλοιπον 3 ταύτης τῆς διαφορᾶς διαιρουμένης διὰ τοῦ 11, εἶναι ἴσον μὲ ἐκεῖνο τῆς διαιρέσεως ὅλου τοῦ ἀριθμοῦ, ὡς δυνάμεθα νὰ βεβαιωθῶμεν, ἐὰν διαιρέσωμεν τὴν τελευταίαν διαίρεσιν, κατὰ τὸν συνειθισμένον τρόπον.

Ὅμως, ἐὰν ὁ ἀριθμὸς ἦτον 370546345, ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων τάξεως περιττῆς εἶναι 15, καὶ τῶν ψηφίων τάξεως ἀρτίας εἶναι 22>15, ἕπεται, ὅτι λαμβάνοντες τὴν διαφορὰν μεταξὺ τούτων τῶν δύο ἀθροισμάτων, ἥτις εἶναι 7, τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ ὅλου ἀριθμοῦ διὰ τοῦ 11 δὲν εἶναι 7, ἀλλὰ 11 — 7 ἢ 4, καθὼς δυνάμεθα νὰ βεβαιωθῶμεν.

§. 145. Βάσανος διὰ τῶν 9 καὶ 11 τοῦ πολλαπλασιασμοῦ καὶ τῆς διαιρέσεως. Ὑπάρχει σύντομός τις καὶ ἁπλῆ βάσανος τοῦ πολλαπλασιασμοῦ καὶ τῆς διαιρέσεως, ὄχι βέβαια ἀξία σιωπῆς· καὶ ἰδοὺ τίνι τρόπῳ ἐκτελεῖται.

Ἀθροίζομεν διαδοχικῶς τὰ ψηφία τοῦ πολλαπλασιαστέου, καὶ διαιροῦμεν τὸ ἄθροισμα διὰ τοῦ 9, καὶ σημειόνομεν τὸ ὑπόλοιπον· παρομοίως ἀθροίζομεν τὰ ψηφία τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, καὶ διαιροῦμεν τὸ ἄθροισμα διὰ τοῦ 9, καὶ σημειόνομεν τὸ ὑπόλοιπον· Μετὰ ταῦτα πολλαπλασιάζομεν τὰ δύο ὑπόλοιπα καὶ διαιροῦμεν τὸ γινόμενόν των διὰ τοῦ 9, καὶ σημειόνομεν τὸ τρίτον ὑπόλοιπον.

Τέλος πάντων διαιροῦμεν τὸ γινόμενον τοῦ πολλαπλασιαστέου καὶ πολλαπλασιαστοῦ διὰ τοῦ 9, καὶ εὑρίσκομεν τέταρτον ὑπόλοιπον, τὸ ὁποῖον θέλει εἶναι ἴσον μὲ τὸ τρίτον, ἐὰν ἡ πρᾶξις ἦναι ὀρθή.

Ἂς πολλαπλασιασθοῦν π. χ. οἱ δύο ἀριθμοὶ 5786 καὶ 475.

Ἐκτελεσθέντος τοῦ πολλαπλασιασμοῦ κατὰ τὴν συνειθισμένην μέθοδον, συναθροίζομεν τὰ ψηφία τοῦ πολλαπλασιαστέου, καὶ ἐκ τοῦ τοιούτου ἀθροίσματος ἀφαιροῦμεν τοσάκις τὸ 9, ὁσάκις εἶναι δυνατὸν νὰ ἀφαιρεθῇ, τουτέστι λέγομεν 5 καὶ 7 κάμνουν 12· ἀπὸ τὸ 12 ἀφαιροῦντες τὸ 9 ἔχομεν 3, 3 καὶ 8 κάμνουν 11, ἀπὸ τὸ 11 ἀφαιροῦντες τὸ 9 ἔχομεν 2· τέλος πάντων 2 καὶ 6 κάμνουν 8, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ πολλαπλασιαστέου διὰ τοῦ 9, καὶ τὸ ὁποῖον γράφομεν κατὰ μέρος.

```
   5786
    475        8|2
 -------       ---
  28930        7|2
 40502
23144
 -------
2748350
```

Πράττομεν τὸ αὐτὸ καὶ εἰς τὸν πολλαπλασιαστὴν, καὶ εὑρίσκομεν ὑπόλοιπον 7, τὸ ὁποῖον γράφομεν ὑπὸ τὸ 8, ὡς ἐδῶ φαίνεται.

Πολλαπλασιάζομεν 8 ἐπὶ 7 καὶ ἔχομεν 56, τὸ ὁποῖον διαιροῦμεν διὰ τοῦ 9, καὶ εὑρίσκομεν τρίτον ὑπόλοιπον 2, τὸ ὁποῖον γράφομεν εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ 8. Τέλος πάντων πράττομεν ἐπὶ τοῦ ὅλου γινομένου, ὡς ἐπράξαμεν ἐπὶ τῶν δύο παραγόντων, καὶ ἐξάγομεν ὑπόλοιπον 2, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ ἦναι ἴσον μὲ τὸ τρίτον, διὰ νὰ ἦναι ἡ ἐργασία ἀκριβής.

Διὰ νὰ δώσωμεν λόγον τῆς βασάνου διὰ τοῦ 9 μὲ τρόπον γενικὸν, ἂς σημειώσωμεν διὰ Α καὶ Β τοὺς δύο δεδομένους παράγοντας, διὰ Κ καὶ Κ′, Ε καὶ Ε′ τὰ πηλίκα καὶ τὰ ὑπόλοιπα τῆς διαιρέσεως τοῦ

πολλαπλασιαστέου καὶ πολλαπλασιαστοῦ διὰ τοῦ 9, ἐντεῦθεν θέλομεν ἔχει τὰς ἀκολούθους ἰσότητας.

$$A=9\cdot K+E$$
$$B=9\cdot K'+E'.$$

Πολλαπλασιάζοντες μέλος ἐπὶ μέλος ταύτας τὰς δύο ἰσότητας θέλομεν εὑρεῖ (ἀρ. 115)

$$AB=9^2\cdot KK'+9K'E+9\cdot KE'+EE'.$$

Ἀλλ' οἱ τρεῖς πρῶτοι ὅροι τοῦ δευτέρου μέλους ταύτης τῆς ἰσότητος εἶναι προφανῶς πολλαπλάσιοι τοῦ 9. Λοιπὸν (ἀρ. 139) τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ γινομένου AB διὰ 9 πρέπει νὰ ἦναι ἴσον μὲ ἐκεῖνο τὸ ὁποῖον θέλει δώσει τὸ γινόμενον EE', ὅταν διαιρεθῇ διὰ τοῦ 9, Ο, Ε, Δ.

Ἐὰν εἷς τῶν δύο παραγόντων τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἦναι διαιρετὸς διὰ 9, πρέπει νὰ ἀκολουθῇ τὸ αὐτὸ καὶ εἰς τὸ γινόμενον, καὶ τὸ αὐτὸ ἤθελεν ἀκολουθεῖ, ἐὰν τὸ γινόμενον EE' ἦναι πολλαπλάσιον τοῦ 9.

Εἰς δὲ τὴν βάσανον τῆς διαιρέσεως δύνανται νὰ ἀκολουθήσωσι δύο περιστάσεις· ὅταν γένῃ ἡ διαίρεσις, κατὰ τὴν κοινὴν μέθοδον, ἢ δὲν εὑρίσκομεν ὑπόλοιπον, ἢ εὑρίσκομεν ἕν.

1ον. Ἐὰν δὲν ὑπάρχῃ ὑπόλοιπον, ὁ διαιρετέος θέλει εἶναι τὸ ἀκριβὲς γινόμενον τοῦ διαιρέτου διὰ τοῦ προσδιορισθέντος πηλίκου, καὶ εἰς ταύτην τὴν περίστασιν ἐφαρμόζομεν τὸν προειρημένον κανόνα, θεωροῦντες τὸν διαιρέτην καὶ τὸ πηλίκον, ὡς δύο παράγοντας ἑνὸς πολλαπλασιασμοῦ, καὶ τὸν διαιρετέον ὡς τὸ γινόμενον.

2ον. Ἐὰν λάβωμεν ὑπόλοιπον, (καὶ τοῦτο συμβαίνει συχνότερα) ἀφαιροῦμεν αὐτὸ ἀπὸ τὸν ὅλον διαιρετέον, καὶ τότε τὸ ὑπόλοιπον ταύτης τῆς ἀφαιρέσεως εἶναι τὸ ἀκριβὲς γινόμενον τοῦ διαιρέτου διὰ τὸ πηλί-

κον, καὶ πράττομεν ἐπὶ τῶν τριῶν τούτων τελευταίων ἀριθμῶν, ὡς ἀνωτέρω εἴδομεν.

Σ. Κ. Ὁσάκις μεταχειριζόμεθα τὴν βάσανον διὰ τοῦ 9, καὶ τὸ ὑπόλοιπον τὸ συναγόμενον ἀπὸ τὸ ὅλον γινόμενον, δὲν εἶναι ἴσον μὲ τὸ τρίτον ὑπόλοιπον, συμπεραίνομεν, ὅτι ἡ πρᾶξις τοῦ πολλαπλασιασμοῦ δὲν ἐκτελέσθη ἀκριβῶς. Ἐὰν ὅμως τὸ ὑπόλοιπον τοῦ γινομένου ἦναι ἴσον μὲ τὸ τρίτον ὑπόλοιπον, δυνατὸν ἡ πρᾶξις νὰ ἦναι ἀκριβὴς, ἀλλὰ δὲν πρέπει ἀποφασιστικῶς νὰ τὴν λάβωμεν ὡς ἀκριβῆ πάντοτε διὰ τὰ ἀκόλουθα δύο αἴτια. Τὸ πρῶτον, ἐπειδὴ δυνατὸν εἶναι νὰ ἐγράφαμεν, εἴτε εἰς τὰ μερικὰ γινόμενα, εἴτε καὶ εἰς τὸ ὅλον γινόμενον μηδενικὰ ἀντὶ 9, καὶ κατὰ τὴν φύσιν τῆς βασάνου δὲν δυνάμεθα νὰ καταλάβωμεν τὸ σφάλμα: τὸ δεύτερον, ἐπειδὴ δύο ψηφία τόσον τῶν μερικῶν γινομένων, ὅσον καὶ τοῦ ὅλου γινομένου, δύναται νὰ ἦναι τὸ ἓν μεγαλήτερον, καὶ τὸ ἄλλο μικρότερον τοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ μονάδων, τὸ ὁποῖον κάμνει τὴν ἀνταμοιβὴν εἰς τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων τοῦ γινομένου, καὶ οὕτω δὲν καταλαμβάνομεν ἀκόμη τὸ σφάλμα.

Ἡ βάσανος αὕτη, μ' ὅλον ὅτι εἶναι πολλὰ εὔκολος εἰς τὰς πράξεις, δὲν εἶναι ἀκριβὴς, καὶ διὰ τοῦτο πρέπει νὰ τὴν θεωρῶμεν ὡς ἡμιβάσανον, μεταχειριζόμενοι αὐτὴν μόνον εἰς κατεπειγούσας περιστάσεις.

Ἡ βάσανος διὰ τοῦ 11, ἡ ὁποία δὲν διαφέρει ἐκείνης τοῦ 9, εἰμὴ εἰς τὸν τρόπον τοῦ προσδιορίζειν τὸ ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως ἑνὸς ἀριθμοῦ διὰ τοῦ 11 (ὅρα ἀρ. 144), εἶναι προτιμητέα, ἀγκαλὰ καὶ αὐτὴ εἶναι ὑποκειμένη εἴς τινα σφάλματα, ἀλλὰ τὰ σφάλματα ταῦτα συμβαίνουν σπανίως. Ἑπομένως τοιαῦται βάσανοι ἐφαρμόζονται παρομοίως εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν καὶ εἰς τὴν διαίρεσιν τῶν δεκαδικῶν κλασμάτων,

ἐπειδὴ αἱ πράξεις εἰς αὐτὰ ἐκτελοῦνται, ὡς ἐκεῖναι τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν.

§. 146. Ὑπάρχουν προσέτι χαρακτηριστικὰ τινὰ, διὰ μέσου τῶν ὁποίων γνωρίζομεν, ὅτι εἷς ἀριθμὸς εἶναι διαιρετὸς διὰ τῶν πρώτων ἀριθμῶν 7, 13, 17. Ἀλλ' ἡ μέθοδος, τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ ἀκολουθήσωμεν εἶναι, μακρὰ καὶ ἐπίπονος, καὶ εἶναι συντομώτερον νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν πρᾶξιν τῆς διαιρέσεως διὰ 7, 13 . . . .

Τὰ δι' ἁπλῆν περιέργειαν ζητήματα ταῦτα ἀπαιτοῦν προσέτι περισσοτέρας ἀλγεβραϊκὰς ἀρχὰς, ἀφ' ὅσας ἕως τοῦ νῦν ἐξηγήσαμεν.

Συμβουλεύομεν δὲ τοὺς ἀρχαρίους νὰ γυμνασθῶσιν ἐπὶ τοῦ ἀκολούθου ζητήματος. Ποῖοι εἶναι εἰς ἕντι σύστημα ἀριθμήσεως, τοῦ ὁποίου ἡ βάσις εἶναι β, οἱ δύο ἀριθμοὶ, οἵτινες εἶναι δεκτικοὶ ἀναλόγων ἰδιοτήτων μὲ ἐκείνους τοῦ 9 καὶ 11 ἢ ἐννέα καὶ ἕνδεκα τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος, καὶ νὰ ἀποδείξωσι ταύτας τὰς ἰδιότητας. Θέλουσι δὲ φθάσει εὐκόλως κατὰ ταύτην τὴν ἀρχὴν, ὅτι εἰς κάθε σύστημα ἀριθμήσεως πᾶσα δύναμις τῆς βάσεως δύναται νὰ ἐκφρασθῇ διὰ τῆς μονάδος ἀκολουθημένης ἀπὸ τόσα μηδενικὰ, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ βαθμὸς τῆς δυνάμεως, τουτέστι διὰ 10^{ν}, ὄντος ν τοῦ βαθμοῦ τῆς δυνάμεως.

§. 147. Τὰ δὲ χαρακτηριστικὰ τῆς διαιρετότητος ἑνὸς ἀριθμοῦ διὰ τῶν πολλαπλασίων 6, 12, 15, 18, 36, 45 τῶν πρώτων ἀριθμῶν 2, 3, 5, ὄντα ἁπλούστατα, ἠμποροῦν νὰ τεθῶσιν ἐδῶ.

1ον. Εἷς ἀριθμὸς εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ 6 ἢ 18, ὅταν, τοῦ ἀριθμοῦ ὄντος ἀρτίου, τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων του θεωρουμένων κατὰ τὰς ἀπολύτους τιμάς των, ἦναι διαιρετὸς διὰ τοῦ 3 ἢ τοῦ 9. Ἐπειδὴ οὕτος ὁ ἀριθμὸς εἶναι διαιρετὸς τότε διὰ τοῦ 2 καὶ διὰ

τοῦ 3 ἢ 9· ἀλλὰ 2 καὶ 3 ἢ 2 καὶ 9 εἶναι πρῶτοι ἀναμεταξύτων. Λοιπὸν (ἀρ. 137) ὁ ἀριθμὸς εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ 6 ἢ διὰ τοῦ 18.

2^ον. Εἷς ἀριθμὸς εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ 12 ἢ διὰ τοῦ 36, ὅταν τὰ δύο τελευταῖα ψηφία του, θεωρούμενα κατὰ τὴν σχετικήν των τιμὴν, σχηματίζωσιν ἀριθμὸν πολλαπλάσιον τοῦ 4, καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων του προσέτι διαιρεῖται διὰ τοῦ 3 ἢ διὰ τοῦ 9, ἐπειδὴ τότε ὁ ἀριθμὸς εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ 4 καὶ διὰ τοῦ 3 ἢ 9, λοιπὸν εἶναι διαιρετὸς διὰ 4×3, ἢ 4×9, τουτέστι διὰ 12 ἢ 36.

3^ον. Τέλος πάντων εἷς ἀριθμὸς εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ 15 ἢ 45, ὅταν, τοῦ τελευταίου ψηφίου ὄντος 0 ἢ 5, τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων ἦναι διαρετὸν διὰ τοῦ 3 ἢ διὰ τοῦ 9· ἐπειδὴ τότε ὁ ἀριθμὸς εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ 5 καὶ διὰ τοῦ 3 ἢ 9, λοιπὸν καὶ διὰ τοῦ 15 ἢ 45.

Ἄς ἔλθωμεν τώρα εἰς τὴν ἔρευναν ὅλων τῶν διαιρετῶν ἑνὸς ἀριθμοῦ τόσον τῶν ἁπλῶν, ὡσὰν καὶ τῶν συνθέτων. Τὴν πρότασιν δὲ ταύτην, ὡς μάλιστα ἀξιολογωτάτην, θέλομεν ἐκθέσει ἀκριβῶς καὶ γενικῶς.

§. 148. Ἔστω Ν ὁ ἀριθμὸς, τοῦ ὁποίου ζητοῦμεν νὰ γνωρίσωμεν ὅλους τοὺς διαιρέτας τόσον ἁπλοῦς, ὅσον καὶ συνθέτους.

Σημειόνομεν διὰ α τὸν μικρότερον πρῶτον ἀριθμὸν, ἀρχίζοντες ἀπὸ τὸν 2, ὅστις διαιρεῖ τὸ Ν, καὶ ἐκτελοῦμεν τὴν διαίρεσιν τοῦ Ν διὰ α τόσαις φοραῖς διαδοχικῶς, ὅσον εἶναι δυνατόν. Ἔστω ν ὁ ἀριθμὸς τῶν φορῶν, κατὰ τὰς ὁποίας ἡ διαίρεσις ἐκτελέσθη, εἰς τρόπον, ὥστε ἔχομεν

$N = \alpha^{\nu} + N'$, N' μὴ περιέχοντες πλέον τὸν παράγοντα α. Ἐπειδὴ πᾶς πρῶτος ἀριθμὸς διαφορετικὸς

τοῦ α διαρῶν N, πρέπει (ἀρ. 133) νὰ διαιρῇ N′, ἕπεται, ὅτι ἡ ἀναζήτησις τῶν πρώτων παραγόντων τοῦ N, διαφορετικῶν τοῦ α, ἄγεται εἰς ἐκείνην τῶν πρώτων παραγόντων τοῦ N′, ἀριθμοῦ ἁπλουστέρου παρὰ N.

Ἂς σημειώσωμεν πάλιν διὰ β τὸν ἁπλούστερον πρῶτον ἀριθμὸν, ὅστις διαιρεῖ τὸ N′, καὶ διὰ τοῦ ν′ τὸν ἀριθμὸν τῶν φορῶν, καθ' ἃς ὁ τοιοῦτος παράγων εἰς τὸ N′ εἰσέρχεται· οὕτως ἔχομεν $N' = \beta^{\nu'} \times N''$, καὶ οὕτως ἐξάγομεν $N = \alpha^{\nu} \beta^{\nu'} \times N''$, N″ μὴ περιέχοντος πλέον τοὺς ἁπλοῦς παράγοντας α καὶ β.

Ἂς σημειώσωμεν ἔτι διὰ γ τὸν μικρότερον ἀριθμὸν, ὅστις διαιρεῖ τὸ N″, καὶ διὰ ν″ τὸν ἀριθμὸν τῶν φορῶν, καθ' ἃς ὁ τοιοῦτος παράγων εἰσέρχεται, καὶ εὑρίσκομεν $N'' = \gamma^{\nu''} \times N'''$, καὶ ἐπομένως $N = \alpha^{\nu} \beta^{\nu'} \gamma^{\nu''} \times N'''$.

Καὶ ἀκολουθοῦντες ταύτην τὴν σειρὰν τῶν πράξεων, θέλομεν εὑρεῖ πηλίκον, τὸ ὁποῖον θέλει εἶναι πρῶτος ἀριθμὸς, ἢ μία τις δύναμις πρώτου ἀριθμοῦ, καὶ τότε διαιροῦντες διὰ τούτου τόσαις φοραῖς, ὅσαις ἠμπορέσωμεν, θέλομεν εὑρεῖ τέλος πάντων πηλίκον ἴσον μὲ τὴν μονάδα.

Ἂς ὑποθέσωμεν πρὸς ἀκριβῆ τούτου κατάληψιν, ὅτι N″″ εἶναι ἴσον μὲ $\delta^{\nu'''}$, δ ὄντος ἀριθμοῦ πρώτου, τότε θέλομεν ἔχει, $N = \alpha^{\nu} \beta^{\nu'} \gamma^{\nu''} \delta^{\nu'''}$, τῶν γραμμάτων α, β, γ, δ ἐκφραζόντων (ἀρ. 136) μόνον τοὺς πρώτους παράγοντας, τοὺς ὁποίους δύναται νὰ περιέχῃ τὸ N.

Ὁ Ἀριθμὸς N λέγεται τότε, ὅτι ἀνελύθη εἰς τοὺς ἁπλοῦς του παράγοντας.

Ἐὰν μετὰ ταῦτα θέλωμεν νὰ σχηματίσωμεν ὅλους τοὺς συνθέτους διαιρέτας, πρέπει (κατὰ τὸν ἀρ. 138) νὰ προσδιορίσωμεν ὅλα τὰ γινόμενα πολλαπλασιάζοντες ἀνὰ δύο, ἀνὰ τρεῖς τὰς δυνάμεις τῶν πρώτων παραγόντων, τὰς περιεχομένας μεταξὺ τῆς πρώτης καὶ τῆς δυνάμεως ν, διὰ α τῆς ν′, διὰ β τῆς ν″, διὰ γ′. . . . . . .

Διὰ νὰ ἔχωμεν τὴν βεβαιότητα, ὅτι ἐσχηματίσαμεν ὅλους τοὺς διαιρέτας, εἶναι πρέπον νὰ ἐξακολουθήσωμεν μίαν τινὰ τάξιν, καὶ ἰδοὺ τίνι τρόπῳ διατάττομέν τὴν πρᾶξιν.

Προκείσθω νὰ εὕρωμεν ὅλους τοὺς διαιρέτας τοῦ ἀριθμοῦ 5880.

5880	1.
2940	2.
1470	2. 4.
735	2. 8
245	3. 6. 12. 24
49	5. 10. 20. 40. | 15. 30. 60. 120.
7	7. 14. 28. 56. | 21. 42. 84. 168 | 35. 70. 140. 280 | 105. 210. 420. 840.
1	7. 49. 98. 196. 392 | 147. 294. 588. 1176 | 245. 490. 980. 1960.
	735 | 1470. 2940. 5880.

Ἀφ' οὗ γράψωμεν 1, τὸ ὁποῖον εἶναι ὁ διαιρετης ὅλων τῶν ἀριθμῶν εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ 5880, τοὺς χω-

ρίζομεν διὰ καθέτου γραμμῆς, καὶ ἐκτελοῦμεν τὴν διαίρεσιν διὰ 2, τὸ ὁποῖον γράφομεν ὑπὸ τὸν διαιρέτην 1, καὶ λαμβάνομεν πηλίκον 2940, τὸ ὁποῖον θέτομεν ὑπὸ τῶν 5880· καὶ ἐπειδὴ 2940 εἶναι ἀκόμη διαιρετὸν διὰ 2, γράφομεν ἐκ νέου τοῦτον τὸν διαιρέτην 2 ὑπὸ τὸν πρῶτον, καὶ τὸ νέον πηλίκον 1470 ὑπὸ τὸ προηγούμενον· ἐπειδὴ τὸ πηλίκον τοῦτο εἶναι ἀκόμη διαιρετὸν διὰ τοῦ 2, θέτομεν τοῦτον τὸν νέον διαιρέτην ὑπὸ τὸν πρὸ ἑαυτοῦ, καὶ τὸ νέον πηλίκον 735 ὑπὸ τὸ 1470. Λοιπὸν δυνάμεθα νὰ συμπεράνωμεν, ὅτι $5880=2^3.735$.

Τὸ πηλίκον 735 δὲν εἶναι πλέον διαιρετὸν διὰ τοῦ 2, ἀλλὰ διὰ τοῦ 3, τὸ ὁποῖον γράφομεν ὑπὸ τὸν τελευταῖον διαιρέτην· μετὰ ταῦτα θέτομεν τὸ πηλίκον 245 ὑπὸ τὸ ἀνωτέρω. Λοιπὸν $5880=2^3.3.245$. Τὸ 245 δὲν διαιρεῖται πλέον διὰ τοῦ 3, ἀλλὰ διὰ τοῦ 5, τὸ ὁποῖον γράφομεν ὑπὸ τὸν διαιρέτην 3, καὶ τὸ πηλίκον εἶναι 49, τὸ ὁποῖον δὲν διαιρεῖται πλέον διὰ τοῦ 5. Λοιπὸν $5880=2^3.3.5.49$.

Τὸ 49 εἶναι διαιρετὸν διὰ 7, τὸ ὁποῖον γράφομεν ὑπὸ τὸν διαιρέτην 5, καὶ δίδει πηλίκον 7, τὸ ὁποῖον εἶναι ἀκόμη διαιρετὸν διὰ τοῦ ἑαυτοῦ του. Γράφομεν λοιπὸν ἐκ νέου τὸν διαιρέτην 7 ὑπὸ τὸν προηγούμενον, καὶ εὑρίσκομεν τελευταῖον πηλίκον 1. Λοιπὸν $5880=2^3.3.5.7^2$.

Οὕτως ἀναλύεται λοιπὸν ὁ ἀριθμὸς εἰς τοὺς ἁπλοῦς του παράγοντας.

Διὰ νὰ λάβωμεν τοὺς συνθέτους διαιρέτας ἐπιστρέφομεν εἰς τὸν δεύτερον διαιρέτην 2, τὸν ὁποῖον πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ τὸν πρὸ αὐτοῦ καὶ ἔχομεν 4, τὸ ὁποῖον θέτομεν εἰς τὸ πλευρὸν τοῦ δευτέρου διαιρέτου. Ἀπερνῶντες εἰς τὸν τρίτον διαιρέτην 2, τὸν πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ 4 καὶ ἔχομεν 8 νέον διαιρέτην, ἐπειδὴ 8 εἶναι ἴσον μὲ 2^3. Περνῶμεν μετὰ ταῦτα

εἰς τὸν διαιρέτην 3, ἐπὶ τὸν ὁποῖον πολλαπλασιάζομεν ὅλους τοὺς διαιρέτας 2, 4, 8, καὶ συνάγομεν τοὺς νέους διαιρέτας 6, 12, 24· διότι οὗτοι παῤῥησιάζουν 2×3, $2^2\times3$, $2^3\times3$. Περνῶμεν μετὰ ταῦτα εἰς τὸν διαιρέτην 5, καὶ πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ 5 τοὺς ἀριθμοὺς 2, 4, 8, 3, 6, 12, 24. Ἡ τοιαύτη πρᾶξις μᾶς δίδει νέους διαρέτας, τοὺς ὁποίους θέτομεν εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ 5.

Ἐν ἑνὶ λόγῳ δι' ἕκαστον ἁπλοῦν παράγοντα προσδιορισμένον εἰς τὴν πρώτην σειρὰν τῶν ἐργασιῶν, πολλαπλιάζομεν ὅλους τοὺς διαιρέτας τοὺς πρὸ αὐτοῦ ἐπὶ τὸν παράγοντα τοῦτον, προσέχοντες νὰ μὴν ἐπαναλάβωμεν τὸ αὐτὸ γινόμενον.

Οὕτω περνῶντες εἰς τὸν δεύτερον διαιρέτην 7, πολλαπλασιάζομεν μόνον ἐπὶ τοῦτον τὸν διαιρέτην ὅλους τοὺς διαιρέτας, οἵτινες εὑρίσκονται εἰς τὴν ἰδίαν γραμμὴν εἰς τὴν ὁποίαν εἶναι καὶ ὁ πρῶτος διαρέτης 7, καὶ συνάγομεν 49, 98, 196.

Ἡ ὁδὸς εἶναι ἀπολύτως ἡ αὐτὴ εἰς κάθε ἄλλο παράδειγμα. Ἐνταῦθα προτείνομεν διὰ γύμνασιν νὰ εὕρωμεν ὅλους τοὺς διαιρέτας τῶν ἀριθμῶν 1764, 1665. 5670, 50527, τοὺς ὁποίους εὑρίσκομεν ἴσους μὲ $2^2.3^2.7^2.$ | $3^2.5.37.$ | $2.3^4.5.7.$ | $7^3.89.$ |

§. 149. Ἐπειδὴ εἶναι ἀναγκαιότατον νὰ μὴν παραιτήσωμεν οὔτε ἕνα τῶν διαιρετῶν, διὰ τοῦτο κάμνομεν γνωστὸν κανόνα τινὰ, διὰ τοῦ ὁποίου βεβαιονόμεθα, ἐὰν ἐπροσδιορίσθησαν ὅλοι οἱ διαιρέται ἑνὸς ἀριθμοῦ.

Πρὸς τοῦτο, ἂς ἐπαναλάβωμεν τὴν ἔκφρασιν $N=\alpha^{\nu}\beta^{\nu'}\gamma^{\nu''}\delta^{\nu'''}$· Εἶναι φανερὸν, ὅτι θέλομεν λάβει ὅλους τοὺς διαιρέτας τοῦ N, εἰς αὐτοὺς δὲ καὶ τὴν μονάδα, πολλαπλασιάζοντες ὅλους τοὺς ὅρους τῆς σειρᾶς . . . . . . $1, \alpha', \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4 \ldots \alpha^{\nu}$
ἐπὶ ὅλους τοὺς ὅρους ταύτης $1, \beta', \beta^2, \beta^3, \beta^4 \ldots \beta^{\nu'}$

Μετὰ ταῦτα ὅλους τοὺς ὅρους τοῦ οὕτως προσδιορισμένου γινομένου, ἐπὶ τοὺς ὅρους τῆς νέας σειρᾶς . $1^1, \gamma, \gamma^2, \gamma^3, \gamma^4 \ldots \gamma^{\nu''}$ καὶ τέλος πάντων ὅλους τοὺς ὅρους τοῦ νέου γινομένου ἐφ' ὅλους τοὺς ὅρους τῆς νέας σειρᾶς . . . $1, \delta, \delta^2, \delta^3, \delta^4 \ldots \delta^{\nu'''}$ καὶ οἱ διάφοροι ὅροι τούτου τοῦ τελευταίου γινομένου, ἄλλο δὲν εἶναι, εἰμὴ συμπλοκὴ ἀνὰ ἕν, ἀνὰ δύο, ἀνὰ τρία . . . . . . τῶν α. β, δ . . . . ὑψωμένων εἰς δυνάμεις, τῶν ὁποίων οἱ βαθμοὶ δὲν ὑπερβαίνουν ν, ν', ν'', ν''' . . . . . ἀλλ' ὁ ἀριθμὸς τῶν ὅρων τοῦ πρώτου πολυωνύμου εἶναι προφανῶς $\nu+1$, ὁ δὲ ἀριθμὸς τῶν ὅρων τοῦ δευτέρου εἶναι $\nu'+1$. Λοιπὸν ὅλος ὁ ἀριθμὸς τῶν ὅρων τοῦ γινομένου τῶν δύο πολυωνύμων εἶναι ἴσος μὲ $(\nu+1)(\nu'+1)$.

Παρομοίως ὁ ἀριθμὸς τῶν ὅρων τοῦ τρίτου πολυωνύμου εἶναι $\nu''+1$· οὕτως ὁ ὅλος ἀριθμὸς τῶν ὅρων τοῦ γινομένου ἐκ τριῶν σειρῶν εἶναι $(\nu+1)(\nu'+1)(\nu''+1)$, καὶ οὕτω διαδοχικῶς. Ἐκ τούτου ἐξάγομεν τὸν ἀκόλουθον κανόνα. „Αὔξανε κατὰ μονάδα τοὺς ἐκθέτας ν, ν', ν'' . . . . τῶν διαφόρων πρώτων παραγόνταν, οἵτινες εἰσέρχονται εἰς τὸν ἀριθμὸν N, μετὰ ταῦτα πολλαπλασίαζε ἀναμεταξύ των τοὺς οὕτω αὐξανομένους κατὰ μονάδα ἐκθέτας, καὶ τὸ γινόμενον ἐκφράζει τοὺς διαιρέτας ὅλους τοῦ N, ἐμπεριλαμβανομένης καὶ τῆς μονάδος.“ Διὰ τοῦτο εἰς τὰς πράξεις ἐγράψαμεν ἐπὶ κεφαλῆς τῶν διαιρετῶν τὸν 1, ὅστις πρέπει καὶ αὐτὸς νὰ βάλλεται εἰς λογαριασμόν.

Εἰς τὸ προειρημένον παράδειγμα εὑρήκαμεν $5880 = 2^3 . 3^1 . 5^1 . 7^2$· τοῦτο δὲ μᾶς δίδει $(3+1)(1+1)(1+1)(2+1)$ ἢ $4 \times 2 \times 2 \times 3$, ἢ 48, διὰ τὸν ὅλον ἀριθμὸν τῶν διαιρετῶν πραγματικῶς διαφορετικῶν ἀκα-

μεταξύτων, τὸ ὁποῖον εἶναι εὔκολον νὰ βεβαιωθῶμεν ἀπὸ τὸν πίνακα (ἀρ. 148).

§. 150. Πρώτη παρατήρησις. Ἀκολουθεῖ ἐνίοτε, δοκομάζοντες τὴν διαίρεσιν τοῦ ἀριθμῦ Ν διὰ τῶν πρώτων ἀριθμῶν 2, 3, 5, 7 . . . . νὰ μὴν εὑρίσκωμεν κανὲν ἀπὸ αὐτοὺς διαιροῦντα ἐντελῶς αὐτὸν, ἀλλ' ἀφ' οὗ δοκιμάσωμεν διαιρέτην τινὰ, ὅστις νὰ ἀπερνᾷ τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ Ν (ὅρα ἀρ. 181), χωρὶς νὰ εὕρωμεν κανὲν ἀκριβῆ διαιρέτην, εἶναι ἀνωφελὲς νὰ δοκιμάζωμεν ἄλλους νέους διαιρέρας, καὶ βεβαιούμεθα, ὅτι Ν εἶναι πρῶτος ἀριθμός.

Οὕτως 73 εἶναι ἀριθμὸς πρῶτος, ἐπειδὴ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 73 εἶναι μεταξὺ τοῦ 8 καὶ 9, καὶ κανεῖς ἀριθμὸς ἕως εἰς 9 δὲν διαιρεῖ ἐντελῶς 73.

Πρὸς ἀπόδειξιν ταύτης τῆς προτάσεως, ἔστωσαν δύο ἀριθμοὶ Α καὶ Β, τῶν ὁποίων τὸ γινόμενον ἔστω Ν. Σημειόνοντες διὰ Ρ τὴν τετραγωνκὴν ῥίζαν τοῦ Ν, ἔχομεν $A \times B = P \times P$, ἐκ τοῦ ὁποίου συνάγομεν, διαιροῦντες τὰ δύο μέλη διὰ τοῦ γινομένου $B \times P$, τὴν ἰσότητα $\frac{A}{P} = \frac{P}{B}$.

Ἀλλὰ διὰ νὰ ὑπάρχῃ αὐτὴ ἡ ἰσότης, πρέπει, ἐὰν ἔχωμεν $A > P$, νὰ ἔχωμεν εἰς τὸν αὐτὸν καιρὸν $B < P$, ἐπειδὴ ἀλλέως ἠθέλαμεν ἔχει ἀριθμὸν μεγαλήτερον τῆς μονάδος, ἴσον μὲ ἀριθμὸν μικρότερον αὐτῆς. Ἕπεται ἐκ τούτου, ὅτι δὲν ὑπάρχει κανεὶς διαιρέτης τοῦ Ν μεγαλήτερος τοῦ Ρ μόνον, διότι δὲν εἶναι πλέον μικρότερος· οὕτως τὸ Ν εἶναι πρῶτος ἀριθμός. Οἱ νέοι, οἵτινες γνωρίζουν τὴν ἐξαγωγὴν τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης, γνωρίζουν χωρὶς κόπον, κατὰ τὴν ἄνω παρατήρησιν, ὅτι 113, 719, 977, 3329, 8123 . . ., . . εἶναι ἀριθμοὶ πρῶτοι.

§. 151. Δευτέρα παρατήρησις. Ὅλοι οἱ πρῶτοι ἀριθμοὶ ἔχουσι ταύτην τὴν πολλὰ περίεργον

ἰδιότητα, ὅτι, ἐὰν αὐξηθῶσιν ἢ ἐλαττωθῶσι κατὰ μονάδα, τὰ ἐξαγόμενόν εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 6. Μὲ ἄλλους λόγους, ὅλοι οἱ πρῶτοι ἀριθμοὶ περιλαμβάνονται εἰς τὸν γενικὸν τύπον $6\nu \pm 1$ (ὄντος ν ἀκεραίου ἀριθμοῦ.)

Διὰ νὰ δώσωμεν τὸν λόγον ταύτης τῆς ἰδιότητος, ἀρκεῖ νὰ παρατηρήσωμεν, ὅτι πᾶς ἀκέραιος ἀριθμὸς ἐξ ἀνάγκης περιλαμβάνεται εἰς μίαν τῶν ἀκολούθων ἓξ κλάσεων.

$6\nu+1$, $6\nu+2$, $6\nu+3$, $6\nu+4$, $6\nu+5$, $6\nu+6$ *).

Ἡ δευτέρα, ἡ τετάρτη καὶ ἡ ἕκτη κλάσις σύγκεινται ἀπὸ ἀριθμοὺς διαιρετοὺς διὰ τοῦ 2, καὶ διὰ τοῦτο δὲν δύνανται νὰ ἦναι ἀριθμοὶ πρῶτοι· ἡ τρίτη περιέχει ἀριθμοὺς διαιρετοὺς διὰ τοῦ 3· μένουσι λοιπὸν αἱ δύο κλάσεις $6\nu+1$, $6\nu+5$, αἱ ὁποῖαι εἶναι ἱκαναὶ νὰ περιλαμβάνωσι τοὺς πρώτους ἀριθμοὺς **)· καὶ ἐπειδὴ $6\nu+5$ εἶναι ἴσον μὲ $6\nu+6-1=6(\nu+1)-1=6\nu'-1$, ν' ἐκφράζοντος ἀκέραιον τινὰ ἀριθμὸν, ἕπεται, ὅτι οἱ πρῶτοι ἀριθμοὶ περιλαμβάνονται εἰς τὸν τύπον $6\nu \pm 1$.

Ἀλλ' ἐκ ταύτης τῆς παρατηρήσεως δὲν ἠμποροῦμεν νὰ ἐξάξωμεν τὴν ἀντίστροφον, ὅτι κάθε ἀριθμὸς τοῦ τύπου $6\nu+1$ ἢ -1 εἶναι ἀριθμὸς πρῶτος.

Π. χ. 25 εἶναι ἴσον μὲ $6\times4+1$, καὶ δὲν εἶναι πρῶτος ἀριθμός· 121 εἶναι ἴσον μὲ $6\times20+1$, καὶ δὲν εἶναι πρῶτος ἀριθμὸς, ἐπειδὴ $11\times11=121$.

*) Ἐὰν εἰς τὴν σειρὰν τῶν ἓξ κλάσεων τῶν ἀριθμῶν καλέσωμεν ν, ἴσον τῷ 0, συνάγομεν, 1, 2, 3, 4, 5, 6· Ἐὰν ν ληφθῇ ἴσον 1 συνάγομεν 7, 8, 9, 10, 11, 12· ἐὰν τὸ ν ἴσον τῷ 2, συνάγομεν, 13, 14, 15, 16, 17, 18, καὶ οὕτως ἐφεξῆς, τουτέστιν ἐξ αὐτῶν τῶν ἓξ κλάσεων συνάγομεν διαδοχικῶς ὅλους τοὺς ἀριθμούς. Ὁ Μεταφραστής.

**) Ἐπειδὴ δίδοντες διαφορετικὰς τιμὰς τοῦ ν ἐξάγομεν τὰς ἀκολούθους τιμὰς διὰ $6\nu+1$, $6\nu+5$, τουτέστι $\nu=0=1=2=3=4$ . . . . ἐξάγομεν 1 καὶ 5, 7 καὶ 11, 13 καὶ 17, 19 καὶ 23, 25 καὶ 29 . . . . Ἐκτὸς τοῦ $\nu=4$ κάθε ἄλλη πρὸ τοῦ 4 τιμὴ τοῦ ν μᾶς ἔδωκε πρώτους ἀριθμούς. Ὁ Μεταφραστής.

Ἐν γένει ὅλοι οἱ περιττοὶ ἀριθμοὶ, οἵτινες δὲν εἶναι διαιρετοὶ διὰ τοῦ 3, ἐμπεριέχονται εἰς τὸν τύπον 6ν±1. Ἤδη πολλαπλασιάζοντες δύο ἢ πολλοὺς πρώτους ἀριθμοὺς διαφορετικοὺς τοῦ 2 καὶ 3 ἐξάγομεν γινόμενον, τὸ ὁποῖον ἔχει τὴν αὐτὴν ἰδιότητα, χωρὶς νὰ ἦναι ἀριθμὸς πρῶτος, ἐπειδὴ ἐσχηματίσθη διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἄλλων ἀριθμῶν . . . .

§. 152. Ἀναγωγὴ τῶν κλασμάτων εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστήν.

Ὁ συσταθεὶς γενικὸς κανὼν εἰς τὸν ἀριθμὸν 42, διὰ νὰ ἀνάγωμεν δύο ἢ περισσότερα κλάσματα εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν, μᾶς ἄγει εἰς κλάσματα, τῶν ὁποίων οἱ ὅροι εἶναι πολλὰ μεγάλοι· Ἤδη, ὅταν οἱ ἀρχικοὶ παρονομασταὶ περιέχωσι κοινοὺς παράγοντας, εἶναι δυνατὸν νὰ ἐξάξωμεν ἀριθμὸν πολὺ μικρότερον τοῦ γινομένου, τὸ ὁποῖον θέλει εἶναι μετὰ ταῦτα ὁ κοινὸς παρονομαστὴς ὅλων τῶν κλασμάτων.

Τοῦτο τὸ ζήτημα τὸ διὰ τοὺς ἁπλουστάτους ὑπολογισμούς του ἀξιολογώτατον, περὶ τοῦ ὁποίου ἤδη λαλοῦμεν, συνίσταται εἰς τὸν προσδιορισμὸν τοῦ ἁπλουστέρου πολλαπλασίου τῶν παρονομαστῶν δύο, ἢ περισσοτέρων κλασμάτων.

Ἰδοὺ ποῖος εἶναι ὁ κανὼν, τὸν ὁποῖον πρέπει νὰ ἐξακολουθήσωμεν, διὰ νὰ προσδιορίσωμεν τοῦτον τὸν ἀριθμόν. „Ἀνάλυσε τοὺς διαφόρους παρονομαστὰς εἰς τοὺς πρώτους παράγοντάς των, κατὰ τὸν κανόνα τοῦ ἀρ. 148. Σχημάτισε μετὰ ταῦτα τὸ γινόμενον ὅλων τούτων, ὑψωμένων ἀμοιβαίως εἰς τὴν ἀνωτέραν δύναμιν, εἰς τὴν ὁποίαν οὗτοι εὑρίσκονται ὑψωμένοι εἰς τοὺς διαφόρους παρονομαστάς. Τὸ οὕτω σχηματιζόμενον γινόμενον εἶναι ὁ ζητούμενος ἀριθμός.“

Κατὰ πρῶτον αὐτὸς ὁ ἀριθμὸς εἶναι πολλαπλάσιος ἑκάστου παρονομαστοῦ, ἐπειδὴ περιέχει ὅλους τοὺς πρώτους παράγοντας εἰς δύναμιν τοὐλάχιστον

ἴσην μὲ ἐκείνην, ἥτις εἰσέρχεται εἰς αὐτὸν τὸν παρονομαστήν. Λέγω πρὸς τούτοις, ὅτι τοῦτο τὸ πολλαπλάσιον εἶναι τὸ ἁπλούστερον, ἐπειδὴ, διὰ νὰ περιέχῃ ἀκριβῶς ὁποιονδήποτε παρονομαστὴν, πρέπει νὰ περιέχῃ ἕκαστον πρῶτον παράγοντα εἰς δύναμιν τινὰ τοὐλάχιστον ἴσην μὲ ἐκείνην, ἥτις περιέχεται εἰς αὐτὸν τὸν παρονομαστήν.

Προκείσθω λόγου χάριν νὰ ἀνάξωμεν εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν τὰ ἓξ κλάσματα

$$\frac{13}{60}, \frac{17}{28}, \frac{23}{240}, \frac{173}{225}, \frac{319}{490}, \frac{523}{720}.$$

Οἱ ἓξ παρονομασταὶ ἀναλυόμενοι εἰς τοὺς ἁπλοῦς των παράγοντας, κατὰ τὸν γνωστὸν κανόνα, ἄγονται εἰς

$$2^2 \cdot 3 \cdot 5,\ 2^2 \cdot 7,\ 2^4 \cdot 3 \cdot 5,\ 3^2 \cdot 5^2,\ 2 \cdot 5 \cdot 7^2,\ 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5.$$

Οἱ μόνοι πρῶτοι παράγοντες, οἵτινες εἰσέρχονται εἰς τούτους τοὺς παρονομαστὰς, εἶναι 2, 3, 5 καὶ 7, καὶ αἱ ἀνώτεραι δυνάμεις, εἰς τὰς ὁποίας οὗτοι οἱ παράγοντες ὑψόνονται, εἶναι 2^4, 3^2, 5^2, 7^2 . . . Σχηματίζοντες λοιπὸν τὸ γινόμενον τῶν ἀνωτέρων τούτων δυνάμεων ἔχομεν 176400· καὶ οὗτος εἶναι ὁ ἀριθμὸς, ὅς τις εἶναι τὸ ἁπλούστερον πολλαπλάσιον ὅλων τῶν παρονόμαστῶν, ἢ ὁ κοινὸς παρονομαστὴς, πρὸς τὸν ὁποῖον πρόκειται νὰ φέρωμεν ὅλα τὰ κλάσματα, ὡς ἀκολούθως.

Πολλαπλασιάζομεν διαδοχικᾶς τοὺς δύο ὅρους ἑκάστου κλάσματος ἐπὶ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἁπλουστέρου πολλαπλασίου διὰ τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ κλάσματος ἐπὶ τοῦ ὁποίου ἐργαζόμεθα. Οὕτως εἰς τοῦτο τὸ παράδειγμα, λαμβάνομεν κατ' ἀρχὰς τὸ πρῶτον κλάσμα.

Ἡ διαίρεσις τοῦ 176400 διὰ 60 δίδει 2940 πηλίκον, καὶ πολλαπλασιάζοντες τοὺς δύο ὅρους αὐ-

τοῦ τοῦ κλάσματος ἐπὶ 2940 ἔχομεν $\frac{38220}{176400}$. Εὑρίσκομεν παρομοίως διὰ τὰ ἄλλα πέντε κλάσματα

$$\frac{107100}{176400}, \frac{16905}{176400}, \frac{135632}{176400}, \frac{114840}{176400}, \frac{128135}{176400}.$$

Ὅλαι αὗται αἱ πράξεις εἶναι πολλὰ σύνθετοι, ἀλλ' ἤθελαν εἶναι πλέον ἐπίπονοι, καὶ ἠθέλαμεν πέσει εἰς παρονομαστὰς πολλὰ μεγάλους, ἐὰν ἠκολουθούσαμεν τὸν συσταθέντα κανόνα εἰς τὸν ἀριθμὸν 44.

Ἡ ἀνάλυσις τῶν παρονομαστῶν εἰς τοὺς ἁπλουστέρους των παράγοντας ἐκτελεῖται ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον μὲ τὴν μόνην παρατήρησιν αὐτῶν, καὶ μάλιστα ὅταν περιέχωσι πολλαῖς φοραῖς τοὺς παράγοντας 2, 3, 5, τῶν ὁποίων εἴδομεν τὰ χαρακτηριστικὰ τῆς διαιρετότητος, καθὼς καὶ τῶν πολλαπλασιόντων 4, 6, 8, 9, 12, 15, 18, 25, 36 . . . . . .

Θέτομεν δὲ διὰ γύμνασιν τὰ ἀκόλουθα κλάσματα.

$$\frac{13}{20}, \frac{17}{48}, \frac{113}{280}, \frac{527}{960}, \frac{1211}{1800}, \frac{3613}{5040}, \frac{5237}{6860}.$$

(τὸ ἁπλούστερον πολλαπλάσιον ὅλων τῶν παρονομαστῶν εἶναι $2^6 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^3 \cdot = 4939200$).

§. 153. Παρατήρησις περὶ τοῦ μεγίστου κοινοῦ Διαιρέτου.

Ἐσυστήσαμεν εἰς τὸν ἀριθμὸν 49, μέθοδον τοῦ νὰ προσδιορίζωμεν τὸν μεγαλήτερον ἀριθμὸν, ὅς τις δύναται νὰ διαιρῇ ἐν ταὐτῷ δύο δεδομένους ἀριθμοὺς. Αὕτη ἡ μέθοδος εἶναι ἁπλουστάτη, καὶ ἡ δεῖξις, τὴν ὁποίαν ἐδώκαμεν, μᾶς εὐχαριστεῖ πληρέστατα, ὡς πρὸς τὴν ἀκρίβειαν αὐτῆς. Μ' ὅλον τοῦτο γνωστοποιοῦμεν ὠφελίμως τινὰς ἰδιότητας τούτου τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου, αἱ ὁποῖαι μᾶς εὐκολύνουν τὰς πράξεις τῆς μεθόδου.

Ἔστωσαν Α καὶ Β οἱ δεδομένοι ἀριθμοί. Ἂς ἐννοήσωμεν, ὅτι, ἀφ' οὗ τοὺς ἀνελύσαμεν καὶ τοὺς δύο εἰς τοὺς ἁπλοῦστων παράγοντας κατὰ τὴν μέθοδον τοῦ ἀριθμοῦ 148, εὑρήκαμεν, ὅτι α, β, γ, δ εἶναι οἱ κοινοὶ πρῶτοι παράγοντες αὐτῶν, καὶ οἱ μόνοι, τοὺς ὁποίους εἰς τὸν αὐτὸν καιρὸν εὑρήκαμεν. Σημειένομεν ἔτι διὰ ν, ν′, ν″, ν‴ τοὺς ἐκθέτας τῶν ἀνωτέρων δυνάμεων αὐτῶν τῶν παραγόντων, κοινῶν εἰς Α καὶ Β. Ἔχομεν λοιπὸν $A = α^{ν} β^{ν'} γ^{ν''} δ^{ν'''} A'$ καὶ $B = α^{ν} β^{ν'} γ^{ν''} δ^{ν'''} B'$ . . . (1) (Α′ καὶ Β′ ὄντων ἀριθμῶν πρώτων μεταξύ των). Τῷ ὄντι, ἢ περιέχουσιν ἀκόμη ὁ εἷς καὶ ὁ ἄλλος τινὰς τῶν παραγόντων α, β, γ, δ, ἐκ τῶν ὁποίων ὅσοι εὑρίσκονται εἰς Α′, δὲν δύνανται νὰ εὑρεθῶσιν εἰς Β′, ἐπειδὴ ἀλλέως ν, ν′, ν″, ν‴ δὲν ἤθελαν εἶναι οἱ ἐκθέται τῶν ἀνωτέρων κοινῶν δυνάμεων, ἢ Α′ καὶ Β′ σύγκεινται ἀπὸ πρώτους παράγοντας διαφορετικοὺς τοῦ α, β, γ, δ, καὶ τότε οἱ παράγοντες τοῦ Α′ διαφέρουν τῶν τοῦ Β′, ἀλλέως δὲν ἤθελαν εἶναι α, β, γ, δ οἱ μόνοι πρῶτοι κοινοὶ παράγοντες. Λοιπὸν Α′ καὶ Β′ εἶναι πρῶτοι ἀναμεταξύ των.

Προκύπτει ἐκ τῶν προειρημένων, ὅτι οἱ κοινοὶ παράγοντες τοῦ Α καὶ Β εἶναι γινόμενα τινῶν δυνάμεων τοῦ α, β, γ, δ ἑνὸς βαθμοῦ ἴσου ἢ μικροτέρου τῶν ν, ν′, ν″, ν‴, καὶ συμπλεκομένων ἀνὰ ἕν, ἀνὰ δύο, ἀνὰ τρία, ἀνὰ τέσσαρα· ἀλλὰ τὸ μέγιστον γινόμενον, τὸ ὁποῖον ἐδυνάμεθα οὕτως νὰ προσδιορίσωμεν εἶναι φανερὰ τὸ $α^{ν} β^{ν'} γ^{ν''} δ^{ν'''}$. Λοιπὸν ὁ ἀριθμὸς οὗτος εἶναι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν δύο δεδομένων ἀριθμῶν.

Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης δύο ἀριθμῶν εἶναι τὸ γινόμενον τῶν πρώτων παραγόντων κοινῶν εἰς αὐτοὺς τοὺς δύο ἀριθμούς, καὶ

ὑψωμένων σχετικῶς εἰς τὴν μικροτέραν τῶν δύο δυνάμεων, εἰς τὰς ὁποίας οὗτοι οἱ παράγοντες εὑρίσκονται εἰς τοὺς δύο ἀριθμούς.

Συνέπεια. Πᾶς κοινὸς διαιρέτης δύο ἀριθμῶν διαιρεῖ τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην των, διότι εἴδομεν, ὅτι κάθε μερικὸς διαιρέτης πρέπει νὰ ἦναι εἷς τῶν παραγόντων τοῦ αʹ βʹ γʹ δʹ.

§. 154. Αὕτη ἡ ἰδιότης χορηγεῖ ἓν ἄλλο μέσον διὰ τὸν προσδιορισμὸν τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου δύο ἀριθμῶν. „Ἀρχίζομεν κατὰ πρῶτον νὰ ἐρευνῶμεν ὅλους τοὺς διαιρέτας τοῦ Α, κατὰ τὴν μέθοδον τοῦ ἀριθμοῦ 148, καὶ παρομοίως τοὺς τοῦ ἀριθμοῦ Β. Θεωροῦμεν δὲ μετὰ ταῦτα, ποῖος εἶναι ὁ μεγαλήτερος ἀπὸ ὅλους τοὺς διαιρέτας, οἵτινες εἶναι κοινοὶ εἰς τοὺς δύο πίνακας, καὶ οὕτως ἔχομεν τὸν ζητούμενον ἀριθμόν.“ Ἢ ἀλλέως, τὸ ὁποῖον εἶναι πλέον σύντομον. „Ἀφ' οὗ ἀναλύσωμεν μόνον τοὺς δύο ἀριθμοὺς εἰς τοὺς ἁπλοῦς των παράγοντας (ἀρ. 148) σχηματίζομεν γινόμενόν τι ἐκ τῶν κοινῶν πρώτων παραγόντων, καὶ ὑψωμένων ἀμοιβαίως εἰς τὴν μικροτέραν τῶν δύο δυνάμεων, κατὰ τὰς ὁποίας οὗτοι οἱ παράγοντες εὑρίσκονται εἰς τοὺς δύο ἀριθμούς.“

Ἔστωσαν π. χ. οἱ δύο ἀριθμοὶ 2150 καὶ 3612, τῶν ὁποίων ζητοῦμεν τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην.

2150	1	3612	1	
1075	2	1806	2	
215	5	903	2	2×43=86.
43	5	301	3	
1	43	43	7	
		1	43	

Εὑρίσκομεν διὰ τοὺς ἁπλοῦς διαιρέτας τοῦ 2150, 2, 5, 5, 43, καὶ διὰ τοὺς ἁπλοῦς διαιρέτας τοῦ 3612, 2, 2, 3, 7, 43.

δύο ἀριθμῶν, καὶ ἰδοὺ τίνι τρόπῳ προσδιορίζομεν αὐτόν;

(Διὰ συντομίαν τῆς γραφῆς σημειόνομεν διὰ τριῶν ψηφίων μ. κ. δ. τὰς τρεῖς λέξεις μέγιστος κοινὸς διαιρέτης).

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν μ. κ. δ. μεταξὺ πολλῶν ἀριθμῶν, πρέπει κατὰ πρῶτον νὰ ζητήσωμεν τὸν μ. κ. δ. μεταξὺ δύο τούτων τῶν ἀριθμῶν, μετὰ ταῦτα μεταξὺ τοῦ εὑρεθέντος καὶ ἑνὸς τρίτου ἀριθμοῦ, μετὰ ταῦτα μεταξὺ τούτου τοῦ τελευταίου, καὶ ἑνὸς τετάρτου ἀριθμοῦ . . . . .

Ἔστωσαν A, B, Γ, Δ, E, Z, ... οἱ προτεθέντες ἀριθμοὶ, καὶ ἄς καλέσωμέν Δ τὸν μ. κ. δ. μεταξὺ τοῦ A καὶ B, Δ′ τὸν μ. κ. δ. μεταξὺ τοῦ Δ καὶ Γ, λέγω πρῶτον, ὅτι Δ′ εἶναι μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τοῦ A, B, Γ. Τῷ ὄντι ὁ μ. κ. δ. τοῦ A, B, καὶ Γ, ἐπειδὴ ἔχει νὰ διαιρέσῃ A καὶ B, διαιρεῖ Δ, ὅς τις εἶναι ὁ μ. κ. δ. αὐτῶν (ὅρα ἀρ. 153), περιπλέον διαιρεῖ καὶ τὸ Γ, διὰ τοῦτο πρέπει νὰ διαιρῇ καὶ Δ′, ὅς τις εἶναι ἐξ ὑποθέσεως ὁ μ. κ. δ. τοῦ Δ καὶ Γ. Προσέτι δὲ Δ′ διαιρῶν Δ, διαιρεῖ A καὶ B· οὕτως Δ′ διαιρεῖ A, B, Γ, καὶ ἐπομένως εἶναι ὁ μ. κ. δ. αὐτῶν. Λοιπὸν οὗτος ὁ τελευταῖος ἀριθμὸς καὶ Δ′ εἶναι ἀμοιβαίως διαιρετοὶ ὁ εἷς διὰ τοῦ ἄλλου, καὶ διὰ τοῦτο εἶναι ἴσοι.

Παρομοίως ὁ μ. κ. δ. μεταξὺ A, B, Γ, E, ἐπειδὴ μέλλει νὰ διαιρῇ A, B, Γ, διαιρεῖ καὶ τὸ Δ′, τὸ ὁποῖον εἶναι ὁ μ. κ. δ. αὐτῶν, προσέτι διαιρεῖ τὸ E, οὕτως πρέπει νὰ διαιρῇ τὸν μ. κ. δ. Δ″ τοῦ Δ′ καὶ E. Προσέτι ἐπειδὴ Δ″ διαιρῶν Δ′, διαιρεῖ καὶ A, B, Γ, οὕτω Δ″ διαιρεῖ A, B, Γ, E, καὶ διὰ τοῦτο τὸν μ. κ. δ. αὐτῶν. Οὗτος ὁ τελευταῖος ἀριθμὸς καὶ Δ″

ὄντες ἀμοιβαίως διαιρετοὶ ὁ εἷς διὰ τοῦ ἄλλου, εἶναι ἴσοι, καὶ οὕτω καθεξῆς.

Σ. Κ. Ἐννοεῖται ἡ ὠφέλεια ἐν γένει, τοῦ νὰ ἐργαζώμεθα κατὰ πρῶτον ἐπὶ τῶν δύο ἁπλουστέρων ἀριθμῶν, ἐπειδὴ ὁ ζητούμενος μ. κ. δ. δὲν δύναται νὰ ὑπερβαίνῃ ἐκεῖνον, ὅς τις ὑπάρχει μεταξὺ τῶν δύο τούτων ἀριθμῶν· εὑρίσκομεν διὰ τῆς τοιαύτης πράξεως, ὅτι οἱ ἀριθμοὶ 504, 756, 1260 καὶ 2058 ἔχουσι μ. κ. δ. τὸν 42.

Ἦτον ἐπίσης δυνατὸν νὰ ἀναλύσωμεν τοὺς τέσσαρας ἀριθμοὺς εἰς τοὺς ἁπλοῦς των διαιρέτας, καὶ νὰ ἐκτελέσωμεν ἐπὶ αὐτῶν τὸ ὅ,τι εἴπομεν εἰς τὸν ἀριθμὸν 154.

§. 157. Παρατηρήσεις περὶ τῶν ἀναγώγων κλασμάτων.

Καλοῦμεν (ἀρ. 51) κλάσμα ἀνάγωγον ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον δὲν ἐκφράζεται δι' ἁπλουστέρων ὅρων. Ἕπεται προδήλως ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τούτου, ὅτι οἱ δύο ὅροι τοῦ ἀναγώγου κλάσματος εἶναι πρῶτοι μεταξύ των· ἐπειδὴ ἐὰν εἶχαν κοινὸν παράγοντα, ἠθέλαμεν ἠμπορέσει νὰ τοὺς διαιρέσωμεν δι' αὐτοῦ, καὶ νὰ λάβωμεν ἁπλούστερον κλάσμα, τὸ ὁποῖον ἤθελεν εἶναι ἐναντίον τῆς ὑποθέσεως.

Ἀντιστρόφως, κάθε κλάσμα, τοῦ ὁποίου οἱ δύο ὅροι εἶναι πρῶτοι μεταξύ των, εἶναι ἀνάγωγον.

Τῷ ὄντι ἂς σημειώσωμεν διὰ $\frac{\alpha}{\beta}$ τὸ δεδομένον κλάσμα, τοῦ ὁποίου οἱ ὅροι εἶναι καθ' ὑπόθεσιν πρῶτοι μεταξύ των, καὶ ἔστω ἄλλο κλάσμα $\frac{\gamma}{\delta}$ ἴσον μὲ τὸ πρῶτον.

Ἔχομεν λοιπὸν $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$· ὅθεν ἐξάγομεν $\gamma=\frac{\alpha\delta}{\beta}$,

ἀλλὰ γ εἶναι ἀκέραιος ἀριθμός· λοιπὸν $\frac{\alpha\delta}{\beta}$ πρέπει νὰ ἦναι καὶ αὐτὸ ἀκέραιος ἀριθμός· ἀλλ' ἐξ ὑποθέσεως β εἶναι πρῶτος μὲ τὸ α, διὰ τοῦτο (ἀρ. 132) β πρέπει νὰ διαιρῇ δ, καὶ οὕτως ἔχομεν $\delta=\beta\varkappa$. Ἀντεισάγοντες ταύτην τὴν τιμὴν τοῦ δ εἰς τὴν ἔκφρασιν τοῦ γ, λαμβάνομεν $\gamma=\frac{\alpha\beta\varkappa}{\beta}=\alpha\varkappa$. Τοῦτο μᾶς δείχνει προδήλως, ὅτι τὸ κλάσμα $\frac{\gamma}{\delta}$, διὰ νὰ ἦναι ἰσοδύναμον μὲ ἄλλο κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$, τοῦ ὁποίου οἱ δύο ὅροι εἶναι πρῶτοι μεταξύ των, πρέπει οἱ δύο ὅροι γ καὶ δ νὰ ἦναι οἱ αὐτοὶ πολλαπλάσιοι τοῦ α καὶ β.

Λοιπὸν $\frac{\alpha}{\beta}$ δὲν δύναται νὰ ἦναι ἰσοδύναμον μὲ κἀνὲν ἄλλο ἁπλούστερον κλάσμα. Ἕπεται ἐκ τούτου, ὅτι ἀφ' οὗ διαιρέσωμεν τοὺς δύο ὅρους ἑνὸς κλάσματος διὰ τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου των, τὸ ἐξαγόμενον κλάσμα εἶναι ἀνάγωγον· πρότασις, τὴν ὁποίαν ἐκφράσαμεν (ἀρ. 5.), ἀλλὰ δὲν τὴν ἀπεδείξαμεν.

Συμπεραίνομεν προσέτι, ὅτι δύο ἀνάγωγα κλάσματα δὲν δύνανται νὰ ἦναι ἴσα, ἐκτὸς, ἐὰν οἱ ἀριθμηταὶ καὶ παρονομασταί των ἦναι ἴσοι.

Τῷ ὄντι, τὸ πρῶτον ὂν ἀνάγωγον πρέπει νὰ ἔχῃ τοὺς δύο ὅρους του πρώτους μεταξύ των. Λοιπὸν, διὰ νὰ ἦναι τὸ δεύτερον ἴσον μὲ αὐτὸ, πρέπει οἱ δύο του ὅροι νὰ ἦναι τὰ ἴδια πολλαπλάσια τῶν δύο ὅρων τοῦ πρώτου, καὶ ἐπειδὴ τοῦτο τὸ δεύτερον κλάσμα ἔχει παρομοίως τοὺς δύο του ὅρους πρώτους μεταξύ των, πρέπει ἁπλῶς νὰ ἦναι ἴσοι μὲ τοὺς δύο ὅρους τοῦ πρώτου.

§. γ'. Περὶ τῶν περιοδικῶν δεκαδικῶν κλασμάτων.

§. 158. Εἰς τὴν ἐκτίμησιν κοινοῦ τινὸς κλάσματος εἰς δεκαδικὸν κλάσμα, τουτέστι εἰς δεκατημόρια, ἑκατοστημόρια τῆς ἀρχικῆς μονάδος, ἀκολουθοῦν ἰδιαίτεραι τινὲς καὶ ἄξιαι ἐξετάσεως περιστάσεις· ἀλλὰ πρὶν νὰ ἐρευνήσωμεν αὐτὰς, εἶναι ἀνάγκη νὰ ἐπιστρέψωμεν ἐπὶ τοῦ τρόπου, διὰ τοῦ ὁποίου τρέπομεν κοινόν τι κλάσμα εἰς δεκαδικόν.

Ἴδομεν (ἀριθμ. 88), ὅτι διὰ νὰ ἐκτελέσωμεν ταύτην τὴν ἀναγωγὴν, πρέπει, ἀφ' οὗ γράψωμεν 0 εἰς τὸ πηλίκον, καὶ ὑποστιγμὴν εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ μηδενικοῦ, 1ον. Νὰ προσθέσωμεν εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ ἀριθμητοῦ ἓν 0, καὶ νὰ διαιρέσωμεν τὸν ἐξαγόμενον ἀριθμὸν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ· αὕτη ἡ πρᾶξις δίδει εἰς τὸ πηλίκον δεκατημόρια, καὶ ἕν τι ὑπόλοιπον. 2ον. Νὰ γράψωμεν νέον 0 εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ ὑπολοίπου, καὶ νὰ διαιρέσωμεν τὸν ἐξαγόμενον ἀριθμὸν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ, διὰ τῆς ὁποίας πράξεως εὑρίσκομεν εἰς τὸ πηλίκον ἑκατοστημόρια, καὶ δεύτερον ὑπόλοιπον. 3ον. Νὰ προσθέσωμεν εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ ὑπολοίπου νέον 0, καὶ νὰ διαιρέσωμεν τὸν ἐξαγόμενον ἀριθμὸν διὰ τοῦ παρονόματου· ἐξακολουθοῦμεν δὲ ταύτην τὴν σειρὰν τῶν πράξεων, ἕως νὰ λάβωμεν τὸν βαθμὸν τῆς προσεγγίσεως, τὴν ὁποίαν θέλομεν.

Ἀλλ' εἶναι φανερὸν, ὅτι τὸ νὰ προσθέτωμεν διαδοχικῶς εἰς τὰ δεξιὰ τῶν διαφόρων ὑπολοίπων τοσάκις τὸ μηδὲν, ὅσα ψηφία δεκαδικὰ θέλομεν νὰ λάβωμεν, εἶναι τὸ αὐτὸ, ὡς νὰ τὰ θέτωμεν ὅλα ταῦτα τὰ μηδενικὰ ἐν ταυτῷ κατ' ἐξακολούθησιν εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ ἀριθμητοῦ τοῦ διαιρουμένου κλάσματος, τουτέστι νὰ

πολλαπλασιάζωμεν τὸν ἀριθμητὴν ἐπὶ τὴν μονάδα ἀκολουθημένην ἀπὸ τόσα μηδενικὰ, ὅσα ψηφία δεκαδικὰ θέλομεν νὰ εὕρωμεν, καὶ νὰ διαιρῶμεν τὸ συναγόμενον γινόμενον διὰ τοῦ παρονομαστοῦ, καὶ νὰ χωρίζωμεν ἔπειτα πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ πηλίκου, τὸν ἀριθμὸν τῶν ζητουμένων δεκαδικῶν ψηφίων· ἐπειδὴ κατὰ τὴν κοινὴν μέθοδον τῆς διαιρέσεως τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν, καταβιβάζομεν διαδοχικῶς εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ ὑπολοίπου τὰ μηδενικὰ, τὰ ὁποῖα ἐγράψαμεν ὅλα κατ' ἐξακολούθησιν. Αὕτη ἡ παρατήρησις θέλει μᾶς χρησιμεύσει εἰς τὴν ἀπόδειξιν τῶν δύο ἀκολούθων ἰδιοτήτων.

§. 159. 1^{ον}. Κάθε κοινὸν κλάσμα, τοῦ ὁποίου ὁ παρονομαστὴς δὲν περιέχει ἄλλους πρώτους παράγοντας, εἰμὴ 2 καὶ 5, ἄγεται εἰς πεπερασμένον τινὰ ἀριθμὸν δεκαδικῶν ψηφίων· τουτέστι ὕστερον ἀπὸ κάποιον ἀριθμὸν ἐργασιῶν θέλομεν φθάσει εἰς ὑπόλοιπον ἴσον μὲ τὸ μηδέν. Εἰς ταύτην τὴν περίστασιν τὸ ληφθὲν δεκαδικὸν κλάσμα ἐκφράζει ἀκριβῆ τιμὴν τοῦ δεδομένου κλάσματος.

Περιπλέον, ἐὰν τὸ κλάσμα ἦναι ἠγμένον εἰς τὴν ἁπλουστέραν του μορφὴν (τὸ ὁποῖον δυνάμεθα πάντοτε νὰ ὑποθέτωμεν), ὁ ὅλος ἀριθμὸς τῶν πράξεων, τὰς ὁποίας ἔχομεν νὰ ἐκτελέσωμεν, σημειοῦται διὰ τοῦ μεγαλητέρου τῶν ἐκθετῶν 2 καὶ 5, τῶν εἰσερχομένων εἰς τὸν παρονομαστήν.

Οὕτως τὰ κλάσματα $\frac{7}{8}$, $\frac{13}{25}$, $\frac{11}{40}$, $\frac{317}{1250}$, τὰ ὁποῖα δύνανται προφανῶς νὰ τεθῶσιν εἰς τὴν ἀκόλουθον μορφήν· $\frac{7}{2^3}$, $\frac{13}{5^2}$, $\frac{11}{2^3.5}$, $\frac{317}{2.5^4}$, ἄγονται εἰς πεπερασμένον ἀριθμὸν δεκαδικῶν ψηφίων.

Τὸ πρῶτον καὶ τρίτον εἶναι δεκτικὰ τριῶν ἐργασιῶν, τὸ δεύτερον, δύο, καὶ τὸ τέταρτον, τεσσάρων.

Καὶ τῷ ὄντι εὑρίσκομεν τὰς τιμάς των,

0,875 0,52· 0,275· 0,2536·

Τὸ ὁποῖον δυνάμεθα μὲ εὐκολίαν νὰ βεβαιώσωμεν ἐκτελοῦντες τὴν ἀναγωγήν των εἰς δεκαδικὰ κατὰ τὸν κοινὸν τρόπον.

Διὰ νὰ δώσωμεν λόγον ταύτης τῆς ἰδιότητος, παρατηροῦμεν, ὅτι

10, 100, 1000 . . . . . . ὄντων ἴσων μὲ 2.5, $2^2.5^2$, $2^3.5^3$ . . . . ἐὰν διὰ νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν ἀναγωγὴν εἰς δεκαδικὸν κλάσμα, πολλαπλασιάσωμεν (ἀριθμ. 158) τὸν ἀριθμητὴν ἐπὶ 10, 100, 1000· . . . . . τὸ συναγόμενον γινόμενον εἶναι διαιρετὸν διὰ 2.5, $2^2.5^2$, $2^3.3^3$ . . . . . . λοιπὸν πολλαπλασιάζοντες τὸν ἀριθμητήν του ἐπὶ τὴν μονάδα ἀκολουθημένην ἀπὸ τόσα μηδενικά, ὅσαι μονάδες εὑρίσκονται εἰς τὸν μεγαλήτερον ἀπὸ τοὺς ἐκθέτας τοῦ 2 καὶ 5, τοὺς ὁποίους περιέχει ὁ παρονομαστὴς, τὸ συναγόμενον γίνεται ἐξ ἀνάγκης πολλαπλάσιον τοῦ παρονομαστοῦ.

Λοιπὸν ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐργασιῶν, αἱ ὁποῖαι πρέπει νὰ ἐκτελεσθῶσιν, εἶναι περιωρισμένος, καὶ ἴσος μὲ τὸν μεγαλήτερον ἀπὸ τοὺς δύο ἐκθέτας τοῦ 2 καὶ 5, οἱ ὁποῖοι περιέχονται εἰς τὸν παρονομαστήν.

§. 160. Κάθε κοινὸν κλάσμα, τοῦ ὁποίου ὁ παρονομαστὴς περιέχει ἕνα ἢ πολλοὺς πρώτους παράγοντας διαφορετικοὺς τοῦ 2 καὶ 5, καὶ οἱ ὁποῖοι ἐν ταυτῷ δὲν περιέχονται εἰς τὸν ἀριθμητήν του, δίδει ἀριθμὸν ἀπεριόριστον, ἢ ἄπειρον δεκαδικῶν ψηφίων. Περιπλέον τὸ λαμβανόμενον δεκαδικὸν κλάσμα εἶναι περιοδικὸν, τουτέστι μετά τινα ἀριθμὸν ἐργασιῶν τὰ αὐτὰ δεκαδικὰ ψηφία ἀναγεννῶνται μὲ τὴν αὐτὴν τάξιν.

Τῷ ὄντι ὁ πολλαπλασιασμὸς τοῦ ἀριθμητοῦ ἐπὶ 10, 100, 1000 . . . . . . εἰσάγει τοὺς πρώτους παράγοντας 2 καὶ 5 ἕκαστον εἰς μίαν τινὰ δύναμιν· καὶ οὕτως ὁ πρῶτος παράγων, τὸν ὁποῖον ὑποθέτομεν, ὅτι εὑρίσκεται εἰς τὸν παρονομαστὴν χωρὶς νὰ εἰσέρχεται εἰς τὸν ἀριθμητὴν, δὲν θέλει εὑρεθῆ (ἀρθμ. 136) εἰς τὸ γινόμενόν τοῦ ἀριθμητοῦ ἐπὶ ὁποιανδήποτε δύναμιν τοῦ 10. Λοιπὸν ὁποιονδήποτε ἀριθμὸν μηδενικῶν καὶ ἂν προσθέσωμεν, δὲν δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν γινόμενον ἀκριβῶς διαιρετὸν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ, καὶ οὕτως αἱ πράξεις ἐξακολουθοῦται ἕως εἰς τὸ ἄπειρον.

Λέγω περιπλέον, ὅτι τὸ κλάσμα θέλει εἶναι περιοδικόν. Τῷ ὄντι ἐπειδὴ κατὰ τὸν τρόπον τοῦ ἀριθμοῦ 88, ἕκαστον ὑπόλοιπον, τὸ ὁποῖον λαμβάνομεν, εἶναι κάτιτι μικρότερον τοῦ διαιρέτου, ὅστις μένει σταθερὸς, ἕπεται ἐκ τούτου, ὅτι ὅταν κάμωμεν τὸ περισσότερον τόσας πράξεις, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ διαιρέτης μεῖον μιᾶς, πρέπει νὰ συναπαντήσωμεν ἓν τῶν προευρεθέντων ὑπολοίπων.

Ἀλλὰ προσθέτοντες 0 εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ ὑπολοίπου, θέλομεν εὕρει νέον μερικὸν διαιρετέον ὅμοιον μὲ ἕνα τῶν προτέρων· καὶ ἐπειδὴ ὁ διαιρέτης εἶναι ὁ αὐτὸς, τὸ νέον πηλίκον, καὶ τὸ νέον ὑπόλοιπον θέλουν εἶναι παρομοίως ὅμοια μὲ ἐκεῖνα, τὰ ὁποῖα ἔδωκαν τὸν πρῶτον εὑρεθέντα διαιρετέον καὶ διαιρέτην. Προσθέτοντες εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ ὑπολοίπου νέον 0, ξαναευρίσκομεν τὸν μερικὸν διαιρετέον, ὅστις ἀμέσως ἀκολουθεῖ ἐκεῖνον, τὸν ὁποῖον πρῶτον εἴχομεν εὕρει, καὶ ἑπομένως τὸ πηλίκον, τὸ ὁποῖον λαμβάνεται ὕστερον ἀπὸ ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον εἴχαμεν εὕρει, καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

Πρέπει λοιπὸν τινὰ ψηφία τοῦ πηλίκου νὰ ξαναναφανοῦν περιοδικῶς, καὶ κατὰ τὴν ἀκόλουθον τάξιν. Ἂς κάμωμεν μερικὰς ἐφαρμογάς.

§. 161. Πρῶτον παράδειγμα. Ἂς προτεθῇ νὰ ἀνάξωμεν εἰς δεκαδικὰ τὸ κλάσμα $\frac{6}{7}$.

Ἀρκεῖ διὰ τοῦτο νὰ ἐφαρμόσωμεν τὸν κανόνα τοῦ ἀριθμοῦ 88. Ἐδῶ ἡ περίοδος ἀρχίζει ὕστερον ἀπὸ τὴν ἕκτην ἐργασίαν, τουτέστιν ὕστερον ἀπὸ τόσας ἐργασίας, ὅσαι μονάδες εἶναι εἰς τὸν παρονομαστὴν 7, ἐλαττουμένον ἀπὸ μίαν μονάδα.

```
60 | 7
   |----------------
   | 0, 857142|857142
 40
  50
   10
    30
     20
      6
```

Δεύτερον παράδειγμα. Ἔστω τὸ κλάσμα $\frac{13}{37}$.

Εἰς τοῦτο τὸ παράδειγμα ἡ περίοδος παῤῥησιάζεται μετὰ τὴν τρίτην ἐργασίαν· τουτέστι ταχύτερα ἀφ' ὅ,τι σημειόνει ὁ διαιρέτης 37.

```
130 | 37
    |----------
    | 0, 351|351
190
 50
 13
```

Τρίτον παράδειγμα. $\frac{147}{875}$.

Ἐδῶ τὸ δεκαδικὸν κλάσμα εἶναι πεπερασμένον, μ' ὅλον ὅτι ὁ παρονομαστὴς 875 ἢ 7.125 περιέχει τὸν παράγοντα 7· ἀλλὰ παρατηροῦμεν, ὅτι ὁ παράγων οὗτος εὑρίσκεται εἰς τὸν ἀριθμητὴν, καὶ ἐξαλείφοντές τον ἄνω καὶ κάτω, εὐ-

```
1470 | 875
     |--------
     | 0, 168
5650
 7000
 0000
```

ρίσκομεν $\frac{21}{125}$ ἢ $\frac{21}{5^3}$, κλάσμα, τὸ ὁποῖον (ἀριθμ. 159) δύναται νὰ ἀχθῇ εἰς ἀριθμὸν πεπερασμένον δεκαδικῶν ψηφίων.

Τέταρτον παράδειγμα. $\frac{29}{84}$.

```
290 | 84
    |----------------------
    | 0, 34523809|523809 . . .
 380
  440
   200
    328
     680
      800
       44
```

Ἡ περίοδος παῤῥησιάζεται εἰς τοῦτο τὸ παράδειγμα ὕστερον ἀπὸ τὴν ὀγδόην πρᾶξιν· ἀλλ' ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ παρατηρήσωμεν εἶναι, ὅτι τὰ δύο πρῶτα δεκαδικὰ ψηφία δὲν κάμνουν μέρος τῆς περιόδου, ἐν ᾧ εἰς τὰ δύο πρῶτα παραδείγματα ἡ περίοδος ἀρχίζει ἀπὸ τὸ πρῶτον δεκαδικὸν ψηφίον.

Τὰ περιοδικὰ δεκαδικὰ κλάσματα, τῶν ὁποίων ἡ περίοδος ἀρχίζει ἀπὸ τὸ πρῶτον δεκαδικὸν ψηφίον, καλοῦνται ἁπλᾶ περιοδικὰ κλάσματα· καὶ ἐκεῖνα, τῶν ὁποίων ἡ περίοδος ἀρχίζει ὕστερον ἀπὸ τὸ ψηφίον ὁποιασδήποτε τάξεως, καλοῦνται μικτὰ περιοδικὰ κλάσματα.

§. 162. Ἴδομεν ὅτι ἀπὸ μερικὰ κοινὰ κλάσματα ἀναχθέντα εἰς δεκαδικά, ἐξάγονται δεκαδικὰ περιοδικά.

Καὶ ἀντιστρόφως. Πᾶν περιοδικὸν δεκαδικὸν κλάσμα ἁπλοῦν ἢ μικτὸν προκύπτει ἀπὸ κοινόν τι κλάσμα, καὶ δυνάμεθα εὐκόλως νὰ εὕρωμεν τὸ κλάσμα, ἀπὸ τὸ ὁποῖον ἐγεννήθη.

Τὸ ζήτημα τοῦτο παῤῥησιάζει δύο χωριστὰς περιστάσεις, ἢ τὸ περιοδικὸν κλάσμα εἶναι ἁπλοῦν, ἢ εἶναι μικτόν.

Ἂς παρατηρήσωμεν κατ' ἀρχὰς τὴν πρώτην περίστασιν.

Ἔστω 0, αβγδε . . . . . αβγδε . . . . αβγδε τὸ δεδομένον δεκαδικὸν κλάσμα, καὶ ἂς παραστήσωμεν διὰ ν τὸν ἀριθμὸν τῶν ψηφίων, τὰ ὁποῖα περιέχει ἑκάστη περίοδος, καὶ διὰ χ' τὴν ἄγνωστον τιμὴν τοῦ κλάσματος.

Ἔχομεν λοιπὸν χ' = 0, αβγδε . . . . αβγδε . . . . αβγδε. (1).

Ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὰ δύο μέλη ταύτης τῆς ἰσότητος ἐπὶ 10ᵛ, ἢ ἐπὶ τὴν μονάδα ἀκολουθημένην ἀπὸ τόσα μηδενικά, ὅσα εἶναι τὰ ψηφία εἰς τὴν περίοδον, ἡ ὁποία πρᾶξις ἐκτελεῖται, προχωρούσης (ἀριθμ. 83) τῆς ὑποδιαστολῆς ν τάξεις κατὰ τὰ δεξιά,

Ἐντεῦθεν λαμβάνομεν 10ᵛ . χ', ἢ 100000 . . . χχ' = αβγδε . . . αβγδ. . . αβγδ, τουτέστιν 100000 . . . × χ' = αβγδε . . . + 0, αβγδε . . . αβγδε (2).

Ἐὰν ἤδη ἀφαιρέσωμεν τὴν ἰσότητα (1) ἀπὸ τὴν ἰσότητα (2), καὶ παρατηρήσωμεν ὅτι

$$100000\ldots \times \chi' - \chi' = (100000 - 1)\,\chi'$$

ἢ $= 99999\ldots \times \chi'$,

συνάγομεν. $99999\ldots \times \chi' = \alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\ldots$

Τέλος πάντων $\chi' = \dfrac{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\ldots}{99999\ldots}$

τὸ ὁποῖον φανερόνει, ὅτι περιοδικὸν δεκαδικὸν κλάσμα ἁπλοῦν εἶναι ἰσοδύναμον μὲ κοινὸν κλάσμα, τὸ ὁποῖον ἔχει δι' ἀριθμητὴν τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων τῆς περιόδου, καὶ παρονομαστὴν σύνθετον ἀπὸ τόσα 9, ὅσα ψηφία εἶναι εἰς τὴν περίοδον.

Οὕτως τὸ κλάσμα 0, 351351351 . . . εἶναι κατὰ τὸν κανόνα τοῦτον ἰσοδύναμεν μὲ τὸ κλάσμα $\frac{351}{999}$.

Τὸ τοιοῦτον κλάσμα γίνεται ἁπλούστερον, ὅταν παρατηρήσωμεν, ὅτι οἱ δύο του ὅροι εἶναι διαιρετοὶ διὰ τοῦ 9. Συνάγομεν δὲ διὰ τῆς ἐξαλείψεως τοῦ παράγοντος τούτου, $\frac{39}{111}$. Ἐξαλείφοντες ἐκ νέου τὸν παραγοντα 3, ὅστις καὶ αὐτὸς εἶναι κοινὸς, εὑρίκομεν τέλος πάντων τὸ ἀναχθὲν κλάσμα $\frac{13}{37}$, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ κλάσμα τοῦ δευτέρου παραδείγματος, περὶ οὗ ὅρα εἰς τὸν ἀριθμ. 161.

Ἔστω προσέτι τὸ κλάσμα 0,03960396 . . . .

Ἡ περίοδος εἶναι ἐδῶ 0396· λοιπὸν τὸ κλάσμα εἶναι ἰσοδύναμον μὲ $\frac{0396}{9999}$, ἢ ἁπλῶς $\frac{396}{9999}$.

(Ἐξαλείφομεν 0, ὡς ἀνωφελές· ὅμως ἔπρεπε νὰ βαστάξωμεν πρότερον λογαριασμὸν, ἐπειδὴ κάμνει μέρος τῶν ψηφίων τῆς περιόδου). Ὁ παράγων 9 μὲ τὸ νὰ εἶναι κοινὸς τῶν δύο ὅρων τούτου τοῦ ἐξαγομένου, τὸν ἐξαλείφομεν, καὶ συνάγομεν $\frac{44}{1111}$; κλάσμα, τοῦ ὁποίου οἱ δύο ὅροι εἶναι ἀκόμη διαιρετοὶ διὰ τοῦ 11, καὶ ἐξαλείφοντές το, λαμβάνομεν τέλος πάντων $\frac{4}{101}$ διὰ τὸ κλάσμα ἠγμένον εἰς τοὺς ἁπλουστέρους του ὅρους.

Σ. Κ. Ἐὰν τὸ περιοδικὸν κλάσμα περιεῖχεν ἀκέραια, ἐκάμναμεν κατὰ πρῶτον ἀφαίρεσιν τοῦ ἀκεραίου, μετὰ ταῦτα τὸ ἐπροσθέταμεν εἰς τὸ ἰσοδύναμον

κοινὸν κλάσμα, ἀφ' οὗ ἠθέλαμεν τὸ ἀνάξει εἰς τοὺς ἁπλουστέρουςτου ὅρους.

Οὕτως, ἂς ζητήσωμεν νὰ εὕρωμεν τὴν τιμὴν τῶν 4,162162 ....

Ἔχομεν κατὰ πρῶτον $0,162162\ldots = \frac{162}{999} = \frac{18}{111} = \frac{6}{37}$. Λοιπὸν $4,162162\ldots = 4\,\frac{6}{37} = \frac{154}{37}$.

§. 163. Ἂς ἔλθωμεν τώρα εἰς τὴν περίστασιν τῶν μικτῶν περιοδικῶν κλασμάτων.

Πρὸς ἀκριβεστέραν κατάληψιν ὑποθέτομεν, ὅτι ὑπάρχουσι τέσσαρα ψηφία πρὸ τῆς περιόδου, καὶ πέντε εἰς τὴν περίοδον· ἀλλ' ὁ τρόπος τοῦ συλλογισμοῦ δὲν θέλει εἶναι ὀλιγώτερον γενικός.

Ἔστω λοιπὸν 0, κπρσαβγδεαβγδε .... τὸ δεδομένον κλάσμα. Παρατηροῦμεν, ὅτι πολλαπλασιάζοντες καὶ διαιροῦντές το εἰς τὸν αὐτὸν καιρὸν διὰ τοῦ 100000, τὸ βάλλομεν ὑπὸ τὴν μορφήν.

$$\frac{1}{100000}\,(\text{κπρσ, αβγδεαβγδε}\ldots)$$

ἀλλ' ἡ ποσότης ἡ ἐντὸς τῆς παρενθέσεως ἰσοδυναμεῖ κατὰ τὸν εἰρημένον κανόνα μὲ $\text{κπρσ}+\frac{\text{αβγδε}}{99999}$, ἢ ἄγοντες τὸ ἀκέραιον εἰς κλάσμα, μὲ $\frac{\text{κπρσ}\times 99999+\text{αβγδε}}{99999}$.

Λοιπὸν τὸ ζητούμενον κλάσμα, τὸ ὁποῖον εἶναι 10000 φοραῖς μικρότερον, θέλει εἶναι ἴσον μὲ $\frac{\text{κπρσ}\times 99999+\text{αβγδε}}{999990000}$.

Τοῦτο μᾶς βεβαιόνει, ὅτι ὁποιονδήποτε μικτὸν περιοδικὸν κλάσμα, εἶναι ἰσοδύναμον μὲ κοινὸν κλάσμα, ἔχον ἀριθμητὴν μὲν τὴν περίοδον αὐξανομένην

ἐκ τοῦ γινομένου τοῦ μὴ περιοδικοῦ μέρους ἐπὶ ἀριθμόν τινὰ σύνθετον ἐκ τόσων 9, ὅσα ἔχει ψηφία ἡ περίοδος, παρονομαστὴν δὲ τὸν αὐτὸν τοῦτον ἀριθμὸν 9 ἀκολουθούμενον ἀπὸ τόσα μηδενικά, ὅσα ἔχει ψηφία τὸ μὴ περιοδικὸν μέρος.

Ἐὰν θεωρήσωμεν π.χ. τὸ κλάσμα 0,3193069306.

Κατὰ τὸν προειρημένον κανόνα ἔχομεν τὴν τιμήν του $\frac{9306+31\times9999}{999900}$.

Διὰ νὰ καταστήσωμεν ἁπλούστερον τοῦτο τὸ ἐξαγόμενον, παρατηροῦμεν, ὅτι 31×9999 εἶναι τὸ αὐτὸ ὡς $31\times(10000-1)$ ἢ $310000-31$· τουτέστιν ἀφ' οὗ προσθέσωμεν τέσσαρα μηδενικὰ εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ 31, ἀρκεῖ νὰ ἀφαιρέσωμεν 31 ἀπὸ τὸ ἐξαγόμενον, καὶ ἔχομεν 309969.

Προσθέτοντες εἰς τοῦτον τὸν ἀριθμόν, 9306, ἐξάγομεν $\frac{319275}{999900}$, κλάσμα, τὸ ὁποῖον ἀνάγεται εἰς $\frac{129}{404}$, ἀφ' οὗ οἱ δύο του ὅροι διαδοχικῶς διαιρεθῶσιν διὰ 9,25 καὶ 11, τῶν ὁποίων εἶναι προφανῶς κοινοὶ διαιρέται· (ὅρα τὰ συσταθέντα χαρακτηριστικὰ διὰ τοὺς τρεῖς τούτους ἀριθμούς).

Προβάλλομεν δὲ διὰ γύμνασιν τὰ κλάσματα 16,285714285714 ....., 4,9428571428571 ..., 5,52027027.

Τὰ κοινὰ κλάσματα, μὲ τὰ ὁποῖα εἶναι ἰσοδύναμα, ἄγονται εἰς ὅρους ἁπλουστάτους.

§. 164. Ὁ τύπος $\frac{\pi\kappa\rho\sigma\times99999+\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon}{999990000}$ μᾶς ἄγει εἰς ἀξιοπαρατηρήτους συνεπείας.

Δυνάμεθα νὰ θέσωμεν αὐτὸν ὑπὸ τὴν μορφὴν $\frac{\pi\kappa\rho\sigma.\ (100000 - 1) + \alpha\beta\gamma\delta\varepsilon}{999990000}$, ἢ καὶ κατ' ἄλλον τρόπον $\frac{\pi\kappa\rho\sigma\ 00000 - \pi\kappa\rho\sigma + \alpha\beta\gamma\delta\varepsilon}{999990000}$.

Τούτου τεθέντος, εἶναι φανερὸν, κατὰ τὸν τελευταῖον τύπον, ὅτι ἀφ' οὗ ἐκτελέσωμεν τοὺς ὑπολογισμοὺς, οἵτινες εἶναι σημειωμένοι εἰς τὸν ἀριθμητὴν, τὸ ἐξαγόμενον δὲν τελειόνει εἰς ἓν, ἢ περισσότερα μηδενικά· ἐπειδὴ, διὰ νὰ γένῃ τοῦτο, ἔπρεπε τινὰ τῶν τελευταίων ψηφίων τοῦ πκρσ, νὰ εἶναι τὰ αὐτὰ, ὡς τὰ τελευταῖα ψηφία τοῦ αβγδε, καὶ εἰς ταύτην τὴν περίστασιν, ἡ περίοδος δὲν ἤθελεν ἀρχίζει ἀπὸ τὸ τέταρτον δεκαδικὸν ψηφίον, καθὼς ὑπεθέσαμεν, (π. χ., ἐὰν εἴχαμεν σ=ε, ρ=δ, τὸ πρωτότυπον κλάσμα ἤθελεν εἶναι 0, πκδεαβγδεαβγδε . . . . καὶ ἡ περίοδος ἤθελεν ἀρχίζει ἀπὸ τὸ τρίτον ψηφίον, καὶ ἤθελεν εἶναι δεαβγ) . . . Βλέπομεν λοιπὸν, ὅτι μετὰ τὴν ἀναγωγὴν τῆς ἀνωτέρω ἐκφράσεως εἰς τοὺς ἁπλουστέρους ὅρους της, τὸ ἐξαγόμενον πρέπει νὰ ἦναι κλάσμα, τοῦ ὁποίου ὁ παρονομαστὴς περιέχει τοὺς δύο παράγοντας 2 καὶ 5, ἢ κἂν τὸν ἕνα τῶν δύο εἰς τὴν τετάρτην δύναμιν, τουτέστιν εἰς δύναμιν σημειωμένην διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν μὴ εὑρισκομένων ψηφίων εἰς τὴν περίοδον.

Ἐντεῦθεν ἐξάγομεν τὰς δύο ἀκολούθους προτάσεις.

1η. Κάθε κλάσμα, τοῦ ὁποίου ὁ παρονομαστὴς δὲν περιέχει κανένα τῶν δύο παραγόντων 2 καὶ 5, ἢ εἶναι πρῶτος μὲ 2 καὶ 5, δίδει, ὅταν εἰς δεκαδικὸν ἀχθῇ, Περιοδικὸν ἁπλοῦν κλάσμα.

Τῷ ὄντι, ἐὰν ἦναι δυνατὸν νὰ ἀχθῇ εἰς περιοδικὸν μικτὸν κλάσμα, τότε τὸ ἰσοδύναμον κοινὸν κλάσμα, εἰς τὸ ὁποῖον ἄγεται, κατὰ τὸν κανόνα τοῦ ἀριθμοῦ 163, ὅταν φερθῇ εἰς τοὺς ἁπλουστέρους του ὅρους, θέλει εἶναι ἴσον μὲ τὸ δεδομένον κλάσμα· ἀλλὰ τοῦτο εἶναι ἀδύνατον, ἐπειδὴ εἴδομεν (ἀριθμ. 157) ὅτι ἓν κλάσμα, τοῦ ὁποίου οἱ δύο ὅροι εἶναι πρῶτοι μεταξύ των, ἢ τὸ ὁποῖον εἶναι ἀνάγωγον, διὰ νὰ εἶναι ἴσον μ' ἄλλο κλάσμα, πρέπει νὰ εἶναι οἱ ὅροι του πολλαπλάσιοι τῶν τοῦ πρώτου ὅρων· ἤθελε δὲ προκύψει ἐκ τούτου ὅτι ὁ παρονομαστὴς τοῦ προτεθέντος κλάσματος ἦτον πολλαπλοῦς κατὰ 2 ἢ 5, τὸ ὁποῖον ἦτον ἐναντίον τῆς ὑποθέσεως.

2^α. Κάθε ἀνάγωγον κλάσμα, τοῦ ὁποίου ὁ παρονομαστὴς περιέχει ἕνα τῶν δύο παραγόντων 2 καὶ 5, ἢ καὶ τοὺς δύο ὑψωμένους ἕκαστον εἰς μίαν τινὰ δύναμιν, δίδει περιοδικὸν μικτὸν κλάσμα, τοῦ ὁποίου ἡ περίοδος πρέπει ν' ἀρχίζῃ ὕστερον ἀπὸ τόσα ψηφία, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ μεγαλήτερος τῶν δύο ἐκθετῶν τοῦ 2 καὶ 5, οἵτινες εὑρίσκονται εἰς τὸν παρονομαστήν.

Πρῶτον μὲν τὸ περιοδικὸν κλάσμα δὲν δύναται νὰ ἦναι ἁπλοῦν· ἐπειδὴ τοῦ τύπου τούτων ὄντος $\frac{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon \ldots}{99999}$, εἶναι ἀδύνατον, ὥστε τὸ κλάσμα τοῦτο, τοῦ ὁποίου ὁ παρονομαστὴς δὲν περιέχει οὐδένα τῶν παραγόντων 2 καὶ 5, νὰ εἶναι μετὰ τὴν ἀναγωγὴν εἰς τοὺς ἁπλουστέρους του ὅρους, ἴσον μὲ τὸ δεδομένον κλάσμα, τοῦ ὁποίου ὁ παρονομαστὴς περιέχει τοὺς αὐτοὺς τούτους παράγοντας.

Δεύτερον δὲ ἡ περίοδος πρέπει νὰ ἀρχίζῃ ὕστερον ἀπὸ ν ψηφία, ἐὰν ν παῤῥησιάζῃ τὸν μεγαλήτερον τῶν δύο ἐκθετῶν τοῦ 2 καὶ 5, ὅς τις εὑρίσκεται

εἰς τὸν παρονομαστήν· ἐπειδὴ, ὑποτιθεμένου π. χ. ὅτι ἀρχίζει μετὰ $\nu - 1$ ψηφία, τὸ ἰσοδύναμον κλάσμα μὲ τὸ περιοδικὸν τοῦτο κλάσμα ἤθελαν ἔχει παρονομαστὴν μὴ περιέχοντα τοὺς δύο παράγοντας 2 καὶ 5, ἢ τὸν ἕνα τούτων, παρὰ εἰς τὴν $\nu - 1$ δύναμιν, καὶ δὲν ἤθελεν εἶναι ἴσον μὲ τὸ δεδομέον κλάσμα· ἐπειδὴ ἄλλως τὰ τοιαῦτα δύο κλάσματα ὑπετέθησαν ἀνάγωγα.

Π. χ. Τὰ κλάσματα $\frac{6}{7}$, $\frac{13}{37}$ (ἀριθμ. 161) ἔδοσαν ἁπλᾶ περιοδικὰ κλάσματα· ἐπειδὴ 7 καὶ 37 εἶναι πρῶτα μὲ 2 καὶ 5· ἀλλὰ τὸ κλάσμα $\frac{29}{84}$ ἔδωκε περιοδικὸν κλάσμα, τοῦ ὁποίου ἡ περίοδος ἄρχιζε μετὰ τὸ δεύτερον ψηφίον, ἐπειδὴ 84 εἶναι ἴσον μὲ $2^2 . 21$.

Τέλος πάντων, τὸ κλάσμα $\frac{145}{176}$ δυνάμενον νὰ τεθῇ ὑπὸ τὴν μορφὴν $\frac{145}{2^4 . 11}$, δίδει περιοδικὸν κλάσμα, τοῦ ὁποίου ἡ περίοδος ἀρχίζει μετὰ τὸ τέταρτον δεκαδικὸν ψηφίον.

Εὑρίσκομεν τῷ ὄντι διὰ τὴν τιμὴν τούτου τοῦ κλάσματος εἰς δεκαδικὰ 0,8238636363 . . . .

§. 165. Δὲν ἐκτείνομεν περισσότερον τὴν ἐξέτασιν τῶν ἰδιοτήτων τῶν δεκαδικῶν περιοδικῶν κλασμάτων· ἀλλὰ παρατηροῦμεν μόνον, ὅτι ἀνάλογοι ἰδιότητες μὲ τὰς προηγουμένας παῤῥησιάζονται εἰς ὁποιονδήποτε σύστημα ἀριθμήσεως, ἔχον βάσιν β.

Κατὰ πρῶτον, διὰ νὰ ἀνάξωμεν κοινὸν κλάσμα εἰς ὑποδιαιρέσεις ἀνὰ β μικροτέρας τῆς μονάδος, πρέπει κατὰ τὸν κανόνα τοῦ ἀριθμοῦ 88 νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμητὴν ἐπὶ β ἢ 10, τουτέστι νὰ

προσθέσωμεν 0 εἰς τὰ δεξιά του, καὶ νὰ διαιρέσωμεν τὸ γινόμενον διὰ τοῦ παρονομαστοῦ, ἡ ὁποία πρᾶξις δίδει εἰς τὸ πηλίκον μονάδας ἀνὰ β μικροτέρας τῆς ἀρχικῆς μονάδος, καὶ ἔντι ὑπόλοιπον· καὶ νὰ γράψωμεν εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ ὑπολοίπου νέον 0, καὶ νὰ διαιρέσωμεν τὸ ἐξαγόμενον διὰ τοῦ παρονομαστοῦ, ἡ ὁποία πρᾶξις δίδει εἰς τὸ πηλίκον μονάδας ἀνὰ β μικροτέρας τῶν προτέρων, ἢ ἀνὰ β^2 μικροτέρας τῆς ἀρχικῆς μονάδος· καὶ οὕτω διαδοχικῶς. Ἀποδεχόμενοι δὲ τοῦτο ἔχομεν τὴν ἀκόλουθον θεωρίαν.

Κάθε κοινὸν κλάσμα, τοῦ ὁποίου ὁ παρονομαστὴς δὲν περιέχει ἄλλους πρώτους παράγοντας, εἰμὴ ἐκείνους, οἵτινες εἰσέρχονται εἰς τὴν βάσιν β, αναχθὲν εἰς ὑποδιαιρέσεις ἀνὰ β μικροτέρας τῆς μονάδος, δίδει χώραν εἰς κλάσμα ἐκ πεπερασμένου ἀριθμοῦ ψηφίων· ἀλλὰ κάθε ἀνάγωγον κλάσμα, τοῦ ὁποίου ὁ παρονομαστὴς περιέχει πρώτους παράγοντας, διαφορετικοὺς τῶν ὅσοι συνθέτουν τὴν βάσιν, δίδει χώραν εἰς κλάσμα ἐξ ἀπείρου ἀριθμοῦ ψηφίων καὶ περιοδικόν.

Καὶ οὕτω περὶ τῶν ἄλλων ἰδιοτήτων. Παραιτοῦμεν δὲ εἰς τοὺς μαθητὰς τὴν φροντίδα νὰ τὰς ἀναζητῶσι, καὶ νὰ τὰς ἐκφράζωσι καὶ νὰ τὰς ἀποδεικνύωσι.

§. δ'. Περὶ τῶν Συνεχῶν Κλασμάτων. *)

§. 166. Τὰ συνεχῆ κλάσματα ἔλαβαν τὴν ἀρχήν τους ἀπὸ τὰς ὡς ἔγγιστα γινομένας ἐκτιμήσεις τῶν κλασμάτων, τῶν ὁποίων οἱ ὅροι εἶναι μεγαλώτατοι, καὶ πρῶτοι μεταξύ των.

---

*) Μερικοὶ ἀριθμοὶ τούτου τοῦ παραγράφου ὑποθέτουσιν ἀλγεβραϊκὰς γνώσεις ὀλίγον τι πλέον ἐκτεταμένας, παρ' ἐκείνας,

Διὰ νὰ ἐξηγηθῶμεν καλήτερα, ἔστω τὸ κλάσμα $\frac{159}{495}$, τοῦ ὁποίου μ' εὐκολίαν βλέπομεν, ὅτι οἱ δύο ὅροι εἶναι πρῶτοι μεταξύ των, καὶ διὰ τοῦτο εἶναι (ἀριθμ. 157.) ἀνάγωγον.

Παραιτοῦντες τὸ κλάσμα εἰς ταύτην τὴν μορφὴν, εἶναι δύσκολον νὰ λάβωμεν καθαρὰν ἰδέαν περὶ αὐτοῦ. Ἐὰν ὅμως, κατὰ τὴν γνωστὴν ἀρχὴν, διαιρέσωμεν τοὺς δύο τοὺ ὅρους διὰ 159, πρᾶξις, ἥτις δὲν ἀλλάζει τὴν τιμήν του, ἄγεται εἰς $\left(\frac{11}{\frac{443}{159}}\right)$, ἢ ἐκτελουμένης τῆς σημειωμένης διαιρέσεως εἰς τὸν παρονομαστὴν, $\frac{1}{3+\frac{16}{159}}$.

Τούτου τεθέντος ἐξαλείφομεν ἀπὸ τὸν παρονομαστὴν τοῦ κλάσματος $\frac{16}{159}$, τὸ δὲ προκύπτον κλάσμα $\frac{1}{3}$ εἶναι ὀλίγον μεγαλήτερον τοῦ δεδομένου, ἐπειδὴ ὠλιγοστεύθη ὁ παρονομαστής.

Ἀπὸ ἄλλο μέρος, ἐὰν ἀντὶ νὰ ἀμελήσωμεν $\frac{16}{159}$ ἀντεισάξωμεν ἀντὶ τούτου τοῦ κλάσματος 1, ἐκ τοῦ

αἱ ὁποῖαι ἐτέθησαν εἰς τὴν εἰσαγωγὴν τοῦ πέμπτου κεφαλαίου, ὅμως οἱ μαθηταὶ ἠμποροῦν νὰ παραιτήσουν τοῦτον τὸν παράγραφον, ἀρκεῖ νὰ ἐπιστρέψωσιν, ὅταν λάβουν περισσοτέραν γύμνασιν εἰς τὰς ἀλγεβραϊκὰς ἐργασίας, ἢ ὅταν ἔχουν τὴν ἀνάγκην νὰ τὸν σπουδάσωσι.

ὁποίου ἠθέλαμεν ἔχει $\frac{1}{3+1}$ ἢ $\frac{1}{4}$, τοῦτο τὸ νέον κλάσμα εἶναι μικρότερον παρὰ τὸ δεδομένον, ἐπειδὴ ηὐξήσαμεν τὸν παρονομαστήν.

Συμπεραίνεται λοιπὸν, ὅτι τὸ $\frac{159}{493}$ περιέχεται μεταξὺ $\frac{1}{3}$ καὶ $\frac{1}{4}$· τοῦτο δίδει ἤδη ἀκριβεστάτην ἰδέαν τοῦ κλάσματος.

Ἐὰν θέλωμεν μεγαλητέραν προσέγγισιν, ἀρκεῖ νὰ πράξωμεν ἐπὶ $\frac{16}{159}$, ὡς ἐπράξαμεν ἐπὶ τοῦ $\frac{159}{493}$.

Καὶ προκύπτει $\frac{16}{159}=\frac{1}{\left(\frac{159}{16}\right)}=\frac{1}{9+\frac{15}{16}}$, καὶ τὸ δεδομένον γίνεται $\frac{1}{3+\frac{1}{9+\frac{15}{16}}}$.

Ἀμεληθέντος δὲ τοῦ $\frac{15}{16}$, τὸ $\frac{1}{9}$ εἶναι μεγαλήτερον τοῦ $\frac{16}{159}$· ὅθεν ἕπεται, ὅτι $\frac{1}{3+\frac{1}{9}}$ εἶναι μικρότερον τοῦ $\frac{159}{493}$· ἀλλὰ $\frac{1}{3+\frac{1}{9}}$, εἶναι τὸ αὐτὸ ὡς $\frac{1}{\left(\frac{28}{9}\right)}$ ἢ $\frac{9}{28}$· οὕτως τὸ δεδομένον περιέχεται μεταξὺ $\frac{1}{3}$ καὶ $\frac{9}{28}$.

Ἡ διαφορὰ τούτων τῶν δύο τελευταίων κλασμάτων, ἠγμένων εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν εἶναι $\frac{28-27}{84}$ ἢ $\frac{1}{84}$· λοιπὸν τὸ πραττόμενον σφάλμα, λαμβανομένου τοῦ $\frac{1}{3}$ διὰ τὴν τιμὴν τοῦ δεδομένου, εἶναι μικρότερον ἀπὸ $\frac{1}{84}$.

Πράττοντες ἐπὶ τοῦ $\frac{15}{16}$, ὡς ἐπράξαμεν εἰς τὰ ἀνώτερα, θέλομεν εὕρει, ὅτι $\frac{15}{16}=\frac{1}{\left(\frac{16}{15}\right)}=\frac{1}{1+\frac{1}{15}}$, καὶ τὸ δεδομένον κλάσμα δύναται νὰ τεθῇ ὑπὸ τὴν μορφὴν $\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{9+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{15}}}}$.

Καὶ ἐξαλειφομένου τοῦ $\frac{1}{15}$, ὁ ἀριθμὸς $\frac{1}{1}$, ἢ 1, εἶναι μείζων τοῦ $\frac{15}{16}$· λοιπὸν $\cfrac{1}{9+\cfrac{1}{1}}$ ἢ $\frac{1}{10}$ εἶναι μικρότερον τοῦ $\frac{16}{159}$, λοιπὸν $\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{9+\cfrac{1}{1}}}$ ἢ $\frac{1}{\left(\frac{3+1}{10}\right)}$ ἢ $\frac{10}{31}$ εἶναι μεῖζον τοῦ $\frac{159}{493}$.

Ὅθεν βλέπομεν, ὅτι $\frac{159}{493}$ περιέχεται μεταξὺ $\frac{9}{28}$ καὶ $\frac{10}{31}$· τὸ πρῶτον εἶναι μικρότερον, τὸ δὲ δεύτερον μεγαλήτερον.

Ἀλλ' ἡ διαφορὰ τούτων τῶν δύο κλασμάτων εἶναι $\frac{10}{31}-\frac{9}{28}$, ἢ $\frac{1}{868}$· οὕτως τὸ πραχθὲν σφάλμα, λαμβανομένου ἢ τοῦ $\frac{9}{28}$, ἢ τοῦ $\frac{10}{31}$ διὰ τὴν τιμὴν τοῦ δεδομένου κλάσματος, εἶναι μικρότερον παρὰ $\frac{1}{868}$.

Βλέπομεν ὅτι διὰ ταύτης τῆς σειρᾶς τῶν πράξεων, εὑρίσκομεν ὅρους ἁπλουστέρους κλασμάτων, τὰ ὁποῖα δίδουσι τὰς προσεγγιζούσας τιμὰς ἄλλου κλάσματος, τοῦ ὁποίου οἱ ὅροι εἶναι μεγαλώτατοι.

Τὸ κλάσμα $\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{9+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{15}}}}$ καλεῖται συνεχὲς κλάσμα.

Ἐν γένει ἐννοοῦμεν διὰ συνεχὲς κλάσμα, ἓν κλάσμα, τὸ ὁποῖον ἔχει ἀριθμητὴν τὴν μονάδα, καὶ παρονομαστὴν, ἀκέραιον ἀριθμὸν, πλέον ἓν κλάσμα, τὸ ὁποῖον καὶ αὐτὸ ἔχει ἀριθμητὴν τὴν μονάδα, καὶ παρονομαστὴν ἀκέραιον, πλέον ἓν κλάσμα· καὶ οὕτω διαδοχικῶς.

Πολλάκις ὁ δεδομένος κλασματικὸς ἀριθμὸς εἶναι μεγαλήτερος τῆς μονάδας.

Οὕτω διὰ νὰ γενικεύσωμεν τὸν ὁρισμὸν τοῦ συνεχοῦς κλάσματος, πρέπει νὰ εἴπωμεν· τὸ συνεχὲς

κλάσμα εἶναι ἔκφρασις σύνθετος ἀπὸ ἀκέραιον, πλέον κλάσμα, ἔχον ἀριθμητὴν τὴν μονάδα, καὶ παρονομαστὴν, καὶ ἐφεξῆς.

Τοιαύτη εἶναι ἡ ἔκφρασις $\alpha + \cfrac{1}{\beta + \cfrac{1}{\gamma + \cfrac{1}{\delta + \ldots}}}$ (α, β, γ, δ, . . . ὄντων τῶν ἀκεραίων παρονομαστῶν).

§. 167. Παρατηροῦντες τὴν ὁδὸν, τὴν ὁποίαν ἠκολουθήσαμεν, διὰ νὰ ἄξωμεν $\frac{159}{493}$ εἰς συνεχὲς κλάσμα, βλέπομεν, ὅτι ἐδιαιρέσαμεν κατὰ πρῶτον 493 διὰ 159, καὶ ἐλάβομεν πηλίκον 3, καὶ ὑπόλοιπον 16· μετὰ ταῦτα ἐδιαιρέσαμεν 159 διὰ 16, καὶ ἐλάβαμεν πηλίκον 9 καὶ ὑπόλοιπον 15· μετὰ ταῦτα ἐδιαιρέσαμεν 16 διὰ 15, καὶ ἐλάβαμεν πηλίκον 1 καὶ ὑπόλοιπον 1. Ἐκ τούτου εὐκόλως πορίζομεν τὸν ἀκόλουθον κανόνα. Διὰ νὰ ἄξωμεν κλάσμα, ἢ κλασματικὸν ἀριθμὸν εἰς συνεχὲς κλάσμα,

„Πράξε ἐπὶ τῶν δύο ὅρων τοῦ δεδομένου κλάσματος, ὡς ἐὰν ἐζητεῖτο ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης του (ὅρα ἀριθμ. 49.)

Προέκτεινε τὴν ἐργασίαν, ἕως νὰ συναπαντήσῃς ὑπόλοιπον ἴσον τῷ μηδενὶ, τὰ δὲ κατὰ διαδοχὴν λαμβανόμενα πηλίκα, θέλουν εἶναι οἱ παρονομασταὶ τῶν κλασμάτων οἱ συγκροτοῦντες τὸ συνεχὲς κλάσμα.

Ὅταν ὁ δεδομένος ἀριθμὸς ἦναι μείζων τῆς μονάδος, τὸ πρῶτον πηλίκον παριστάνει τὸ ἀκέραιον μέρος, τὸ ὁποῖον εἰσέρχεται εἰς τὴν ἔκφρασιν τοῦ συνεχοῦς κλάσματος.“

Δυνάμεθα κατὰ τοῦτον τὸν κανόνα νὰ ἀνάξωμεν εἰς συνεχὲς κλάσμα τοὺς δύο ἀριθμοὺς $\frac{65}{149}$ καὶ $\frac{829}{347}$.

Ἰδοὺ ὁ τύπος τῶν πράξεων.

1ον. $149 \left| \frac{65}{2} \right| \frac{19}{3} \left| \frac{8}{2} \right| \frac{3}{2} \left| \frac{2}{1} \right| \frac{1}{2}.$

Λοιπὸν $$\frac{65}{149}=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2.}}}}}}$$

2ον. $829 \left| \frac{347}{2} \right| \frac{135}{2} \left| \frac{77}{1} \right| \frac{58}{1} \left| \frac{19}{3} \right| \frac{1}{19}.$

Λοιπὸν $$\frac{829}{347}=2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{19.}}}}}$$

Τὰ συνεχῆ κλάσματα ἔχουσι μέγαν ἀριθμὸν ἰδιοτήτων, τῶν ὁποίων ἡ ἀναζήτησις ἐστάθη ἀντικείμενον τῶν ἀγώνων τῶν πλέον περιφήμων, Γεωμετρῶν. Θέλομεν δὲ ἐκθέσει ἐδῶ τὰς στοιχειώδεις ἰδιότητας, ἤτοι τὰς συνηθεστέρας, καὶ τῶν ὁποίων ἡ δεῖξις

ἐπιστηρίζεται εἰς τὰς πρώτας ἀρχὰς τῆς Ἀλγέβρας. Ἀποστέλλομεν δὲ τὸν ἀναγνώστην, ἂν ἀγαπᾷ εὐρυχωροτέρας περιγραφὰς, εἰς τὰς ἐν τῇ Ἀλγέβρᾳ τοῦ Εὐλέρου προσθήκας τοῦ Λαγραγγίου.

Ὁρισμοί.

§. 168. Ἄς λάβωμεν τὸ γενικὸν συνεχὲς κλάσμα

$$\alpha+\cfrac{1}{\beta+\cfrac{1}{\gamma+\cfrac{1}{\delta+\cfrac{1}{\varepsilon+\dots}}}}$$

τὸ ὁποῖον ὑποθέτομεν, ὅτι ἐκφράζει τὴν τιμὴν ἑνὸς κλάσματος ἀριθμοῦ σημειωμένου διὰ χ.

Καλοῦνται κλάσματα συστατικὰ, τὰ κλάσματα $\frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}, \frac{1}{\delta}$ . . τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα συσταίνει τὸ συνεχὲς κλάσμα, καὶ πηλίκα ἀτελῆ οἱ παρονομασταὶ β, γ, δ . . . . καλοῦνται οὕτως οἱ τοιοῦτοι παρονομασταὶ, ἐπειδὴ β π. χ. εἶναι τὸ ἀκέραιον τοῦ ἐκφραζομένου ἀριθμοῦ διὰ $\beta+\cfrac{1}{\gamma\times\cfrac{1}{\delta+\dots}}$, καὶ γ εἶναι τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ ἐκφραζομένου ἀριθμοῦ διὰ $\gamma+\cfrac{1}{\delta+\cfrac{1}{\varepsilon\dots}}$, καὶ οὕτως ἐφεξῆς. Ἐξ ἐναντίας ἔδωκαν τὸ ὄνομα πηλίκα τέλεια εἰς τὰς ἐκφράσεις $\beta+\cfrac{1}{\gamma+\cfrac{1}{\delta+\dots}}$ $\gamma+\cfrac{1}{\delta+\cfrac{1}{\varepsilon\dots}}$, τῶν ὁποίων τὰ β, γ, δ . . . εἶναι τὰ ἀκέραια μέρη.

Κάθε τέλειον πηλίκον περιέχει, ἐκτὸς τοῦ ἀκεραίου, τὸ ὁποῖον εἰς αὐτὸ περιέχεται, ὅλα τὰ ἀκόλουθα πηλίκα τοῦ συνεχοῦς κλάσματος, ἐπειδὴ ἐξ αἰτίας τῆς ἀναπτύξεως τοῦ τελείου πηλίκου εὑρίσκομεν ὅλα τὰ ἀκόλουθα πηλίκα. Τὸ τελευταῖον δὲ τέλειον πηλίκον, τὸ ὁποῖον εἶναι ὁ παρονομαστὴς τοῦ τελευταίου συστατικοῦ κλάσματος, εἶναι πάντοτε τοὐλάχιστον ἴσον μὲ 2, κατὰ τὸν τρόπον τοῦ ἀνάγειν κοινόν τι κλάσμα εἰς συνεχὲς κλάσμα (ἀριθμ. 167).

Καλοῦνται ἠγμένα, τὰ ἐξαγόμενα, τὰ ὁποῖα λαμβάνομεν, τρέποντες διαδοχικῶς εἰς ἕνα μόνον κλασματικὸν ἀριθμὸν ἑκάστην τῶν ἐκφράσεων $\alpha+\frac{1}{\beta}$, $\alpha+\frac{1}{\beta+\frac{1}{\gamma\ldots}}$,

Καλοῦνται προσέτι Συμπίπτοντα κλάσματα, ἐπειδὴ, ὡς θέλομεν ἀποδείξει εὐθὺς, τὰ τοιαῦτα ἐξαγόμενα πλησιάζουν βαθμηδὸν τὸν εἰς συνεχὲς κλάσμα ἠγμένον ἀριθμὸν, ὅσον περισσότερα συστατικὰ κλάσματα λαμβάνομεν.

Σχηματισμὸς τῶν διαδοχικῶν ἠγμένων.

§. 169. Ἄς ἴδωμεν μήπως ὑπάρχῃ μέσον τι ἁπλοῦν καὶ εὔκολον εἰς τὸ νὰ σχηματίζωμεν τὰ διάφορα ἠγμένα.

Τὸ πρῶτον εἶναι α, τὸ ὁποῖον δυνάμεθα νὰ γράψωμεν οὕτως $\frac{\alpha}{1}$· τὸ δεύτερον $\alpha+\frac{1}{\beta}$, ἢ ἀναγομένου τοῦ ἀκεραίου εἰς κλάσμα, $\frac{\alpha\beta+1}{\beta}$.

Διὰ νὰ λάβωμεν τὸ τρίτον, τὸ ὁποῖον παῤῥησιάζεται διὰ $\alpha+\frac{1}{\beta+\frac{1}{\gamma}}$ ἀρκεῖ νὰ ἀντεισάξωμεν εἰς τὴν δευτέ-

ραν ἀντὶ τοῦ β τὸ $\beta+\frac{1}{\gamma}$· ἐπειδὴ σημειώνοντες $\beta+\frac{1}{\gamma}$ διὰ β′ ἔχομεν $\alpha+\frac{1}{\beta+\frac{1}{\gamma}}=\alpha+\frac{1}{\beta'}=\alpha+\frac{\alpha\beta'+1}{\beta'}$, ἔκφρασις, ἥτις δὲν διαφέρει τῆς $\frac{\alpha\beta+1}{\beta}$, εἰμὴ μόνον εἰς τοῦτο, ὅτι β′ ἢ $\beta+\frac{1}{\gamma}$ κρατεῖ τὸν τόπον τοῦ β.

Κάμνοντες λοιπὸν ταύτην τὴν ἀντεισαγωγὴν, ἔχομεν τὸ τρίτον ἠγμένον $\alpha+\frac{1}{\beta+\frac{1}{\gamma}}=\frac{\alpha\left(\beta+\frac{1}{\gamma}\right)+1}{\beta+\frac{1}{\gamma}}=\frac{\alpha\beta+\frac{\alpha}{\gamma}+1}{\beta+\frac{1}{\gamma}}$, ἢ ἀγομένων τῶν ἀκεραίων εἰς κλάσμα, καὶ πολλαπλασιαζομένων ἄνω καὶ κάτω ἐπὶ γ, τὸ $\frac{(\alpha\beta+1)\gamma+\alpha}{\beta\gamma+1}$.

Τὸ τέταρτον ἠγμένον θέλομεν λάβει παρομοίως, ἀντεισάγοντες εἰς τὸ τρίτον $\gamma+\frac{1}{\delta}$ ἀντὶ τοῦ γ, ἐκ τοῦ ὁποίου ἔχομεν $\alpha+\frac{1}{\beta+\frac{1}{\gamma+\frac{1}{\delta}}}=\frac{(\alpha\beta+1)\left(\gamma+\frac{1}{\delta}\right)+\alpha}{\beta\left(\gamma+\frac{1}{\delta}\right)+1}=\frac{(\alpha\beta+1)\gamma+\frac{\alpha\beta+1}{\delta}+\alpha.}{\beta\gamma+\frac{\beta}{\delta}+1.}$

Ἢ, ἀγομένων τῶν ἀκεραίων εἰς κλάσματα, καὶ πολλαπλασιαζομένων ἄνω καὶ κάτω ἐπὶ δ, ἔχομεν

$$\frac{[(\alpha\beta+1)\gamma+\alpha]\delta+\alpha\beta+1}{(\beta\gamma+1)\delta+\beta}.$$

Χωρὶς νὰ προχωρήσωμεν περισσότερον, βλέπομεν ἤδη, ὅτι ὁ ἀριθμητὴς τοῦ τρίτου ἠγμένου, λαμβάνεται πολλαπλασιαζομένου τοῦ ἀριθμητοῦ τοῦ δευτέρου ἐπὶ τὸ τρίτον πηλίκον γ, καὶ προστιθεμένου εἰς τὸ γινόμενον τοῦ ἀριθμητοῦ τοῦ πρώτου κλάσματος, ὁ δὲ παρονομαστὴς σχηματίζεται κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον διὰ μέσου τῶν παρονομαστῶν τοῦ δευτέρου καὶ πρώτου κλάσματος.

Ὁ ἀριθμητὴς καὶ ὁ παρονομαστὴς τοῦ τετάρτου ἠγμένου λαμβάνονται παρομοίως, πολλαπλασιζομένων ἠμοιβαίως τῶν δύο ὅρων τοῦ τρίτου ἐπὶ τὸ τέταρτον πηλίκον δ, καὶ προστιθεμένων εἰς τὰ δύο γινόμενα, τῶν δύο ὅρων τοῦ δευτέρου κλάσματος.

Ἐὰν προσέξωμεν εἰς τὸν τρόπον, καθ' ὃν τὸ τρίτον καὶ τέταρτον ἠγμένον ἐσχηματίσθησαν, καταλαμβάνομεν, ὅτι ὁ σχηματισμὸς πρέπει νὰ ἐξακολουθήσῃ καὶ εἰς τὰ ἄλλα ἠγμένα· ἀλλὰ διὰ νὰ δείξωμεν μ' ὅλην τὴν ἀκρίβειαν τὴν γενικότητα ταύτης τῆς προτάσεως, πρέπει νὰ προστρέξωμεν εἰς μέσον ἀνάλογον μὲ τὸ δειχθὲν (ἀριθμ. 128). Θέλομεν δὲ δείξει, ὅτι ὁ σχηματισμὸς οὗτος, ἀληθεύων εἰς τρία διαδοχικὰ ἠγμένα ὁποιουδήποτε βαθμοῦ, ἀληθεύει ἀκόμη καὶ εἰς τὴν ἀκόλουθον ἠγμένην· ἐπειδὴ ἀφ' οὗ ἐδείχθη ἀκριβὴς εἰς τὰ τρία πρῶτα ἠγμένα, θέλει εἶναι προσέτι καὶ εἰς τὸ τέταρτον· καὶ ἀληθεύων εἰς τοῦτο καὶ εἰς τὰ δύο προηγηθέντα, θέλει ἀληθεύσει καὶ εἰς τὸ πέμπτον, καὶ οὕτω διαδοχικῶς ἕως οὗ θέλωμεν.

Ἔστωσαν λοιπὸν $\frac{\Pi}{\Pi'}$, $\frac{K}{K'}$, $\frac{P}{P'}$, τρία διαδοχικὰ

ἡγμένα, ρ τὸ ἀτελὲς πηλίκον, εἰς τὸ ὁποῖον ἐμείναμεν διὰ τὸν σχηματσιμὸν τοῦ $\frac{P}{P'}$, καὶ ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἔχομεν $\frac{P}{P'}=\frac{K\rho+\Pi}{K'\rho+\Pi'}$. Ἂς προσθέσωμεν δὲ νέον συστατικὸν κλάσμα κατ' ἐξακολούθησιν τοῦ ρ, καὶ ἔτω $\frac{\Sigma}{\Sigma'}$, τὸ ἀνάλογον ἡγμένον· εἶναι φανερὸν, ὅτι, διὰ νὰ σχηματίσωμεν $\frac{\Sigma}{\Sigma'}$ πρέπει ἀφεύκτως νὰ ἀντεισάξωμεν εἰς τὴν ἔκφρασιν $\frac{P}{P'}$, $\rho+\frac{1}{\sigma}$, ἀντὶ τοῦ ρ, καὶ οὕτως ἔχομεν,

$$\frac{\Sigma}{\Sigma'}=\frac{K}{K'}\ \frac{(\rho+\frac{1}{\sigma})+\Pi}{(\rho+\frac{1}{\sigma})+\Pi'}=\frac{(K\rho+\Pi)\sigma+K'}{(K'\rho+\Pi')\sigma+K'}=\frac{P\sigma+K}{P'\sigma+K'}.$$

Καὶ βλέπομεν, ὅτι $\frac{\Sigma}{\Sigma'}$ ἐξάγεται ἐκ τῶν δύο προτέρων, κατὰ τὸν ἐκφρασθέντα ἀνωτέρω νόμον. Λοιπὸν ὁ νόμος τοῦ σχηματισμοῦ εἶναι γενικός.

Οὕτως ὁ ἀριθμητὴς ὁποιουδήποτε ἡγμένου σχηματίζεται, πολλαπλασιαζομένου τοῦ ἀριθμητοῦ τοῦ προηγουμένου ἡγμένου ἐπὶ τὸ ἀτελὲς πηλίκον, τὸ ὁποῖον τοῦ ἀνταποκρίνεται, καὶ προστιθεμένου εἰς τὸ γινόμενον τοῦ ἀριθμητοῦ τοῦ ἡγμένου, τὸ ὁποῖον προηγεῖται δύο βαθμοὺς ἀπὸ ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον θέλομεν νὰ σχηματίσωμεν· ὁ παρονομαστὴς σχηματίζεται κατὰ τὸν αὐτὸν νόμον μὲ τοὺς δύο προηγουμένους παρονομαστάς.

Σ. Κ. Ὅταν ὁ ἀριθμὸς εἰς συνεχὲς κλάσμα ἢ χ εἶναι μικρότερος τῆς μονάδος, ἀντεισάγομεν $\frac{0}{1}$, ἀν-

τὶ τοῦ α, διὰ νὰ ἐφαρμόσωμεν τὸν νόμον, ὅστις ὑποθέτει ἐξ ἀνάγκης προσχηματισμένα τὰ δύο πρῶτα ἠγμένα.

Ἂς προτεθῇ ὡς πρῶτον παράδειγμα νὰ σχηματίσωμεν τὰ διαδοχικὰ ἠγμένα τοῦ συνεχοῦς κλάσματος.

$$\frac{64}{149}=\cfrac{0}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}}}}}$$

Ἔχομεν διὰ τὰ πρῶτα δύο ἠγμένα $\frac{0}{1}$ καὶ $\frac{1}{2}$.

Διὰ νὰ σχηματίσωμεν τὸ τρίτον, πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀριθμητὴν 1 τοῦ δευτέρου ἐπὶ 3, καὶ προσθέτομεν 0 εἰς τὸ γινόμενον· πολλαπλασιάζομεν μετὰ ταῦτα τὸν παρονομαστὴν 2 τοῦ δευτέρου ἐπὶ 3 καὶ προσθέτομεν εἰς τὸ γινόμενον τὸν παρονομαστὴν 1 τοῦ πρώτου· ἐντεῦθεν προκύπτει $\frac{3}{7}$.

Εὑρίσκονται παρομοίως τὰ ἀκόλουθα ἠγμένα $\frac{7}{16}$, $\frac{17}{39}$, $\frac{24}{55}$, $\frac{65}{149}$.

Παρομοίως λαμβάνονται τὰ διάφορα ἠγμένα τοῦ συνεχοῦς κλάσματος τοῦ προερχομένου ἀπὸ $\frac{829}{347}$. (ὅρα ἀρθμ. 167.)

$\frac{2}{1}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{7}{3}$, $\frac{12}{5}$, $\frac{43}{18}$, $\frac{829}{347}$.

§. 170. Συνέπεια τοῦ προηγουμένου νόμου. Ἕπεται προφανῶς ἐκ τοῦ νόμου τούτου, ὅτι οἱ ὅροι τῶν διαφόρων ἡγμένων αὐξάνουσι, καθ' ὅσον αὐξάνει ὁ ἀριθμὸς τῶν συστατικῶν κλασμάτων· ἐπειδὴ ὁ ἀριθμητὴς ἢ ὁ παρονομαστὴς ὁποιουδήποτε ἡγμένου εἶναι τοὐλάχιστον ἴσος μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμητῶν ἢ τῶν παρονομαστῶν τῶν δύο ἡγμένων, τὰ ὁποῖα προηγοῦνται τούτου.

Ἰδιότητες τῶν Ἡγμένων.

§. 171. Πρώτη ἰδιότης. Ἐὰν λάβωμεν εἰς τὰ ἀνωτέρω δύο παραδείγματα τὴν διαφορὰν μεταξὺ δύο τινῶν διαδοχικῶν ἡγμένων, μὲ τὴν συνθήκην νὰ ἀφαιρῶμεν πάντοτε τὸ ἡγμένον, ἀπ' ἐκεῖνο τὸ ὁποῖον τῷ ἀκολουθεῖ, θέλομεν εὕρει πάντοτε διὰ τὸν ἀριθμητὴν ταύτης τῆς διαφορᾶς +1 ἢ —1, κατὰ τὸν ἄρτιον ἢ περιττὸν βαθμὸν τῆς δευτέρας τῶν δύο ἡγμένων, τὴν ὁποίαν θεωροῦμεν. Ὁ παρονομαστὴς ταύτης τῆς διαφορᾶς εἶναι προσέτι πάντοτε ἴσος μὲ τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν τῶν δύο ἡγμένων.

Οὕτως εἰς τὸ πρῶτον παράδειγμα, ἔχομεν,

$$\frac{1}{2}-\frac{0}{1}=\frac{+1}{2\times1},\ \frac{3}{7}-\frac{1}{2}=\frac{-1}{2\times7},\ \frac{7}{16}-\frac{3}{7}=\frac{+1}{16\times7}.$$

Αὕτη ἡ ἰδιότης εἶναι γενική.

Διὰ νὰ τὴν ἀποδείξωμεν, ἃς λάβωμεν εἰς τὸ γενικὸν συνεχὲς κλάσμα, τρία διαδοχικὰ ἡγμένα $\frac{\Pi}{\Pi'}, \frac{K}{K'}, \frac{P}{P'}$.

Θέλομεν ἔχει $\frac{P}{P'}-\frac{K}{K'}=\frac{PK'-KP'}{P'K'}$.

Ἀλλὰ κατὰ τὸν ἀριθμὸν 169, $P=K\rho+\pi$, $P'=K'\rho+\Pi'$, ἀντεισάγοντες ἀντὶ ρ καὶ P' τὰς τιμὰς εἰς τὸν ἀριθμητὴν τῆς ἄνω εἰρημένης διαφορᾶς, ἔχομεν

$$\frac{P}{P'}-\frac{K}{K'}=\frac{(K\rho+\Pi)K'-K(K'\rho+\Pi')}{P'K'}.$$

Ἐκτελοῦντες τοὺς ὑπολογισμοὺς, καὶ ἀνάγοντες εὑρίσκομεν

$$\frac{P}{P'}-\frac{K}{K'}=\frac{\Pi K'-K\Pi'}{P'K'}.$$

Ὅθεν βλέπομεν, ὅτι ὁ ἀριθμητὴς τῆς διαφορᾶς $\frac{P}{P'}-\frac{K}{K'}$ εἶναι ἴσος καὶ μὲ ἐναντίον σημεῖον τοῦ ἀριθμητοῦ τῆς διαφορᾶς $\frac{K}{K'}-\frac{\Pi}{\Pi'}$ ἢ $\frac{K\Pi'-\Pi K'}{K'\Pi'}$. τουτέστιν οἱ ἀριθμηταὶ δύο διαδοχικῶν διαφορῶν εἶναι ἴσοι καὶ μὲ ἐναντία σημεῖα.

Ἀλλ' ἐὰν θεωρήσωμεν τὰ δύο πρῶτα ἡγμένα $\frac{\alpha}{1}$ καὶ $\frac{\alpha\beta+1}{\beta}$, ἔχομεν $\frac{\alpha\beta+1}{\beta}-\frac{\alpha}{1}=\frac{+1}{\beta\times 1}$.

Λοιπὸν κατὰ τὰ προειρημένα ὁ ἀριθμητὴς τῆς ἀκολούθου διαφορᾶς πρέπει νὰ εἶναι -1· ὁ ἀριθμητὴς τῆς τρίτης διαφορᾶς πρέπει νὰ εἶναι $+1$, καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

Ἐν γένει ὁ ἀριθμητὴς μιᾶς τινὸς διαφορᾶς εἶναι $+1$, ἐὰν ἡ δευτέρα τῶν δύο θεωρουμένων ἡγμένων ἦναι βαθμοῦ ἀρτίου, καὶ -1, ἐὰν ἦναι περιττοῦ· ὁ δὲ παρονομαστὴς εἶναι προδήλως πάντοτε ἴσος μὲ τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν τῶν δύο ἡγμένων.

§. 172. **Συνέπεια τῆς προηγουμένης ἰδιότητος.** Ἡγμένον τι ὁποιουδήποτε βαθμοῦ $\frac{P}{P'}$ εἶναι πάντοτε κλάσμα, ἢ ἀνάγωγος κλασματικὸς ἀριθμός.

Τῷ ὄντι ἂς ὑποθέσωμεν πρὸς τὸ παρὸν, ὅτι P καὶ P' ἔχουσι κοινὸν παράγοντα τὸ θ· ἐπειδὴ δὲ, κα-

τὰ τὴν ἀνώτέρω ἰδιότητα ἔχομεν $PK' - KP' = + \eta - 1$· ἐξάγομεν διαιροῦντες τὰ δύο μέλη διὰ ϑ,
$$\frac{PK'}{\vartheta} - \frac{KP'}{\vartheta} = + \eta - \frac{1}{\vartheta}$$
· ἀλλὰ τὸ πρῶτον μέλος ταύτης τῆς ἰσότητος εἶναι ἀκέραιος ἀριθμὸς, ἐπειδὴ P καὶ P′ εἶναι διαιρετοὶ διὰ τοῦ ϑ, καὶ τὸ δεύτερον μέλος εἶναι οὐσιωδῶς κλάσμα· λοιπὸν εἶναι ἄτοπον νὰ ὑποθέσωμεν, ὅτι P καὶ P′ δὲν εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἀριθμοί.

Ἕπεται ἐκ τούτου, ὅτι, ἐὰν τρέψωμεν εἰς συνεχὲς, ἓν κλάσμα, τοῦ ὁποίου οἱ δύο ὅροι δὲν εἶναι πρῶτοι ἀριθμοὶ μεταξύ των, καὶ σχηματίσωμεν μετὰ ταῦτα ὅλα τὰ ἡγμένα ἕως εἰς τὸ τελευταῖον, δὲν θέλομεν εὕρει τὸ δεδομένον κλάσμα ὑπὸ τὴν πρωτότυπον μορφήν του, ἀλλὰ τοῦτο τὸ ἴδιόν κλάσμα ἡγμένον εἰς τὴν ἁπλουστέραν του μορφὴν, τουτέστιν ἐλεύθερον ἀπὸ τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην μεταξὺ τῶν δύο ὅρων του.

Ἔστω π. χ. τὸ κλάσμα $\frac{348}{924}$.

Τρέποντές το εἰς συνεχὲς κλάσμα εὑρίσκομεν

$$\frac{348}{924} = 0 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{9}}}}}$$

Τὰ δὲ ἡγμένα εἶναι $\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{8}, \frac{29}{77}$.

Τὸ τελευταῖον ἡγμένον $\frac{29}{77}$ εἶναι ἡ τιμὴ τοῦ $\frac{348}{924}$,

ἐλευθέρα τοῦ παράγοντος 12, κοινοῦ εἰς τοὺς δύο ὅρους του.

§. 173. Δευτέρα ἰδιότης. Ἂς ἐπαναλάβωμεν τὸ γενικὸν συνεχὲς κλάσμα $\chi=\alpha+\cfrac{1}{\beta+\cfrac{1}{\gamma+\cfrac{1}{\delta+\cfrac{1}{\varepsilon\ldots}}}}$

Θεωροῦντες τὰ πρῶτα συστατικὰ κλάσματα, εὐκόλως γνωρίζομεν, ὅτι ἡ τιμὴ τοῦ χ περιέχεται μεταξὺ τοῦ πρώτου καὶ δευτέρου ἡγμένου, μεταξὺ τοῦ δευτέρου καὶ τρίτου, καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

Τῷ ὄντι ἔχομεν προφανῶς κατὰ πρῶτον $\chi>\alpha$· λέγω ἔπειτα ὅτι $\chi<\alpha+\frac{1}{\beta}$, ἐπειδὴ διὰ νὰ λάβωμεν τὴν τιμὴν τοῦ χ, πρέπει νὰ αὐξήσωμεν τὸ β ἀπὸ τὸ ὑπόλοιπον τοῦ συνεχοῦς κλάσματος· οὕτως, τὸ κλάσμα $\frac{1}{\beta}$ εἶναι μεγαλήτερον ἀφ' ὅ,τι πρέπει νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸ α. Λοιπὸν $\alpha+\frac{1}{\beta}$ εἶναι πολλὰ μεγάλον.

Ἤδη, ἐὰν θεωρήσωμεν τὸ ἡγμένον $\alpha+\cfrac{1}{\beta+\cfrac{1}{\gamma}}$

ἐπειδὴ γ εἶναι πολλὰ μικρὸν, ἕπεται ὅτι $\beta+\frac{1}{\gamma}$ εἶναι παρονομαστὴς πολλὰ μεγάλος. Λοιπὸν $\alpha+\cfrac{1}{\beta+\cfrac{1}{\gamma}}$ εἶναι κλάσμα μικρότερον ἀπὸ τὴν ἀληθῆ τιμὴν τοῦ χ.

Ἠμποροῦμεν ὅσον θέλωμεν νὰ προχωρήσωμεν τοῦτον τὸν συλλογισμόν· ἀλλ' ἦτον ὠφέλιμον νὰ δώσωμεν ἀπόδειξιν τινὰ ἀναξάρτητον ἀπὸ τὸν βαθμὸν τοῦ συστατικοῦ κλάσματος, εἰς τὸ ὁποῖον ἀσχολούμεθα.

Ἔστωσαν πρὸς τοῦτο τὰ δύο διαδοχικὰ ἡγμένα $\frac{\Pi}{\Pi'}$ καὶ $\frac{K}{K'}$, ὁποιουδήποτε βαθμοῦ, καὶ πρόκειται νὰ προσδιορίσωμεν τὴν τιμὴν τῶν διαφορῶν $x-\frac{\Pi}{\Pi'}, x-\frac{K}{K'}$.

Παρατηροῦμεν, ὅτι εἰς τὴν ἔκφρασιν τοῦ ἡγμένου $\frac{P}{P'}$, ἢ $\frac{K\rho+\Pi}{K'\rho+\Pi'}$ ἂν ἀντεισάξωμεν ἀντὶ τοῦ ἀτελοῦς πηλίκου ρ, τὸ τέλειον πηλίκον ψ ἢ $\rho+\cfrac{1}{\sigma+\cfrac{1}{\tau+\dots}}$, τοῦ ὁποίου ρ εἶναι τὸ ἀκέραιον μέρος, θέλει ἀναφανῇ ἡ τιμὴ τοῦ ἀριθμοῦ ἡγμένου εἰς συνεχὲς κλάσμα, ἐπειδὴ τότε ἔχομεν τὸ ἡγμένον τοῦ ὅλου συνεχοῦς κλάσματος. Ἔχομεν λοιπὸν κατὰ ταύτην τὴν παρατήρησιν, $x=\frac{K\psi+\Pi}{K'\psi+\Pi'}$.

$$\text{ὅθεν } x-\frac{\Pi}{\Pi'}=\frac{K\psi+\Pi}{K'\psi+\Pi'}-\frac{\Pi}{\Pi'}=\frac{(K\Pi'-\Pi K')\psi}{(K'\psi+\Pi')\Pi'}$$

$$\text{καὶ } x-\frac{K}{K'}=\frac{K\psi+\Pi}{K'\psi+\Pi'}-\frac{K}{K'}=\frac{\Pi K'-K\Pi'}{(K'\psi+\Pi')K'}$$

Ἤδη, ἐὰν θεωρήσωμεν προσεκτικῶς τὰς δύο ταύτας διαφορὰς, βλέπομεν, ὅτι οἱ παρονομασταὶ εἶναι οὐσιωδῶς θετικοί. Εἰς δὲ τοὺς ἀριθμητὰς ψ εἶναι θετικὸν, καὶ $K\Pi'-\Pi K'$, $\Pi K'-K\Pi'$ εἶναι ἴσοι

καὶ ἐναντίων σημείων. Οὕτως οὗτοι οἱ ἀριθμηταὶ ἔχουν διαφορετικὰ σημεῖα.

Ἕπεται ἐκ τούτου, ὅτι, ἐὰν ἔχωμεν $x > \text{ἢ} < \frac{\Pi}{\Pi'}$, πρέπει ἐξ ἀνάγκης νὰ ἔχωμεν . . . . . $x > \text{ἢ} < \frac{K}{K'}$.

τουτέστιν, ἐὰν ὁ ἀριθμὸς ἀχθεὶς εἰς συνεχὲς κλάσμα εἶναι μεγαλήτερος ἢ μικρότερος παρὰ τὸ ἡγμένον $\frac{\Pi}{\Pi'}$, ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς θέλει εἶναι ἢ μικρότερος, ἢ μεγαλήτερος παρὰ $\frac{K}{K'}$. Λοιπὸν τέλος πάντων, ἡ τιμὴ τοῦ ἀριθμοῦ ἀχθέντος εἰς συνεχὲς κλάσμα περιέχεται πάντοτε μεταξὺ δύο διαδοχικῶν ἡγμένων ὁποιουδήποτε βαθμοῦ.

Σημείωσις. Ἐὰν τὸ ἡγμένον $\frac{K}{K'}$ εἶναι βαθμοῦ ἀρτίου, $K\Pi' - \Pi K'$, τὸ ὁποῖον εἶναι ὁ ἀριθμητὴς τῆς διαφορᾶς μεταξὺ $\frac{K}{K'}$ καὶ $\frac{\Pi}{\Pi'}$, εἶναι θετικὸν καὶ ἴσον μὲ $+1$ (ἀριθμ. 171.). Οὕτως ἔχομεν $x > \frac{\Pi}{\Pi'}$ καὶ $x < \frac{K}{K'}$. Λοιπὸν ὅλα τὰ ἡγμένα περιττοῦ βαθμοῦ εἶναι μικρότερα παρὰ τὸν ἡγμένον εἰς συνεχὲς κλάσμα ἀριθμόν.

§. 174. Τρίτη ἰδιότης. Τὰ διάφορα ἡγμένα δίδουν ὡς ἔγγιστα τιμὰς τοῦ x, καὶ μὲ εὐκολίαν προσδιορίζομεν τὸν βαθμὸν τῆς προσεγγίσεως δι' ἑκάστου τούτων.

Κατὰ πρῶτον, ἐπειδὴ εἴδομεν, ὅτι ἡ τιμὴ τοῦ x εὑρίσκεται μεταξὺ δύο διαδοχικῶν ἡγμένων, $\frac{\Pi}{\Pi'}$ καὶ

$\frac{K}{K'}$, ἕπεται ὅτι ἡ διαφορὰ μεταξὺ χ καὶ ἑνὸς τούτων τῶν ἡγμένων εἶναι μικροτέρα παρὰ $\frac{1}{\Pi'K'}$, διαφρὰ, ἥτις ὑπάρχει μεταξὺ τῶν δύο ἡγμένων. Ἤδη λοιπὸν βλέπομεν, ὅτι τὸ σφάλμα τὸ πραττόμενον, ὅταν λαμβάνωμεν ἓν τῶν δύο ἡγμένων διὰ τὴν τιμὴν τοῦ χ, εἶναι μικρότερον τῆς μονάδος διὰ τοῦ γινομένου τῶν παρονομαστῶν των διαιρεθείσης. Ἀλλὰ μᾶλλον, ἐὰν θεωρήσωμεν τὴν διαφορὰν $\chi - \frac{K}{K'} = \frac{\Pi K' - K\Pi'}{(K'\psi+\Pi')K'}$, τὴν ὁποίαν ἐλάβομεν εἰς τὸν ἀνωτέρω ἀριθμὸν, ἐπειδὴ ἔχομεν (ἀριθμ. 171) $\Pi K' - K\Pi' = 1$ (ἀφαιρεθέντος τοῦ σημείου), προκύπτει $\chi - \frac{K}{K'} = \frac{1}{(K'\psi+\Pi')K'}$. Ἀλλὰ τὸ τέλειον πηλίκον ψ εἶναι φυσικὰ μεγαλήτερον τοῦ 1, λοιπὸν $(K'\psi+\Pi')\,K'$ εἶναι $> (K'+\Pi')\,K'$, καὶ διὰ περισσότερον δίκαιον $> K'^2$. Λοιπὸν $\chi - \frac{K}{K'} < \frac{1}{(K'+\Pi')K'}$, καὶ ἔτι μᾶλλον $\chi - \frac{K}{K'} < \frac{1}{K'^2}$. Οὕτως ἡ διαφορὰ μεταξὺ χ καὶ $\frac{K}{K'}$, ἢ τὸ πραττόμενον σφάλμα, ὅταν λαμβάνωμεν $\frac{K}{K'}$, ὡς τιμὴν τοῦ χ, εἶναι μικροτέρα παρὰ τὴν μονάδα διὰ τοῦ γινομένου τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ ἡγμένου διαιρεθεῖσαν καὶ πολλαπλασιασθεῖσαν ἐπὶ τὸ ἄθροισμα τοῦ αὐτοῦ τούτου παρονομαστοῦ, καὶ τοῦ πρὸ αὐτοῦ, ἢ μὲ ὄχι τόσην ἀκρίβειαν, ἀλλὰ μὲ πλειοτέραν ἁπλότητα, μικρότερον τῆς μονάδος διὰ τοῦ τετραγώνου τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ ἡγμένου διαιρεθείσης.

§. 175. **Τετάρτη ἰδιότης.** Ἡγμένον ὁποιουδήποτε βαθμοῦ δίδει τιμὴν ἐγγυτέραν εἰς τὴν χ, παρὰ κάθε ἄλλο πρὸ αὐτοῦ.

Τῷ ὄντι ἂς θεωρήσωμεν ἀκόμη τὰς δύο διαφορὰς τοῦ ἀριθμοῦ 173, $\chi - \frac{\Pi}{\Pi'} = \frac{(K\Pi' - \Pi K')\psi}{(K'\psi + \Pi')\Pi'}$, καὶ $\chi - \frac{K}{K'} = \frac{\Pi K' - K\Pi'}{(K'\psi + \Pi')K'}$· καὶ ἐπειδὴ ἔχομεν (ἀριθμ. 170) $K' > \Pi'$, ἕπεται, ὅτι ὁ παρονομαστὴς $(K'\psi + \Pi)K'$ εἶναι μεγαλήτερος παρὰ τὸν παρονομαστὴν $(K'\psi + \Pi')\Pi'$· προσέτι ψ εἶναι > 1, λοιπὸν (ἀφαιρεθέντος τοῦ σημείου) ὁ ἀριθμητὴς $\Pi K' - K\Pi'$ εἶναι μικρότερος παρὰ τὸν ἀριθμητὴν $(K\Pi' - \Pi K')\psi$. Οὕτω διὰ ταύτης τῆς διπλῆς αἰτίας, ἡ διαφορὰ μεταξὺ χ καὶ $\frac{K}{K'}$ εἶναι ἀριθμητικῶς μικροτέρα παρὰ τὴν μεταξὺ χ καὶ $\frac{\Pi}{\Pi'}$.

§. 176. **Πέμπτη καὶ τελευταία ἰδιότης.** Ἡγμένον ὁποιουδήποτε βαθμοῦ πλησιάζει πλέον εἰς τὴν τιμὴν τῆς χ, ὄχι μόνον παρὰ κάθε ἄλλο πρὸ αὐτοῦ ἡγμένον, ἀλλ' ἀκόμη παρὰ κάθε ἄλλο κλάσμα, τοῦ ὁποίου ὁ παρονομαστὴς εἶναι μικρότερος παρὰ τὸν τοῦ θεωρουμένου ἡγμένου, ὥστε βεβαιούμεθα, ὅτι δὲν ὑπάρχει κανὲν ἄλλο κλάσμα δίδον εἰς ὅρους ἁπλουστέρους τιμὴν πλησιεστέραν εἰς τὴν χ.

Ἔστω $\frac{K}{K'}$, τὸ θεωρούμενον ἡγμένον, καὶ τὸ κλάσμα $\frac{\mu}{\mu'}$ ἔχον $\mu' < K'$· λέγω, ὅτι $\chi - \frac{\mu}{\mu'}$ εἶναι μεγαλήτερον (ἀφαιρεθέντος τοῦ σημείου) παρὰ $\chi - \frac{K}{K'}$.

Δεῖξις. Παρατηροῦμεν κατὰ πρῶτον, ὅτι τὸ κλάσμα $\frac{\mu}{\mu'}$, δὲν δύναται νὰ εὑρεθῇ μεταξὺ $\frac{K}{K'}$ καὶ $\frac{\Pi}{\Pi'}$, ἐπειδὴ διὰ νὰ ὑπάρχῃ τοῦτο, ἔπρεπεν ἡ διαφορὰ μεταξὺ $\frac{\Pi}{\Pi'}$ καὶ $\frac{\mu}{\mu'}$, τουτέστι $\frac{\Pi\mu'-\mu\Pi'}{\Pi'\mu'}$, νὰ ἦναι ἀριθμητικῶς μικροτέρα τῆς διαφορᾶς $\frac{1}{\Pi'K'}$, μεταξὺ τοῦ $\frac{K}{K'}$ καὶ $\frac{\Pi}{\Pi'}$, τὸ ὁποῖον εἶναι ἀδύνατον· ἐπειδὴ $\Pi\mu'-\mu\Pi'$ ἀριθμὸς ἀκέραιος, εἶναι τοὐλάχιστον ἴσος μὲ τὸ 1, καὶ $\mu'\Pi'$ εἶναι μικρότερος παρὰ τὸ $\Pi'K'$, ἐξαιτίας τῆς ὑποθέσεως $\mu'<K'$· (δὲν δυνάμεθα νὰ ὑποθέσωμεν $\Pi\mu'-\mu\Pi'=0$, ἐπειδὴ ἠθέλαμεν ἔχει $\frac{\Pi}{\Pi'}=\frac{\mu}{\mu'}$, καὶ ἐπειδὴ τοῦτο τὸ τελευταῖον κλάσμα, μὲ τὸ νὰ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἡγμένον, τὸ ὁποῖον προηγεῖται $\frac{K}{K'}$, ἡ πρότασις ἤδη εἶναι ἀποδεδειγμένη.)

Ἕπεται ἐκ τούτου, ὅτι $\frac{\Pi}{\Pi'}$ εἶναι εἰς τὸν αὐτὸν καιρὸν $>$ ἢ $<\frac{\mu}{\mu'}$. Λοιπὸν αἱ διαφοραὶ $\frac{\Pi}{\Pi'}-\frac{\mu}{\mu'}$ καὶ $\frac{K}{K'}-\frac{\mu}{\mu'}$, ἢ οἱ ἀριθμηταίτων· $\Pi\mu'-\mu\Pi'$, $K\mu'-\mu K'$, εἶναι τοῦ ἰδίου σημείου.

Τούτου τεθέντος, εὑρίσκομεν (ἀριθμ. 173).

$$x-\frac{K}{K'}=\frac{\Pi K'-K\Pi'}{(K'\psi+\Pi')K'}=\frac{1}{(K'\psi+\Pi')K'}.$$

Ἄς λάβωμεν τώρα τὴν διαφορὰν μεταξὺ χ καὶ $\frac{\mu}{\mu'}$, συνάγομεν $\chi - \frac{\mu}{\mu'} = \frac{K\psi+\Pi}{K'\psi+\Pi'} - \frac{\mu}{\mu'} = \frac{(K\mu'-\mu K')\psi+\Pi\mu'-\mu\Pi'}{(K'\psi+\Pi')\mu'}$.

ἀλλ' ἐξ ὑποθέσεως, $\mu < K'$, οὕτως ὁ παρονομαστὴς ταύτης τῆς δευτέρας διαφορᾶς εἶναι μικρότερος ἐκείνου τῆς πρώτης· προσέτι ὁ ἀριθμητὴς $(K\mu' - \mu K')\psi + \Pi\mu' - \mu\Pi'$ εἶναι σύνθετος ἀπὸ δύο ὅρους, οἵτινες ἢ προσθέτονται, ἢ ἀφαιροῦνται εἰς τὸν αὐτὸν καιρὸν, καὶ διὰ τοῦτο μεγαλήτερος τοῦ 2. Λοιπὸν διὰ τὸν διπλοῦν τοῦτον λόγον $\chi - \frac{\mu}{\mu'}$ εἶναι ἀριθμητικῶς μεγαλήτερον παρὰ $\chi - \frac{K}{K'}$.

Σ. Κ. Αἱ τέσσαρες τελευταῖαι ἰδιότητες ἐπιστηρίζονται ἐπὶ τοῦ ἰδίου ὑπολογισμοῦ, ἐκείνη δὲ τοῦ ἀριθμοῦ 173, ἥτις θεωρεῖ τὴν ἔκφρασιν τῆς διαφορᾶς μεταξὺ τοῦ χ καὶ $\frac{\mu}{\mu'}$, λογίζεται ἡ πέμπτη. Τοῦτο καταστaίνει τὰς ἀποδείξεις πλέον εὐκόλους.

§. 177. Διὰ νὰ τελειώσωμεν τὴν στοιχειώδη θεωρίαν τῶν συνεχῶν κλασμάτων, σημειόνομεν ἐδῶ τὴν χρῆσιν αὐτῆς, ὅταν ἐκτιμῶμεν τὴν ὡς ἔγγιστα τιμὴν ἀναγώγου τινὸς κλάσματος, τοῦ ὁποίου οἱ δύο ὅροι εἶναι πολλὰ μεγάλοι.

Κατὰ πρῶτον ἄγομεν τὸν δεδομένον ἀριθμὸν εἰς συνεχὲς κλάσμα κατὰ τὸν κανόνα τοῦ ἀριθμοῦ 167, μετὰ ταῦτα σχηματίζομεν τὰ διαδοχικὰ ἡγμένα, κατὰ τὸν νόμον τοῦ 169 ἀριθμοῦ· οὕτως ἔχομεν σειρὰν κλασμάτων, ἐναλλὰξ μεγαλήτερα καὶ μικρότερα παρὰ τὸν δεδομένον ἀριθμὸν (ἀριθμ. 173)· καὶ μεταξὺ τῶν τοιούτων κλασμάτων ἐκλέγομεν ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον δίδει τὸν βαθμὸν τῆς προσεγγίσεως, τὸν ὁποῖον θέλομεν νὰ

εὕρωμεν διὰ τὸ κλάσμα. Ὁ τοιοῦτος βαθμὸς (ἀριθμ. 174) σημειοῦται διὰ $\frac{1}{(K'+\Pi')K'}$ ἢ $\frac{1}{K'^2}$, ἐὰν $\frac{K}{K'}$ ἦναι τὸ ἠγμένον, τὸ ὁποῖον θεωροῦμεν· τὸ ἠγμένον πρέπει νὰ ἦναι (ἀριθμ. 175) βαθμοῦ τόσου πλέον μακρὰν, ὅσον θέλομεν νὰ εὕρωμεν μεγαλήτερον βαθμὸν προσεγγίσεως.

Ἂς προτεθῇ π. χ., νὰ ἐκτιμήσωμεν ὡς ἔγγιστα τὸν λόγον τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον.

Ἠξεύρομεν ὅτι ὁ λόγος οὗτος ἐκφραζόμενος εἰς δεκαδικὰ ἔχει διὰ τιμὴν μεῖον ἑκατοχιλιοστημορίου, 3, 14159, ἢ $\frac{314159}{100000}$.

Εὑρίσκομεν κατὰ πρῶτον διὰ τὴν τιμὴν τούτου τοῦ ἀριθμοῦ ἠγμένου εἰς συνεχὲς κλάσμα,

$$\frac{314159}{100000},\ \text{ἢ}\ x=3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{25+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{4}}}}}}}$$

τὸ ὁποῖον δίδει τὰ διαδοχικὰ ἠγμένα, κατὰ τὸν νόμον τοῦ ἀριθμοῦ 169· $\frac{3}{1}$, $\frac{22}{7}$, $\frac{333}{106}$, $\frac{355}{113}$, $\frac{9208}{2931}$, $\frac{9563}{3044}$, $\frac{76149}{24239}$, $\frac{314159}{100000}$. Ἐὰν λάβωμεν κατὰ πρῶτον $\frac{22}{7}$ διὰ τὴν τιμὴν τοῦ δεδομένου ἀριθμοῦ, πράτ-

τομεν σφάλμα μικρότερον παρὰ $\frac{1}{7(7+1)}$ ἢ $\frac{1}{56}$· ἀλλὰ τὸ ἡγμένον τοῦτο δίδει ἀκόμη προσεγγίσεως πλέον ἀνώτερον βαθμόν· διότι ἐπειδὴ ὁ δεδομένος ἀριθμὸς εὑρίσκεται μεταξὺ τῶν $\frac{22}{7}$ καὶ $\frac{333}{106}$, ἕπεται ὅτι $\frac{22}{7}$ διαφέρει τοῦ ζητουμένου ἀριθμοῦ κατὰ ποσότητα μικροτέραν παρὰ $\frac{22}{7}-\frac{333}{106}$ ἢ $\frac{1}{742}$· οὕτως τὸ πραχθὲν σφάλμα εἶναι πολλὰ μικρότερον ἀπὸ $\frac{1}{100}$· οὕτως τὸν ἀριθμὸν $\frac{22}{7}$, ἢ $3\frac{1}{7}$ συχνὰ μεταχειριζόμεθα, διὰ νὰ ἐκφράσωμεν τὸν λόγον τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον, καὶ εἶναι ὁ λόγος, τὸν ὁποῖον ἔδωκεν ὁ Ἀρχιμήδης.

Τὸ τέταρτον ἡγμένον $\frac{355}{113}$, τὸ ὁποῖον δὲν εἶναι περισσότερον σύνθετον παρὰ τὸ $\frac{333}{106}$, δίδει τιμὴν πολὺ πλέον πλησιάζουσαν. Διότι ἐπειδὴ ὁ δεδομένος ἀριθμὸς εὑρίσκεται μεταξὺ $\frac{355}{113}$ καὶ $\frac{9208}{2931}$, ἡ διαφορὰ μεταξὺ τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ καὶ τοῦ $\frac{355}{113}$ εἶναι μικροτέρα τοῦ $\frac{1}{113\times 2931}$ κλάσματος, τὸ ὁποῖον φανερὰ εἶναι μικρότερον παρὰ 0,00001. Πρέπει νὰ σημειώσωμεν, ὅτι τὰ δύο κλάσματα $\frac{355}{113}$ καὶ $\frac{314159}{100000}$, τῶν ὁποίων τὸ πρῶτον ἐκφράζεται εἰς ὅρους ἁπλουστέρους δίδουν τὴν αὐτὴν προσέγγισιν (ἐκτιμωμένην

εἰς δεκαδικὰ) διὰ τὴν σχέσιν τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον. Οὗτος εἶναι ὁ λόγος, τὸν ὁποῖον ἔδωκεν ὁ Ἀδριανὸς Μέτιος. Τὰ ἀκόλουθα ἠγμένα, εἶναι τόσον πολλὰ σύνθετα, ὥστε δυσκόλως καὶ ἀνωφελῶς ἀντεισάγονται εἰς τὸν δεδομένον ἀριθμόν.

Δὲν ἐκτεινόμεθα περισσότερον εἰς τὰς ἰδιότητας τῶν ἀριθμῶν, ἀλλὰ συμβουλεύομεν τὴν νεολαίαν, ἥτις ἤδη γυμνασμένη εἰς τὴν ἀλγεβραϊκὴν ἀνάλυσιν, ἀγαπᾷ πλειοτέρας γνώσεις ἐπάνω εἰς τοῦτο τὸ μέρος, νὰ ἀναγνώσῃ τοὺς δύο τόμους, οἵτινες ἐπιγράφονται „Θεωρία τῶν ἀριθμῶν παρὰ τοῦ Λεγένδρου, καὶ ἀριθμητικαὶ ἐξετάσεις τοῦ Γάους", βιβλίον μεταφρασμένον ἄριστα ἀπὸ τὸν Πολυέτον Δελίσλιον εἰς τὴν Γαλλικὴν Γλῶσσαν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ϛ'.

Σχηματισμὸς τῶν δυνάμεων, καὶ ἐξαγωγὴ τῶν Τετραγωνικῶν καὶ Κυβικῶν ῥιζῶν τῶν ἀριθμῶν.

---

§. α^ος^. Σχηματισμὸς τοῦ Τετραγώνου, καὶ ἐξαγωγὴ τῆς Τετραγωνικῆς ῥίζης.

§. 178. Προοιμιώδεις γνώσεις. — Καλεῖται τετράγωνον (ἀριθμ. 111) ἡ δευτέρα δύναμις ἑνὸς ἀριθμοῦ, τὸ γινόμενον τούτου, πολλαπλασιαζομένου ἐφ' ἑαυτόν, καὶ τετραγωνικὴ ῥίζα ἑνὸς

ἀριθμοῦ, δεύτερός τις ἀριθμὸς, ὅς τις πολλαπλασιαζόμενος ἐφ' ἑαυτὸν, ἢ ὑψούμενος εἰς τετράγωνον, δίδει ἐξαγόμενον τὸν προτεθέντα ἀριθμόν.

Οὕτως τὸ μὲν τετράγωνον τοῦ 7 εἶναι 49· ἡ δὲ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 49 εἶναι 7. Παρομοίως τὸ τοῦ 12 τετράγωνον εἶναι 12×12 ἢ 144· ἀντιστρόφως δὲ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 144 εἶναι 12.

Ὁ σχηματισμὸς τοῦ τετραγώνου ἀκεραίου τινὸς, ἢ κλασματικοῦ ἀριθμοῦ δὲν ἔχει κἀμμίαν δυσκολίαν, ἀλλ' ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιασθῇ ὁ ἀριθμὸς οὗτος ἐφ' ἑαυτὸν κατὰ τοὺς συνήθεις κανόνας.

Ἀλλὰ δὲν ἀκολουθεῖ τὸ αὐτὸ εἰς τὴν τῆς τετραγωνικὴν ῥίζης ἑνός τινος ἀριθμοῦ ἐξαγωγὴν, ὡς „δοθέντος τινὸς ἀριθμοῦ, νὰ εὕρωμεν τὸν ἀριθμὸν, ὅς τις πολλαπλασιασθεὶς ἐφ' ἑαυτὸν, παράγει τὸν προτεθέντα.“

Αὕτη ἡ πολλὰ δύσκολος πρᾶξις, ἥτις μάλιστα εἶναι ἀναγκαιοτάτη εἰς τὴν Γεωμετρίαν καὶ Ἀριθμητικὴν, ἀπαιτεῖ ἰδιαιτέρας ἑρμηνείας.

Τῶν δέκα πρώτων ἀκεραίων ἀριθμῶν

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10

τὰ τετράγωνα εἶναι προφανῶς

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100.

Ἀντιστρόφως, αἱ τῶν ἀριθμῶν τῆς δευτέρας γραμμῆς τετραγωνικαὶ ῥίζαι εἶναι οἱ ἀριθμοὶ τῆς πρώτης.

Ἀπὸ τὴν παρατήρησιν τῶν δύο τούτων γραμμῶν γίνεται φανερὸν, ὅτι μεταξὺ τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν ἑνὸς ἢ δύο ψηφίων εἶναι ἐννέα, οἵτινες εἶναι τὰ τετράγωνα ἄλλων ἀκεραίων ἀριθμῶν, οἱ δὲ ἄλλοι ἔχουσι τετραγωνικὴν ῥίζαν, ἀκέραιον ἀριθμὸν μεθ' ἑνὸς κλάσματος.

Οὕτως 53, ὅς τις περιέχεται μεταξὺ 49 καὶ 64, ἔχει τετραγωνικὴν ῥίζαν τὸ 7, καὶ ἓν κλάσμα.

Παρομοίως 91, ἔχει τετραγωνικὴν ῥίζαν 9 πλέον ἓν κλάσμα.

§. 179. Ἀλλὰ τὸ πλέον ἀξιοπαρατήρητον εἶναι, ὅτι ὁ ἀκέραιος ἀριθμὸς, ὅς τις δὲν εἶναι τετράγωνον ἄλλου ἀκεραίου ἀριθμοῦ, δὲν δύναται νὰ ἔχῃ τετραγωνικὴν ῥίζαν, ἀκριβῆ κλασματικὸν ἀριθμόν.

Αὕτη ἡ πρότασις, ἥτις ἐκ πρώτης ὄψεως φαίνεται παράδοξος, εἶναι συνέπεια τῆς συσταθείσης ἀρχῆς (ἀριθμ. 133) περὶ τῆς διαιρετότητος τῶν ἀριθμῶν. Τῷ ὄντι διὰ νὰ θεωρῆται εἷς κλασματικὸς ἀκριβὴς ἀριθμὸς $\frac{\alpha}{\beta}$, ὡς τετραγωνικὴ ῥίζα ἀκεραίου ἀριθμοῦ, πρέπει τὸ τετράγωνόν του $\frac{\alpha}{\beta} \times \frac{\alpha}{\beta}$ ἢ $\frac{\alpha^2}{\beta^2}$ νὰ εἶναι ἴσον μὲ ἀκέραιον ἀριθμόν· ἀλλὰ τοῦτο εἶναι ἀδύνατον· ἐπειδὴ ὑποθέτοντες, ὅτι $\frac{\alpha}{\beta}$ ἤχθη εἰς τὴν ἁπλουστέραν του μορφὴν, βλέπομεν ὅτι α^2 καὶ β^2 εἶναι (ἀριθ. 133) σύνθετα ἀπὸ παράγοντας πρώτους εἰσερχομένους εἰς α καὶ β, καὶ ἐπειδὴ οὗτοι οἱ τελευταῖοι δύο ἀριθμοὶ εἶναι πρῶτοι μεταξύ των, ἀκολουθεῖ τὸ αὐτὸ καὶ εἰς α^2 καὶ β^2· οὕτω λοιπὸν $\frac{\alpha^2}{\beta^2}$ εἶναι ἀνάγωγος κλασματικὸς ἀριθμὸς, καὶ ἑπομένως δὲν εἶναι ἴσος μὲ ἀκέραιον ἀριθμόν.

Ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα ἀριθμοῦ, ὅς τις δὲν εἶναι τετράγωνον ἄλλου ἀκεραίου ἀριθμοῦ, μὴ ἐκφραζομένη δι' οὐδενὸς ἀκριβοῦς ἀριθμοῦ, καλεῖται ἀριθμὸς ἀσύμμετρος ἢ ἄλογος· τουτέστιν ἀριθμὸς, ὅς τις δὲν μετρεῖται μὲ ἀκρίβειαν διὰ μέσου τῆς μονάδος· οὕ-

τως $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{11}$ εἶναι ἀριθμοὶ ἀσύμμετροι ἢ ἄλογοι.

Τότε λέγεται, ὅτι ὁ δεδομένος ἀκέραιος ἀριθμὸς δὲν εἶναι τέλειον, ἢ ἀκριβὲς τετράγωνον.

§. 180. Ἡ διαφορὰ δύο διαδοχικῶν ἀκριβῶν τετραγώνων εἶναι τόσον μεγαλητέρα, ὅσον αἱ τετραγωνικαὶ ῥίζαι τούτων τῶν τετραγώνων εἶναι μεγαλήτεραι, καὶ τὴν ἔκφρασιν ταύτης τῆς διαφορᾶς εἶναι ἀναγκαῖον νὰ τὴν γνωρίσωμεν.

Ἔστωσαν τῷ ὄντι δύο διαδοχικοὶ ἀριθμοὶ α καὶ $\alpha+1$.

Ἔχομεν (ἀριθμ. 115), $(\alpha+\beta)^2=(\alpha+\beta)\,(\alpha+\beta)=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$, ὅθεν ὄντος $\beta=1$, συνάγομεν $(\alpha+1)^2=\alpha^2+2\alpha+1$.

Ἡ διαφορὰ μεταξὺ τοῦ $(\alpha+1)^2$ καὶ α^2 εἶναι λοιπὸν $2\alpha+1$· ἐκ τοῦ ὁποίου βλέπομεν, ὅτι ἡ διαφορὰ μεταξὺ τῶν τετραγώνων δύο διαδοχικῶν ἀριθμῶν, εἶναι ἴση μὲ τὸ διπλάσιον τοῦ μικροτέρου τούτων τῶν δύο ἀριθμῶν αὐξανομένη ἀπὸ μίαν μονάδα· οὕτως, ἡ διαφορὰ μεταξὺ τῶν τετραγώνων τοῦ 348 καὶ 347 εἶναι ἴση μὲ δύο φοραῖς 347 πλέον 1 ἢ 695· ἢ κατ' ἄλλον τρόπον, τὰ τετράγωνα τοῦ 347 καὶ τοῦ 348 περιέχουσι 694 ἀριθμοὺς, οἵτινες δὲν εἶναι ἀκριβῆ τετράγωνα.

Μετὰ τὰς γνώσεις ταύτας, ἂς ἀναζητήσωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τῶν ἀριθμῶν, ἀρχίζοντες ἐκ τῶν ἀκεραίων.

§. 181. *Ἐξαγωγὴ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης ἀκεραίου ἀριθμοῦ.*

Ἐὰν ὁ ἀριθμὸς ἔχῃ ἓν ἢ δύο ψηφία, ἡ ῥίζα του λαμβάνεται ἀμέσως κατὰ τὴν παρατήρησιν τῶν ἐννέα πρώτων ἀριθμῶν (ἀριθμ. 178). Ἂς θεωρήσωμεν λοι-

τὸν ἀριθμὸν τινὰ ἔχοντα περισσότερα παρὰ δύο ψηφία π. χ. 6084.

60.84	78
49	148
	8
118.4	1184
118 4	
0	

Ἐπειδὴ ὁ ἀριθμὸς οὗτος σύγκειται ἀπὸ περισσότερα παρὰ δύο ψηφία, ἡ ῥίζα του πρέπει νὰ ἔχῃ περισσότερα παρὰ ἕν· προσέτι εἶναι μικρότερος τῶν 10000, ὅς τις εἶναι τὸ τετράγωνον τοῦ 100· οὕτως ἡ ῥίζα περικλείει ἀναγκαίως δύο ψηφία, ἤγουν δεκάδας καὶ μονάδας· ὅθεν, ἐὰν σημειώσωμεν διὰ α τὰς δεκάδας, καὶ διὰ β τὰς μονάδας, ἔχομεν (κατὰ τὸν ἀριθμὸν 180)

$$6084=(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2.$$

Τὸ ὁποῖον φανερόνει, ὅτι τὸ τετράγωνον ἀριθμοῦ συνθέτου ἐκ μονάδων καὶ δεκάδων, περιέχει τὸ τετράγωνον τῶν δεκάδων, πλέον τὸ διπλοῦν γινόμενον τῶν δεκάδων ἐπὶ τὰς μονάδας, πλέον τὸ τετράγωνον τῶν μονάδων.

Τούτου τεθέντος, ἐὰν ἦτον δυνατὸν νὰ γνωρίσωμεν εἰς τὸ 6084 τὸ τετράγωνον τῶν δεκάδων τῆς ῥίζης, ἠθέλαμεν εὐκόλως λάβει τὰς δεκάδας· ἀλλ' ἐπειδὴ τὸ τετράγωνον ἀκριβοῦς ἀριθμοῦ δεκάδων δὲν δίδει ὀλιγώτερον ἀπὸ ἑκατοντάδας, ἕπεται, ὅτι τὸ τετράγωνον τοῦτο πρέπει νὰ εὑρίσκεται εἰς τὸ μέρος 60, εἰς τὰ ἀριστερὰ τῶν δύο τελευταίων ψηφίων, τὰ ὁποῖα χωρίζομεν δι' αὐτὸν τὸν λόγον μὲ στιγμὴν ἀπὸ τὸ μέρος τοῦτο, τὸ ὁποῖον προσέτι ἐκτὸς τοῦ τετραγώνου τῶν δεκάδων δύναται νὰ περιέχῃ ἑκατοντάδας, χιλιάδας καὶ ἐφεξῆς, αἵτινες πορίζονται ἀπὸ τοὺς ἄλλους ὅρους τοῦ τετραγώνου· τὸ δὲ μέρος 60 περιέχεται μεταξὺ εἰς τὰ δύο τετράγωνα 49 καὶ 64, τῶν ὁποίων αἱ ῥίζαι εἶναι 7 καὶ 8· λέγω δὲ, ὅτι 7 εἶναι τὸ ψηφίον τῶν ζητουμένων δεκάδων· ἐπειδὴ 6000 περιέ-

χεται προφανῶς μεταξὺ 4900 καὶ 6400, οἵτινες εἶναι τὰ τετράγωνα τῶν 70 καὶ 80· τὸ αὐτὸ εἶναι καὶ περὶ τῶν 6084. Λοιπὸν ἡ ζητουμένη ῥίζα σύγκειται ἀπὸ 7 δεκάδας, καὶ ἀπὸ ἀριθμόν τινα μονάδων μικρότερον τοῦ δέκα.

Ἀφ' οὗ τὸ ψηφίον 7 εὑρέθη, τὸ γράφομεν εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ δοθέντος, καὶ τὸ χωρίζομεν διὰ καθέτου γραμμῆς· μετὰ ταῦτα ἀφαιροῦμεν τὸ τετράγωνόν του 49 ἀπὸ τὰ 60, τὸ ὁποῖον μᾶς δίδει 11 ὑπόλοιπον, εἰς τὰ πλευρὸν τοῦ ὁποίου καταβιβάζομεν τὰ ἄλλα δύο ψηφία 84. Τὸ ἐξαγόμενον 1184 ταύτης τῆς πρώτης πράξεως περιέχει ἀκόμη τὸ διπλοῦν γινόμενον τῶν δεκάδων ἐπὶ τὰς μονάδας, καὶ τὸ τετράγωνον τῶν μονάδων· ἀλλὰ δεκάδες πολλαπλασιαζόμεναι ἐπὶ μονάδας δὲν δίδουν εἰς τὸ γινόμενον, ὀλιγώτερον ἀπὸ δεκάδας, καὶ τὸ τελευταῖον ψηφίον 4 δὲν ἀποτελεῖ μέρος τοῦ διπλασίου γινομένου τῶν δεκάδων ἐπὶ τὰς μονάδας· οὕτως τὸ διπλοῦν τοῦτο γινόμενον περιέχεται εἰς τὸ ἀριστερὸν μέρος 118, τὸ ὁποῖον χωρίζομεν ἀπὸ τὸ ψηφίον 4 διὰ στιγμῆς.

Λοιπὸν ἐὰν διπλασιάσωμεν τὰς δεκάδας, ὅθεν ἔχομεν 14, καὶ διαιρέσωμεν τὸ 118 διὰ 14, τὸ πηλίκον 8 εἶναι τὸ ψηφίον τῶν μονάδων, ἢ ἓν ψηφίον μεγαλήτερον ἐκείνου τῶν μονάδων, τὸ πηλίκον τοῦτο δὲν δύναται νὰ εἶναι πολλὰ μικρὸν, ἐπειδὴ 118 περιέχων τὸ γινόμενον τοῦ διπλοῦ τῶν δεκάδων 14 ἐπὶ τὰς μονάδας, πρέπει νὰ ἐξαλειφθῇ, ὅταν ἀφαιρῶμεν τὸ γινόμενον τοῦ 14 ἐπὶ τὸ ψηφίον, τὸ ὁποῖον δοκιμάζομεν· ἀλλ' ἠμπορεῖ νὰ εἶναι πολὺ μεγάλον· ἐπειδὴ 118, ἐκτὸς τοῦ τοιούτου διπλοῦ γινομένου, περιέχει προσέτι δεκάδας προερχομένας ἐκ τοῦ τετραγώνου τῶν μονάδων.

Διὰ νὰ βεβαιωθῶμεν, ἐὰν τὸ πηλίκον 8 ἐκφράζῃ τὰς μονάδας, ἀρκεῖ νὰ τὸ γράψωμεν εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ 14, καὶ οὕτως ἔχομεν 148· μετὰ ταῦτα ὑπὸ τὸ ἴδιον, καὶ νὰ πολλαπλασιάσωμεν 148 ἐπὶ τοῦ 8· σχηματίζομεν προφανῶς διὰ ταύτης τῆς πράξεως· 1ον τὸ τετράγωνον τῶν μονάδων· 2ον τὸ διπλοῦν γινόμενον τῶν δεκάδων ἐπὶ τὰς μονάδας· ὅθεν ἐκτελεσθεὶς οὗτος ὁ πολλαπλασιασμὸς, δίδει γινόμενον 1184, ἀριθμὸν ἴσον μὲ τὸ ἐξαγόμενον τῆς πρώτης πράξεως, καὶ ἀφαιροῦντές το ἀπὸ τὸ γινόμενον τοῦτο, ἔχομεν 0 ὑπόλοιπον. Λοιπὸν 78 εἶναι ἡ ζητουμένη ῥίζα.

Τῷ ὄντι ἕπεται ἐκ τῶν ἄνω εἰρημένων πράξεων, ὅτι ἀφαιρέσαμεν διαδοχικῶς ἀπὸ 6084, τὸ τετράγωνον τῶν 7 δεκάδων, ἢ τοῦ 70, πλέον τὸ διπλοῦν γινόμενον τοῦ 70 ἐπὶ 8, πλέον τέλος πάντων τὸ τετράγωνον τοῦ 8, τουτέστι τὰ τρία μέρη, τὰ ὁποῖα περιέχονται εἰς τὴν σύνθεσιν τοῦ τετραγώνου ἀπὸ 70+8 ἢ 78· καὶ ἐπειδὴ τὸ ἐξαγόμενον τῆς ἀφαιρέσεως εἶναι 0, ἕπεται ὅτι 6084 εἶναι ἴσον μὲ τὸ τετράγωνον τοῦ 78.

Ἔστω διὰ δεύτερον παράδειγμα ὁ ἀριθμὸς 841.

Ἐπειδὴ ἀριθμὸς οὗτος περιέχεται μεταξὺ τοῦ 100 καὶ 1000, ἡ ῥίζα του σύγκειται ἀκόμη ἀπὸ δύο ψηφία, ἢ ἀπὸ δεκάδας καὶ μονάδας· ἀποδεικνύομεν δὲ, καθὼς εἰς τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα, ὅτι ἡ ῥίζα τοῦ μεγαλητέρου τετραγώνου τοῦ περιεχομένου

	29
8.41	49
4	9
44.1	441
44 1	
0	

εἰς τὸ 8, ἢ εἰς τὸ ἀριστερὸν μέρος τῶν δύο τελευταίων ψηφίων εἶναι τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων τῆς ῥίζης· ἀλλὰ τὸ μεγαλήτερον τετράγωνον τὸ περιεχόμενον εἰς τὸ 8, εἶναι 4, τοῦ ὁποίου ἡ ῥίζα εἶναι 2, καὶ τοῦτο εἶναι τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων. Ἀφαιροῦντες

τὸ τετράγωνον τοῦ 2, ἢ 4 ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν 8, ἔχομεν 4, καταβιβάζοντες δὲ εἰς τὸ πλευρὸν τούτου τοῦ ὑπολοίπου τὸ ἀκόλουθον τμῆμα 41, λαμβάνομεν 441, ἐξαγόμενον, τὸ ὁποῖον περιέχει ἀκόμη τὸ διπλοῦν γινόμενον τῶν δεκάδων ἐπὶ τὰς μονάδας, πλέον τὸ τετράγωνον τῶν μονάδων.

Ἀποδεικνύομεν ἀκόμη, καθὼς εἰς τὸ προηγούμενον παράδειγμα, ὅτι ἐὰν χωρίσωμεν τὸ τελευταῖον ψηφίον 1, διὰ στιγμῆς, καὶ διαιρέσωμεν τὸ κατὰ τὰ ἀριστερὰ μέρος 44 διὰ 4, διπλοῦν τῶν δεκάδων, τὸ πηλίκον θέλει εἶσθαι τὸ ψηφίον τῶν μονάδων τοὐλάχιστον, ἐὰν δὲν εἶναι μεγαλήτερον ἀπὸ τοῦτο τὸ ψηφίον. Ἐδῶ τὸ πηλίκον εἶναι 11, καὶ εἶναι φανερὸν, ὅτι δὲν ἔχομεν περισσότερον παρὰ 9 διὰ τὰς μονάδας (ἐπειδὴ ἀλλέως ὑποτίθεται, ὅτι τὸ ψηφίον, τὸ ὁποῖον εὑρήκαμεν διὰ τὰς δεκάδας, δὲν εἶναι τὸ ἀληθινόν). Πρέπει λοιπὸν νὰ δοκιμάσωμεν 9· πρὸς τοῦτο, θέτομεν 9 εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ 4 διπλασίου τῶν δεκάδων, καὶ μετὰ ταῦτα ὑπὸ αὐτὸ τὸ ἴδιον, καὶ πολλαπλασιάζομεν 49 ἐπὶ 9· ὅθεν οὗτος ὁ πολλαπλασιασμὸς δίδει τὸ γινόμενον 441, τὸ ὁποῖον εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἐξαγόμενον τῆς πρώτης ἐργασίας· οὕτως 29 εἶναι ἡ ζητουμένη ῥίζα.

Σκεπτόμενοι ἐπάνω εἰς τὴν μέθοδον, τὴν ὁποίαν ἠκολουθήσαμεν, διὰ νὰ ἐξάξωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν ἀριθμοῦ μὲ τρία, ἢ μὲ τέσσαρα ψηφία, βλέπομεν ὅτι σύγκειται αὕτη ἀπὸ δύο ἀρχικὰς ἐργασίας.

Ἡ πρώτη συνίσταται εἰς τὸ νὰ χωρίσωμεν τὰ δύο εἰς τὰ δεξιὰ τελευταῖα ψηφία, καὶ νὰ ἐξάξωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ μεγαλητέρου τετραγώνου, τὸ ὁποῖον περιέχεται εἰς τὸ ἀριστερὸν μέρος. Αὕτη ἡ ῥίζα ἀναγκαίως ἐκφράζει τὰς δεκάδας τῆς ὅλης ῥίζης, ἐπειδὴ τὸ τετράγωνον ταύτης τῆς ῥίζης ἀκολουθημένης

ἀπὸ ἓν μηδενικὸν, καὶ τὸ τετράγωνον τῆς ἰδίας ῥίζης αὐξανομένης ἀπὸ μίαν μονάδα, καὶ ἀκολουθημένης παρομοίως ἀπὸ ἓν μηδενικὸν, περιέχουσι προφανῶς τὸν δεδομένον ἀριθμόν. Ἡ δευτέρα, ἀφ' οὗ καταβάσωμεν τὰ δύο ψηφία εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ ἀριθμοῦ, καὶ χωρίσωμεν τὸ τελευταῖον τῶν δύο ψηφίων διὰ μιᾶς στιγμῆς, συνίσταται εἰς τὸ νὰ διαιρέσωμεν τὸ εἰς τὰ ἀριστερὰ μέρος διὰ τοῦ διπλασίου τοῦ ἤδη εἰς τὴν ῥίζαν εὑρεθέντος ψηφίου· τὸ δὲ πηλίκον ἐκφράζει τὰς μονάδας κἂν, ὅταν δὲν εἶναι πολλὰ μεγάλον· καὶ διὰ νὰ βεβαιωθῶμεν, ὅτι δὲν εἶναι πολλὰ μεγάλον, σχηματίζομεν τὸ τετράγωνον τούτου τοῦ πηλίκου, καὶ τὸ γινόμενον τοῦ διπλασίου τῶν δεκάδων ἐπὶ τοῦτο τὸ πηλίκον· Ἐὰν τὸ λαμβανόμενον ἄθροισμα εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἐξαχόμενον τῆς πρώτης πράξεως, ἢ ἂν εἶναι μικρότερον ἀπὸ τὸ τοιοῦτον ἐξαγόμενον, τότε εἴμεθα βέβαιοι, ὅτι τὸ πηλίκον παριστάνει τὰς μονάδας, καὶ τὸ γράφομεν τότε εἰς τὰ δεξιὰ τῶν δεκάδων. Εἰς ἐναντίαν ὅμως περίστασιν τὸ ἐλαττοῦμεν ἀπὸ μίαν ἢ περισσοτέρας μονάδας.

Σημείωσις. Εἰς τὴν ἀναζήτησιν τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης ἀριθμοῦ τινος, δὲν ἠμποροῦμεν κατὰ πρῶτον νὰ λάβωμεν τὸ τετράγωνον τῶν μονάδων· ἐπειδὴ τοῦτο τὸ τετράγωνον δίδει ἐν γένει (ἀριθμ. 178) δεκάδας, αἱ ὁποῖαι συμπλέκονται μὲ ἐκείνας, τὰς ὁποίας δίδει τὸ διπλοῦν γινόμενον τῶν δεκάδων ἐπὶ τὰς μονάδας, ὥστε εἶναι ἀδύνατον νὰ προσδιορίσωμεν μὲ ἀκρίβειαν εἰς ποῖον μέρος τοῦ δεδομένου ἀριθμοῦ εὑρίσκεται τὸ τετράγωνον τῶν μονάδων.

Λαμβάνομεν ὡς τρίτον παράδειγμα ἀριθμὸν, ὅστις δὲν εἶναι ἐντελὲς τετράγωνον.

Ἔστω ὁ ἀριθμὸς 1287.

Ἐφαρμόζοντες εἰς τοῦτον τὸν ἀριθμὸν τὴν ἀνωτέρω διδασκαλίαν εὑρίσκομεν 35 ῥίζαν, καὶ 62 ὑπόλοιπον. Τοῦτο δεικνύει, ὅτι 1287 δὲν εἶναι ἀκριβὲς τετράγωνον, ἀλλὰ περιέχεται μεταξὺ τοῦ τετραγώνου τοῦ 35 καὶ ἐκείνου τοῦ 36. Τῷ ὄντι τὸ τετράγωνον τοῦ 35 εἶναι 1225, καὶ ἐκεῖνο τοῦ 36 εἶναι 1296, ἀριθμὸς, ὅς τις ὑπερβαίνει τὸ 1225 ἀπὸ 71, ἢ ἀπὸ 35×2+1 (ἀριθμ. 180). Λοιπὸν, ὅταν εἷς ἀριθμὸς δὲν εἶναι ἀκριβὲς τετράγωνον, διὰ τῆς μεθόδου γνωρίζομεν τοὐλάχιστον τὴν ῥίζαν τοῦ μεγαλητέρου τετραγώνου, τὸ ὁποῖον περιέχεται εἰς τοῦτον τὸν ἀριθμὸν, ἢ τὸ ἀκέραιον μέρος τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τούτου τοῦ ἀριθμοῦ.

12.87	35	
9	65	
38.7	5	
32.5	325	
62		

Θέλομεν ἰδεῖ ταχέως τίνι τρόπῳ προσδιορίζομεν τὴν ὡς ἔγγιστα τιμὴν τοῦ κλάσματος, τὸ ὁποῖον καταστaίνει πλήρη τὴν ῥίζαν.

§. 182. Ἂς ἔλθωμεν τώρα εἰς τὴν ἐξαγωγὴν τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης ἀριθμοῦ, ὅς τις ἔχει περισσότερον παρὰ τέσσαρα ψηφία.

Ἔστω 56821444 ὁ δεδομένος ἀριθμός.

56.82.14.44	7538		
49	145	1503	15068
78.2	5	3	8
725	725	4509	120544
571.4			
4509			
12054.4			
120544			
0			

Ἐπειδὴ ὁ δεδομένος ἀριθμὸς ὑπερβαίνει 10000, ἡ ῥίζα του πρέπει νὰ ἦναι μεγαλητέρα τοῦ 100· τουτέστιν, ἔχει περισσότερον παρὰ δύο ψηφία· ἀλλ' ὁποιοσδήποτε καὶ ἂν εἶναι ὁ ἀριθμὸς δύναται νὰ θεωρηθῇ πάντοτε ὡς σύνθετος μόνον ἀπὸ μονάδας καὶ δεκάδας, (ἐπειδὴ ἔστω 5367 εἷς ὁποιοσδήποτε ἀριθμός· οὗτος δύναται νὰ ἀναλυθῇ εἰς 5360+7 ἢ 5360 δεκάδας πλέον 7 μονάδας)· ἐκ τούτου τὸ τετράγωνον ταύτης τῆς ῥίζης, ἢ ὁ δεδομένος ἀριθμὸς περιέχει τὸ τετράγωνον τῶν δεκάδων, πλέον τὸ διπλοῦν γινόμενον τῶν δεκάδων ἐπὶ τὰς μονάδας, πλέον τὸ τετράγωνον τῶν μονάδων· τὸ δὲ τετράγωνον τῶν δεκάδων δίδει τοὐλάχιστον ἑκατοντάδας· λοιπὸν τὸ τελευταῖον τμῆμα 44 δὲν ἀποτελεῖ μέρος τούτου, καὶ διὰ τοῦτο εἰς τὸ ἀριστερὸν μέρος τοῦ τμήματος τούτου εὑρίσκεται τὸ τετράγωνον. Λέγω ἤδη, ὅτι ἐὰν ζητήσωμεν τὴν ῥίζαν τοῦ μεγαλητέρου τετραγώνου, τὸ ὁποῖον περιέχεται εἰς τὸ ἀριστερὸν τοῦτο μέρος, θεωρουμένην εἰς τὴν ἀπόλυτόν της τιμὴν, θέλομεν ἔχει τὸν ἀριθμὸν ὅλων τῶν δεκάδων τῆς ζητουμένης ῥίζης. Τῷ ὄντι, ἔστω α ἡ ῥίζα τοῦ μεγαλητέρου τετραγώνου, τὸ ὁποῖον περιέχεται εἰς τὸν ἀριθμὸν 568214· τοῦτο ἄλλο δὲν δηλοῖ, εἰμὴ ὅτι ὁ τελευταῖος οὗτος ἀριθμὸς περιέχεται μεταξὺ $α^2$ καὶ $(α+1)^2$. οὕτω λοιπὸν 568214×100 ἢ 56821400 περιέχεται μεταξὺ $α^2 \times 100$ καὶ $(α+1)^2 \times 100$· καὶ ἐπειδὴ οἱ δύο ἀριθμοὶ διαφέρουν μεταξύ των περισσότερον ἀπὸ ἑκατοντάδα, ἕπεται ὅτι καὶ ὁ δεδομένος ἀριθμὸς ἢ 56821444, περιέχεται μεταξὺ $α^2 \times 100$ καὶ $(α+1)^2 \times 100$. Οὕτως αἱ τετραγωνικαὶ ῥίζαι τῶν δύο ἀριθμῶν $α \times 10$ καὶ $(α+1) \times 10$ περιέχουσι τὴν ζητουμένην ῥίζαν. Λοιπὸν τέλος πάντων, αὕτη ἡ τελευταία ῥίζα σύγκειται ἀπὸ α δεκάδας, καὶ ἀπὸ ἀριθμὸν τινὰ μονάδων μικρότερον τοῦ δέκα·

Μὲ τὸ μέσον τοῦτο φθάνομεν εἰς τὴν ἐξαγωγὴν τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ ἀριθμοῦ 568214, θεωρουμένου μὲ τὴν ἀπόλυτόν του τιμήν *).

Καὶ συλλογιζόμενοι ἐπὶ τούτου τοῦ ἀριθμοῦ, ὡς ἐπὶ τοῦ δεδομένου, ἐξάγομεν, ὅτι διὰ νὰ εὕρωμεν τὰς δεκάδας τῆς ῥίζης του, πρέπει νὰ ἐξάξωμεν τὴν ῥίζαν τοῦ μεγαλητέρου τετραγώνου, τὸ ὁποῖον περιέχεται εἰς τὸ ἀριστερὸν μέρος τοῦ 14, τουτέστιν εἰς τὸ 5682, καὶ διὰ νὰ λάβωμεν τὰς δεκάδας ταύτης τῆς νέας ῥίζης, πρέπει ἀκόμη νὰ ἀφαιρέσωμεν δύο τελευταῖα ψηφία 82, καὶ νὰ ἐξάξωμεν τὴν ῥίζαν τοῦ μεγαλητέρου τετραγώνου τοῦ περιεχομένου εἰς τὸ 56.

Ἐξάγοντες λοιπὸν τὴν ῥίζαν τοῦ 56, εὑρίσκομεν 7 διὰ τὸ 49. Γράφομεν 7 εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ δεδομένου ἀριθμοῦ, καὶ ἀφαιροῦμεν 49 ἀπὸ τὸ 56, καὶ ἔχομεν ὑπόλοιπον 7, εἰς τὸ πλευρὸν τοῦ ὁποίου κατεβάζομεν τὸ ἀκόλουθον τμῆμα 82 (ἐπειδὴ πρέπει ἤδη νὰ προσδιορίσωμεν τὸ δεύτερον ψηφίον τῆς ῥίζης τοῦ μεγαλητέρου τετραγώνου τοῦ περιεχομένου εἰς 5682)· χωρίζομεν τὸ τελευταῖον ψηφίον εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ 782, μετὰ ταῦτα διαιροῦμεν τὸ 78 διὰ τοῦ 14, διπλοῦ τῆς ἤδη εὑρεθείσης ῥίζης, καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον 5, τὸ ὁποῖον γράφομεν εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ 14, καὶ ὑπὸ αὐτὸ τὸ ἴδιον. Μετὰ ταῦτα πολλαπλασιάζομεν 145

---

*) Ἐπειδὴ τὸ α^2 διαφέρει τοῦ $(\alpha+1)^2$ κατὰ $2\alpha+1$, τὸ δὲ α^2 διαφέρει τοῦ 568214 ὄχι περισσότερον τοῦ 2α, καὶ διὰ τοῦτο $100\,\alpha^2$ διαφέρει τοῦ 56821400 ὄχι περισσότερον τοῦ $2\alpha\times100$, τὸ δὲ $100\,(\alpha+1)^2$ διαφέρει τοῦ $100\,\alpha^2$ κατὰ

$$100\times2\alpha+100\times1.$$

λοιπὸν $100\,(\alpha+1)^2$ διαφέρει τοῦ 56821400, τ' ὀλιγώτερον 100. λοιπόν,

$$56821400+44<100\,(\alpha+1)^2.$$

(Ὁ Μεταφραστής).

ἐπὶ 5, καὶ ἀφαιροῦμεν τὸ γινόμενον 725 ἀπὸ τὸ 782· τὸ δὲ 75 παῤῥησιάζει τότε τὴν συλλογὴν τῶν δεκάδων τῆς ῥίζης τοῦ ἀριθμοῦ 568214.

Διὰ νὰ προσδιορίσωμεν τὰς μονάδας κατεβάζομεν εἰς τὸ πλευρὸν τοῦ ὑπολοίπου 57, τὸ τμῆμα 14· τοῦτο μᾶς δίδει 5714, τοῦ ὁποίου χωρίζομεν τὸ τελευταῖον ψηφίον. Διαιροῦντες δὲ 571 διὰ 150 διπλασίου τῆς εὑρεθείσης ῥίζης ἔχομεν 3 πηλίκον, τὸ ὁποῖον γράφομεν εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ 150, καὶ ὑπὸ αὐτὸ τὸ ἴδιον. Μετὰ ταῦτα πολλαπλασιάζομεν 1503 ἐπὶ 3, καὶ ἀφαιροῦμεν τὸ διδόμενον 4509 ἀπὸ 5714· τὸ δὲ 753 ἐκφράζει τὸν ὅλον ἀριθμὸν τῶν δεκάδων τῆς ζητουμένης ῥίζης.

Τέλος πάντων, διὰ νὰ ἔχωμεν τὸ ψηφίον τῶν μονάδων, κατεβάζομεν εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ ὑπολοίπου 1205 τὸ τελευταῖον τμῆμα 44. Μετὰ ταῦτα ἀμελοῦντες τὸ τελευταῖον ψηφίον, διαιροῦντες τὸ εἰς τὰ ἀριστερὰ μέρος 12054 διὰ 1506 διπλασίου τῆς εὑρεθείσης ῥίζης, ἔχομεν πηλίκον 8, τὸ ὁποῖον γράφομεν εἰς τὰ δεξιὰ τῶν 1506, καὶ ὑπ' αὐτὸ τὸ ἴδιον· πολλαπλασιάζομεν ὕστερον 15068 ἐπὶ 8, καὶ ἀφαιροῦντες τὸ γινόμενον 120544 λαμβάνομεν μηδὲν ὑπόλοιπον· λοιπὸν 7538 εἶναι ἡ ζητουμένη ῥίζα.

Διὰ νὰ τὴν βεβαιώσωμεν, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμὸν 7538 ἐφ' ἑαυτὸν, κατὰ τοὺς κανόνας τοῦ ἀριθμητικοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

Ἐὰν καλῶς ἐννοήσωμεν τὰ διάφορα μέρη τῆς ἀνωτέρας πράξεως, θέλομεν συμπεράνει μὲ εὐκολίαν τὴν ἀκόλουθον μέθοδον.

Χωρίζομεν τὸν ἀριθμὸν εἰς τμήματα ἀνὰ δύο ψηφία ἕκαστον, ἀρξάμενοι ἀπὸ τὰ δεξιὰ (ὁ ἀριθμὸς τῶν τμημάτων εἶναι ἴσος μὲ τὸν ἀριθμὸν τῶν ψηφίων τῆς ῥίζης). Λαμβάνομεν τὴν ῥίζαν τοῦ μεγαλητέρου τε-

τραγώνου, τὸ ὁποῖον περιέχεται εἰς τὸ πρῶτον τμῆμα κατὰ τὰ ἀριστερὰ, τὸ ὁποῖον ἠμπορεῖ νὰ ἔχῃ μόνον ἓν ψηφίον, καὶ ἀφαιροῦμεν τὸ τετράγωνον τοῦ εὑρεθέντος ψηφίου ἀπὸ τὸ πρῶτον κατὰ τὰ ἀριστερὰ τμῆμα.

Κατεβάζομεν εἰς τὸ πλευρὸν τοῦ ὑπολοίπου τὸ δεύτερον κατὰ τὰ ἀριστερὰ τμῆμα καὶ χωρίζομεν τὸ τελευταῖον ψηφίον διὰ στιγμῆς. Μετὰ ταῦτα διαιροῦμεν τὸ εἰς τὰ ἀριστερὰ μέρος τούτου τοῦ ψηφίου, διὰ τοῦ διπλασίου τῆς εὑρεθείσης ῥίζης. Γράφομεν δὲ τὸ πηλίκον εἰς τὸ πλευρὸν τοῦ διπλασίου τῆς ῥίζης, καὶ πολλαπλασιάζομεν τὸν σχηματισμένον οὕτως ἀριθμὸν ἐπὶ τὸ πηλίκον, καὶ ἀφαιροῦμεν τὸ γινόμενον ἀπὸ τὸ πρῶτον ὑπόλοιπον τὸ συναγόμενον ἐκ τοῦ δευτέρου τμήματος.

Κατεβάζομεν εἰς τὸ πλευρὸν τοῦ νέου ὑπολοίπου τὸ τρίτον τμῆμα, καὶ χωρίζομεν τὸ τελευταῖον ψηφίον. Διαιροῦμεν ἔπειτα τὸ εἰς τὰ ἀριστερὰ μέρος διὰ τοῦ διπλασίου τῆς εὑρεθείσης ῥίζης· γράφομεν τὸ πηλίκον εἰς τὸ πλευρὸν τοῦ διπλασίου, καὶ μετὰ ταῦτα πολλαπλασιάζομεν τὸν οὕτως σχηματισθέντα ἀριθμὸν ἐπὶ τὸ πηλίκον καὶ ἀφαιροῦμεν τὸ γινόμενον ἐκ τοῦ συναγομένου δευτέρου ὑπολοίπου ἀπὸ τὸ τρίτον τμῆμα. Ἀκολουθοῦμεν ταύτην τὴν σειρὰν τῶν πράξεων, ἕως νὰ κατεβάσωμεν ὅλα τὰ τμήματα.

Ἐὰν εἰς τὸ τέλος ὅλων τῶν πράξεων εὕρωμεν μηδὲν ὑπόλοιπον, ὁ δεδομένος ἀριθμὸς εἶναι ἀκριβὲς τετράγωνον· ἐὰν δὲ εὕρωμεν ὑπόλοιπον, τότε ὁ ἀριθμὸς δὲν εἶναι τέλειον τετράγωνον, ὅμως ἔχομεν τὴν ῥίζαν τοῦ μεγαλητέρου τετραγώνου τοῦ περιεχομένου εἰς τὸν ἀριθμὸν, ἢ, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ αὐτὸ, τὸ ἀκέραιον μέρος τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ ἀριθμοῦ· τὸ δὲ ὑπόλοιπον πρέπει νὰ εἶναι (ἀριθμ. 180) μικρό-

τερον τοῦ διπλασίου τῆς εὑρεθείσης ῥίζης πλέον ἕν, ἢ ἀλλέως τὰ ψηφία τῆς εὑρεθείσης ῥίζης κακῶς ἐπροσδιορίσθησαν.

§. 183. Ἐφαρμόζομεν ἐκ νέου τὰ εἰρημένα εἰς τὴν ἐξαγωγὴν τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τῶν ἀριθμῶν 176988849 καὶ 698485, καὶ εὑρίσκομεν $\sqrt{17698849}$ $=4207$, $\sqrt{698485}=835$ μὲ ὑπόλοιπον 1260.

Πρώτη παρατήρησις. Εἰς τὸ πρῶτον τούτων τῶν δύο παραδειγμάτων εὑρίσκομεν 0 δι' ἓν τῶν ψηφίων τῆς ῥίζης. Τοῦτο ἀπαντᾶται, ἐπειδὴ ἀφ' οὗ κατεβάσαμεν ἓν τμῆμα, καὶ ἐχωρίσαμεν τὸ τελευταῖον ψηφίον, τὸ εἰς τὰ δεξιὰ μέρος εἶναι μικρότερον τοῦ διπλασίου τῆς εὑρεθείσης. Τοῦτο φανερόνει, ὅτι ἡ ῥίζα δὲν ἔχει μονάδας τῆς ἀντικειμένης τάξεως εἰς τὸ καταβιβασθὲν τμῆμα, ἀλλὰ πρέπει νὰ βάλωμεν ἓν 0 εἰς τὴν ῥίζαν, διὰ νὰ δώσῃ εἰς τὰ εὑρεθέντα ψηφία τὴν σχετικήν των τιμήν.

Δευτέρα παρατήρησις. Προκύπτει ἐκ τῆς φύσεως τῆς ἰδίας πράξεως, ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῶν ψηφίων τῆς ῥίζης εἶναι ἴσος μὲ τὸν ἀριθμὸν τῶν ἀπὸ δύο ψηφία τμημάτων, τὰ ὁποῖα δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν εἰς τὸν δεδομένον ἀριθμόν. Ἀλλ' αὕτη ἡ πρότασις δεικνύεται ἐκ τῶν προτέρων, τουτέστι χωρὶς τὴν βοήθειαν τῆς μεθόδου.

Τῷ ὄντι τὸ τετράγωνον τοῦ $10^{\nu-1}$ ἢ τοῦ μικροτέρου ἀριθμοῦ ἐκ ν ψηφίων, εἶναι ἴσον μὲ τὴν μονάδα ἀκολουθημένην ἀπὸ $2(\nu-1)$ ἢ ἀπὸ $2\nu-2$ μηδενικὰ, καὶ ἐκφράζει τὸν μικρότερον ἀριθμὸν ἀπὸ $2\nu-1$ ψηφία. Ἀπὸ τὸ ἄλλο μέρος, τὸ τετράγωνον τοῦ 10^{ν}, ἢ τοῦ μικροτέρου ἀριθμοῦ συνισταμένου ἀπὸ $\nu+1$ ψηφία εἶναι ἴσον μὲ τὴν μονάδα ἀκολουθημένην ἀπὸ 2ν μηδενικὰ, καὶ ἐκφράζει τὸν πλέον μικρότερον ἀριθμὸν συνιστάμενον ἀπὸ $2\nu+1$ ψηφία. Λοιπὸν κάθε ἀριθμὸς, ὅς τις δύναται νὰ ἀναλυθῇ εἰς ν τμήματα, ἕκαστον

ἀπὸ δύο ψηφία (ἐξ ὧν τὸ ἓν ἠμπορεῖ νὰ ἔχῃ ἓν μόνον ψηφίον), ἔχει ῥίζαν, ἥτις περιέχεται μεταξὺ τοῦ $10^{\nu-1}$ καὶ 10^{ν}, καὶ ἐπομένως σύνθετον ἀπὸ ν ψηφία.

§. 184. Τρίτη παρατήρησις. Γνωρίζομεν συχνὰ ἀπὸ τὴν ἁπλῆν παρατήρησιν ἑνὸς ἀριθμοῦ ἀκεραίου, ὅτι δὲν εἶναι ἀκριβὲς τετράγωνον, καὶ τοῦτο εἶναι ὠφέλιμον εἰς τὰς πράξεις. Ἰδοὺ τὰ ἀρχικὰ τούτου σημεῖα.

1ον. Παντὸς ἀρτίου ἀριθμοῦ, ὅς τις δύναται νὰ ἐκφρασθῇ διὰ 2ν, τὸ τετράγωνον $4\nu^2$ εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ 4.

Οὕτως, πᾶς ἄρτιος ἀριθμὸς, ὅς τις δὲν εἶναι διαιρετὸς διὰ 4 (ἀριθμ. 140), δὲν εἶναι ἀκριβὲς τετράγωνον. Παρομοίως ἐπειδὴ τὸ τετράγωνον περιττοῦ τινὸς ἀριθμοῦ $2\nu+1$ εἶναι $4\nu^2+4\nu+1$, ἀριθμὸς, ὅς τις ἐλαττούμενος ἀπὸ μίαν μονάδα γίνεται διαιρετὸς διὰ τοῦ 4, ἕπεται ὅτι πᾶς ἀριθμὸς περιττὸς, ὅς τις ἐλαττούμενος ἀπὸ 1, δὲν εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ 4, δὲν εἶναι τέλειον τετράγωνον.

2ον. Ἐν γένει πᾶς ἀριθμὸς, ὅς τις περιέχων ἕνα παράγοντα πρῶτον α, δὲν εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ α^2, δὲν δύναται νὰ εἶναι τέλειον τετράγωνον· ἐπειδὴ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τούτου τοῦ ἀριθμοῦ, ἐὰν ἦτον ἀκεραία, ἤθελεν εἶναι (ἀριθμ. 134) τῆς μορφῆς $\alpha\nu$, τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον $\alpha^2\nu^2$ εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ α^2.

Οὕτως ἀριθμός τις διαιρετὸς διὰ 3 ἢ 5, πρέπει εἰς τὸν αὐτὸν καιρὸν νὰ εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ 9 ἢ 25, διὰ νὰ εἶναι τέλειον τετράγωνον.

Ἐπειδὴ κατὰ τὴν σύνθεσιν τοῦ τετραγώνου ἑνὸς ἀριθμοῦ, ὅς τις περιέχει περισσότερον ἀπὸ ἓν ψηφίον, (ἀριθμ. 181) αἱ ἁπλαῖ μονάδες τοῦ τετραγώνου προ-

έρχονται από το τετράγωνον των μονάδων της ρίζης· σχηματίζοντες δε τα τετράγωνα των εννέα πρώτων αριθμών, βλέπομεν, ότι ουδέν τούτων τελειόνει εις τα ψηφία 2, 3, 7, 8.

4ον. Πας αριθμός, όςτις τελειόνει εις το ψηφίον 5, δεν είναι τέλειον τετράγωνον, εάν το ψηφίον των δεκάδων του δεν είναι 2. Το χαρακτηριστικόν τούτο πορίζεται και αυτό από την σύνθεσιν του τετραγώνου αριθμού τινός εκ δύο ή περισσοτέρων ψηφίων. Τα δύο τελευταία ψηφία του δεδομένου αριθμού εις ταύτην την περίστασιν προέρχονται από το τετράγωνον των μονάδων της ρίζης· διότι του ψηφίου τούτου των μονάδων όντος 5, το διπλούν γινόμενον των δεκάδων επί τούτο το ψηφίον είναι αναγκαίως εις αριθμός εκατοντάδων· αλλά το τετράγωνον του 5 είναι 25, λοιπόν ο αριθμός πρέπει να τελειόνη εις 25.

5ον. Τέλος πάντων, πας αριθμός, όςτις τελειόνει εις αριθμόν περιττόν μηδενικών δεν είναι τέλειον τετράγωνον· τούτο είναι φανερόν· επειδή εάν η ρίζα ήτον ακριβής, αύτη ήθελεν είναι ακέραιος αριθμός τελειόνων εις εν ή περισσότερα μηδενικά, του οποίου το τετράγωνον έπρεπε να περιέχη δύο φοραίς πλειότερα μηδενικά, αφ' όσα δεν ήθελεν έχει η ρίζα, και επομένως αριθμός τις άρτιος μηδενικών, το οποίον ήθελεν είναι εναντίον της υποθέσεως.

Εξαγωγή της τετραγωνικής ρίζης διά προσεγγίσεως.

§. 185. Όταν ακέραιός τις αριθμός δεν ήναι τετράγωνον άλλου ακεραίου αριθμού, δεν δύναται να είναι πλέον ούτε τετράγωνον ακριβούς κλασματικού αριθμού (αριθμ. 179)· αλλ' εάν είναι αδύνατον να

ἐκτιμήσωμεν μὲ ἀκρίβειαν τὸ κλάσμα, τὸ ὁποῖον μέλλει νὰ καταστήσῃ πλήρη τὴν ῥίζαν· δυνάμεθα τοὐλάχιστιν νὰ τὸ προσδιορίσωμεν ὡς ἔγγιστα, καὶ προσέτι μ' ὅσον θέλομεν βαθμὸν προσεγγίσεως.

Πρὶν δείξωμεν τὰ πρὸς τοῦτο συντείνοντα μέσα παρατηροῦμεν, ὅτι ἐπειδὴ τὸ τετράγωνον κλάσματος, ἢ κλασματικοῦ ἀριθμοῦ $\frac{\alpha}{\beta}$ εἶναι $\frac{\alpha}{\beta}\times\frac{\alpha}{\beta}$ ἢ $\frac{\alpha^2}{\beta^2}$, ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ $\frac{\alpha^2}{\beta^2}$ ἐξ ἐναντίας εἶναι $\frac{\alpha}{\beta}$. Λοιπὸν διὰ νὰ ἐξάξωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν κλάσματος, τοῦ ὁποίου οἱ δύο ὅροι εἶναι τέλεια τετράγωνα, πρέπει νὰ ἐξάξωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ ἀριθμητοῦ καὶ παρονομαστοῦ, καὶ νὰ διαιρέσωμεν αὐτὰς τὰς δύο ῥίζας τὴν μίαν διὰ τῆς ἄλλης.

Κατὰ τοῦτο, ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι ζητοῦμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ ἀκεραίου ἀριθμοῦ α διαφέρουσαν τῆς ἀκριβοῦς ὀλιγώτερον παρὰ τὸ κλάσμα $\frac{1}{\nu}$, τουτέστιν ὅτι ζητοῦμεν ἀριθμὸν διαφέροντα τῆς ῥίζης τοῦ α κατὰ ποσότητα τινὰ μικροτέραν τοῦ κλάσματος $\frac{1}{\nu}$.

Πρὸς τοῦτο παρατηροῦμεν, ὅτι α εἶναι τὸ αὐτὸ, ὡς $\frac{\alpha\nu^2}{\nu^2}$. Ἐὰν σημειώσωμεν διὰ ρ τὸ ἀκέραιον μέρος τῆς ῥίζης τοῦ $\alpha\nu^2$, οὗτος ὁ ἀριθμὸς $\alpha\nu^2$ εὑρίσκεται μεταξὺ τοῦ ρ^2 καὶ $(\rho+1)$. Οὕτω λοιπὸν $\frac{\alpha\nu^2}{\nu^2}$ περιέχεται μεταξὺ $\frac{\rho^2}{\nu^2}$ καὶ $\frac{(\rho+1)^2}{\nu^2}$, καὶ ἑπομένως ἡ ῥίζα

τοῦ α περιέχεται μεταξὺ ἐκείνων τοῦ $\frac{\rho^2}{\nu^2}$ καὶ $\frac{(\rho+1)^2}{\nu^2}$, τουτέστι μεταξὺ $\frac{\rho}{\nu}$ καὶ $\frac{\rho+1}{\nu}$. Λοιπὸν $\frac{\rho}{\nu}$ ἐκφράζει τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ α, καὶ τὸ κλάσμα εἶναι μικρότερον τοῦ κλάσματος $\frac{1}{\nu}$.

Ἐκ τούτου συμπεραίνομεν τὴν ἀκόλουθον μέθοδον: Πολλαπλασιάζομεν τὸν δεδομένον ἀριθμὸν ἐπὶ τὸ τετράγωνον τοῦ παρονομαστοῦ ν τοῦ κλάσματος, τὸ ὁποῖον προσδιορίζει τὸν βαθμὸν τῆς προσεγγίσεως, τὸν ὁποῖον θέλομεν νὰ ἔχωμεν· ἐξάγομεν τὸ ἀκέραιον μέρος τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ γινομένου, καὶ διαιροῦμεν τὸ ἀκέραιον τοῦτο μέρος διὰ τοῦ παρονομαστοῦ ν.

Ἐξαχθήτω λόγου χάριν ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 59 μεῖον $\frac{1}{12}$.

Πολλαπλασιάζομεν 59 ἐπὶ τὸ τετράγωνον τοῦ 12 ἢ ἐπὶ 144, καὶ ἔχομεν 8496, τοῦ ὁποίου τὸ ἀκέραιον μέρος τῆς ῥίζης εἶναι 92. Λοιπὸν $\frac{92}{12}$ ἢ $\frac{93}{12}$ εἶναι ἡ ῥίζα τοῦ 59 μεῖον $\frac{1}{12}$.

Ἂς ἐπαναλάβωμεν ἐπὶ τούτου τοῦ μερικοῦ παραδείγματος τὴν δεῖξιν, τὴν ὁποίαν ἀνωτέρω ἀνεπτύξαμεν.

Ὁ ἀριθμὸς 59 δύναται νὰ τεθῇ ὑπὸ τὴν μορφὴν $\frac{59\times(12)^2}{(12)^2}$, ἢ ἀφ' οὗ ἐκτελεσθοῦν οἱ ὑπολογι-

μοὶ τοῦ ἀριθμητοῦ $\frac{8496}{(12)^2}$. Ἀλλ' ἐπειδὴ ἡ ῥίζα τοῦ 8496 μεῖον μονάδος, εἶναι 92, ἕπεται ὅτι $\frac{8496}{(12)^2}$ ἢ 59 περιέχεται μεταξὺ $\frac{(92)^2}{(12)^2}$ καὶ $\frac{(93)^2}{(12)^2}$. Λοιπὸν ἡ ῥίζα τοῦ 59 περιέχεται καὶ αὐτὴ μεταξὺ τοῦ $\frac{92}{12}$ καὶ $\frac{93}{12}$, τουτέστιν αὕτη ἡ ῥίζα διαφέρει τῶν $\frac{92}{12}$ κατά τι κλάσμα μικρότερον τοῦ $\frac{1}{12}$.

Τῷ ὄντι τὰ τετράγωνα τῶν $\frac{92}{12}$ καὶ $\frac{93}{12}$ εἶναι $\frac{8464}{(12)^2}$ καὶ $\frac{8649}{(12)^2}$, ἀριθμοὶ, οἱ ὁποῖοι περιέχουν τὸ $\frac{8496}{(12)^2}$ ἢ 59.

Εὑρίσκομεν διὰ τῆς αὐτῆς μεθόδου . . . . $\sqrt{11}$ μεῖον $\frac{1}{15}=\frac{49}{15}=3\frac{4}{15}$. $\sqrt{223}$ μεῖον $\frac{1}{40}=14\frac{37}{40}$.

Σ. Κ. Ἡ τέχνη, ἥτις χρησιμεύει ὡς βάσις τοῦ νὰ πλησιάζωμεν εἰς τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν ἀκεραίου τινὸς ἀριθμοῦ, συνίσταται εἰς τὸ νὰ περιλαμβάνωμεν τὸν δεδομένον ἀριθμὸν μεταξὺ εἰς τὰ τετράγωνα δύο ἄλλων κλασματικῶν ἀριθμῶν, τῶν ὁποίων ὁ παρονομαστὴς νὰ εἶναι ἐκεῖνος τοῦ κλάσματος, τὸ ὁποῖον προσδιορίζει τὴν προσέγγισιν· καὶ οἱ ἀριθμηταί των νὰ μὴ διαφέρωσιν ἀναμεταξύ τους, εἰμὴ κατὰ τὴν μονάδα.

§. 186. Ἡ προσέγγισις εἰς δεκαδικὰ, ἥτις εἶναι ἡ πλέον συνειθισμένη, εἶναι συνέπεια τοῦ προηγου-

μένου κανόνος. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν ἀκεραίου ἀριθμοῦ μεῖον τοῦ $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, πρέπει κατὰ τὸν κανόνα τοῦτον νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν δεδομένον ἀριθμὸν ἐπὶ $(10)^2$, $(100)^2$, $(1000)^2$ . . . ἤ, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ αὐτὸ, νὰ προσθέσωμεν εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ ἀριθμοῦ, 2, 4, 6, . . . μηδενικά. Μετὰ ταῦτα νὰ ἐξάξωμεν τὴν ῥίζαν τοῦ γινομένου μεῖον μιᾶς μονάδος, καὶ νὰ διαιρέσωμεν τὴν ῥίζαν διὰ τοῦ 10, 100, 100 . . .

Λοιπὸν διὰ νὰ εὕρωμεν πεπερασμένον ἀριθμὸν δεκαδικῶν ψηφίων εἰς τὴν ῥίζαν, γράφομεν εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ δεδομένου ἀριθμοῦ δύο φοραῖς τόσα μηδενικὰ, ὅσα ψηφία δεκαδικὰ θέλομεν νὰ ἔχωμεν. Ἐξάγομεν ἔπειτα τὸ ἀκέραιον μέρος τῆς ῥίζης τοῦ νέου ἀριθμοῦ, καὶ χωρίζομεν κατὰ τὰ δεξιὰ τοῦ ἐξαγομένου τὰ ζητούμενα δεκαδικὰ ψηφία.

Ἐξαχθήτω λόγου χάριν ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 7 μεῖον $\frac{1}{1000}$.

Ἀφ' οὗ προσθέσωμεν ἓξ μηδενικὰ εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ 7, ἔχομεν 7000000, ἀριθμὸν, τοῦ ὁποίου ἡ ῥίζα, ἐξαγομένη κατὰ τὴν μέθοδον τοῦ ἀριθμοῦ 182, ἔχει ἀκέραιον μέρος 2645. Λοιπὸν 2, 645 εἶναι ἡ ζητουμένη ῥίζα, τουτέστιν ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 7 περιέχεται μεταξὺ 2, 645 καὶ 2, 646.

```
7.0 0.0 0.0 0.0 ) 2645
4               ) 46 . . .   524
30.0            )  6           4
27 6              276       2096
 2 4 0.0
 2 0 9 6                    5285
   3 0 4 0.0                   5
   2 6 4 2.5               26425
     3 9 7 5
```

Σ. Κ. Ἐπειδὴ, ἀφ' οὗ ἐπροσθέσαμεν τὸν ἀριθμὸν τῶν ἀναγκαίων μηδενικῶν, ἐχωρίσαμεν τὸν ἀριθμὸν εἰς τμήματα ἀνὰ δύο ψηφία ἀρξάμενοι ἀπὸ τὰ δεξιὰ, δυνάμεθα νὰ μὴν γράψωμεν ἀπὸ τὴν ἀρχὴν τὰ τμήματα ἀπὸ δύο μηδενικὰ, καὶ νὰ τὰ προσθέσωμεν μόνον, ὅταν θέλωμεν νὰ προσδιορίσωμεν νέον ἄλλο ψηφίον δεκαδικὸν εἰς τὴν ῥίζαν.

Εὑρίσκομεν κατὰ τούτους τοὺς κανόνας, ὅτι $\sqrt{29}$ μεῖον $\frac{1}{100} = 5,38$· καὶ $\sqrt{227}$ μεῖον $\frac{1}{10000} = 15,0665$.

§. 187. Ἐξαγωγὴ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τῶν κλασμάτων.

Ἔστω $\frac{\alpha}{\beta}$ τὸ προβαλλόμενον κλάσμα.

Κατὰ πρῶτον αὐτὸ δύναται νὰ τρεφθῇ εἰς τοῦτο $\frac{\alpha\beta}{\beta^2}$ (τὸ ὁποῖον κάμνομεν πολλαπλασιάζοντες τοὺς δύο του ὅρους ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν β)· τούτου τεθέντος, ἐὰν σημειώσωμεν διὰ ρ τὸ ἀκέραιον μέρος τῆς ῥίζης τοῦ ἀριθμητοῦ αβ, ἕπεται, ὅτι $\frac{\alpha\beta}{\beta 2}$ ἢ $\frac{\alpha}{\beta}$ περιέχεται μεταξὺ τοῦ $\frac{\rho^2}{\beta^2}$ καὶ $\frac{(\rho+1)^2}{\beta^2}$. Λοιπὸν ἡ ῥίζα τοῦ $\frac{\alpha}{\beta}$ εὑρίσκεται ἀναμεταξὺ τοῦ $\frac{\rho}{\beta}$ καὶ $\frac{\rho+1}{\beta}$· οὕτως $\frac{\rho}{\beta}$ παριστάνει τὴν ῥίζαν τοῦ $\frac{\alpha}{\beta}$, μεῖον κλάσματος, σημειωμένου διὰ τοῦ $\frac{1}{\beta}$.

Λοιπὸν διὰ νὰ προσδιορίσωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν ἑνὸς κλάσματος, καθισταίνομεν κατὰ πρῶτον

τὸν παρονομαστήν του τέλειον τετράγωνον, πολλαπλασιάζοντες τοὺς δύο του ὅρους ἐπὶ τὸν παρονομαστήν. Ἐξάγομεν τὴν ῥίζαν τοῦ νέου ἀριθμητοῦ μεῖον μονάδος, καὶ διαιροῦμεν τὸ ἐξαγόμενον διὰ τοῦ παρονομαστοῦ.

Παράδειγμα. Ἐξαχθήτω ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ $\frac{7}{13}$.

Τὸ κλάσμα τοῦτο τρέπεται εἰς $\frac{7\times13}{(13)^2}$ ἢ $\frac{91}{(13)^2}$. ἀλλ' ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 91 εἶναι 9 μεῖον μιᾶς μονάδος· λοιπὸν $\frac{9}{13}$ εἶναι ἡ ζητουμένη ῥίζα μεῖον $\frac{1}{13}$.

Ἐμποροῦμεν κάποτε νὰ ζητήσωμεν μεγαλήτερον βαθμὸν προσεγγίσεως. Εἰς ταύτην τὴν περίστασιν ἐπαναλαμβάνομεν τὸν ἀριθμὸν $\frac{91}{(13)^2}$, καὶ ἐξάγομεν τὴν ῥίζαν τοῦ 91 μὲ βαθμὸν τινὰ προσεγγίσεως. Ἂς ὑποθέσωμεν π. χ., ὅτι θέλομεν νὰ προσδιορίσωμεν $\sqrt{91}$ μεῖον $\frac{1}{100}$· θέλομεν εὕρει (ἀριθμ. 186) $\sqrt{91}=9,53$·

Λοιπὸν ἡ ῥίζα τοῦ $\frac{91}{(13)^2}$, ἢ $\frac{7}{13}$ θέλει εἶναι $\frac{9,53}{13}$ ἢ $\frac{953}{1300}$ μεῖον $\frac{1}{1300}$. Τῷ ὄντι, εἶναι φανερὸν, ὅτι $\frac{91}{(13)^2}$ εὑρίσκεται μεταξὺ $\frac{(9,53)^2}{(13)^2}$ καὶ $\frac{(9,54)^2}{(13)^2}$. Οὕτως ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ $\frac{91}{(13)^2}$ διαφέρει ἀπὸ $\frac{9,53}{13}$ κατὰ ποσότητα μικροτέραν παρὰ τὸ δέκατον τρίτον μέρος τοῦ $\frac{1}{100}$ ἢ $\frac{1}{1300}$.

Παρατήρησις. Πολλάκις ὁ παρονομαστὴς τοῦ κλάσματος, χωρὶς νὰ ἦναι τέλειον τετράγωνον, περιέχει παράγοντα, τέλειον τετράγωνον. Εἰς ταύτην τὴν περίστασιν τὸ κλάσμα δὲν μᾶς προσφέρει κἀνένα κόπον.

Ἔστω π. χ., τὸ κλάσμα $\frac{23}{48}$. Παρατηροῦμεν ὅτι 48 εἶναι ἴσον μὲ 16×3 ἢ $(4)^2\times3$. Οὕτως πολλαπλασιάζοντες τοὺς δύο ὅρους ἐπὶ 3, τὸ κλάσμα τρέπεται εἰς $\frac{23\times3}{(4)^2\times(3)^2}$ ἢ $\frac{69}{(12)^2}$· καὶ οὕτως ὁ παρονομαστὴς ἄγεται εἰς τέλειον τετράγωνον. Ἐξάγοντες δὲ τὴν ῥίζαν τοῦ 69 μεῖον $\frac{1}{10}$, τὸ ὁποῖονδίδει 8,3, εὑρίσκομεν τὴν ζητουμένην ῥίζαν $\frac{8,3}{12}$ ἢ $\frac{83}{120}$ μεῖον $\frac{1}{120}$.

Ἐν γένει ὁσάκις ὁ παρονομαστὴς περιέχει παράγοντα τέλειον τετράγωνον, πολλαπλασιάζομεν τοὺς δύο ὅρους τοῦ κλάσματος ἐπὶ τὸν παράγοντα τὸν μὴ ὄντα τέλειον τετράγωνον.

§. 188. Ἡ ἐξαγωγὴ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τῶν δεκαδικῶν κλασμάτων ἐξάγεται ἐκ τῆς προηγουμένης ἀνωτέρας παρατηρήσεως.

Ἂς λάβωμεν παράδειγμα τὸν ἀριθμὸν 3,425, τοῦ ὁποίου ζητοῦμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν. Τοῦτο τὸ κλάσμα ἄγεται εἰς $\frac{3425}{1000}$· ἀλλὰ 1000 δὲν εἶναι τετράγωνον, ὅμως εἶναι ἴσον μὲ 100×10, ἢ $(10)^2\times10$· οὕτως διὰ νὰ καταστήσωμεν τὸν παρονομαστὴν τέλειον τετράγωνον, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τοὺς δύο ὅρους ἐπὶ 10. ἡ ὁποία πρᾶξις δίδει $\frac{34250}{10000}$ ἢ $\frac{34250}{(100)^2}$, καὶ ἐξάγοντες τότε τὴν ῥίζαν τῶν 34250, μεῖον

μονάδος, εὑρίσκομεν 185. Λοιπὸν $\frac{100}{185}$, ἢ 1,85 εἶναι ἡ ζητουμένη ῥίζα, μεῖον $\frac{1}{100}$.

Ἂν ἐπιθυμοῦσαμεν μεγαλήτερον ἀριθμὸν δεκαδικῶν ψηφίων εἰς τὴν ῥίζαν, ἔπρεπε νὰ προσθέσωμεν εἰς τὰ δεξιὰ τῶν 34250 τόσα τμήματα ἀπὸ δύο μηδενικὰ, ὅσα περισσότερα δεκαδικὰ ψηφία θέλομεν νὰ εὕρωμεν.

Γενικὸς Κανών. „Διὰ νὰ ἐξάξωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ δεκαδικοῦ κλάσματος, καθισταίνομεν κατ' ἀρχὰς τὸν ἀριθμὸν τῶν δεκαδικῶν ψηφίων ἄρτιον καὶ διπλάσιον τοῦ ἀριθμοῦ τῶν δεκαδικῶν ψηφίων, τὰ ὁποῖα θέλομεν νὰ εὕρωμεν εἰς τὴν ῥίζαν; τὸ ὁποῖον γίνεται μὲ τὴν προσθήκην ἱκανοῦ τινὸς ἀριθμοῦ μηδενικῶν εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ δεδομένου ἀριθμοῦ· ἀποβάλλομεν τὴν ὑποστιγμὴν εἰς τὸν νέον ἀριθμὸν, καὶ ἐξάγομεν τὴν ῥίζαν μεῖον μονάδος· καὶ μετὰ ταῦτα, χωρίζομεν κατὰ τὰ δεξιὰ ταύτης τῆς ῥίζης τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν τῶν δεκαδικῶν ψηφίων."

Δυνάμεθα ἀκόμη νὰ ἐξάξωμεν τοῦτον τὸν κανόνα, ὡς συνέπειαν τῆς μεθόδου τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν δεκαδικῶν κλασμάτων, διὰ μέσου τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον δεκαδικοῦ τινὸς κλάσματος; ἢ τὸ γινόμενον τοῦ τοιούτου κλάσματος ἐφ' ἑαυτὸ, πρέπει νὰ περιέχῃ τὸ διπλοῦν τοῦ ἀριθμοῦ τῶν δεκαδικῶν ψηφίων, τὰ ὁποῖα εὑρίσκονται εἰς τὴν ῥίζαν.

Ἂς λάβωμεν δεύτερον παράδειγμα τὸ κλάσμα 0, 05409, τοῦ ὁποίου ζητοῦμεν τὴν ῥίζαν μεῖον $\frac{1}{100000}$.

Ὁ ἀριθμὸς οὗτος δύναται νὰ τεθῇ ὑπὸ τὴν μορφὴν 0, 054090000. Ἐξαλείφοντες τὴν ὑποστιγμὴν καὶ

ἀποβάλλοντες τὰ μηδενικὰ, τὰ ὁποῖα εὑρίσκονται εἰς τὰ ἀριστερὰ, ὡς ἀνωφελῆ, ἔχομεν 54090000 ἀριθμὸν, τοῦ ὁποίου ἡ ῥίζα μεῖον μονάδος εἶναι 23257· οὕτως, 0, 23257 εἶναι ἡ ζητουμένη ῥίζα μεῖον 0, 00001.

§. 189. Τέλος πάντων ζητεῖται κάποτε ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα κυρίου κλάσματος ἐκτιμωμένου εἰς δεκαδικά.

Εἰς ταύτην τὴν περίστασιν ἀρκεῖ νὰ τρέψωμεν τὸ δεδομένον κλάσμα εἰς δεκαδικὰ, καὶ νὰ ἐκτείνωμεν τὰς πράξεις, ἕως νὰ εὕρωμεν εἰς τὸ πηλίκον διὰ τόσα ψηφία δεκαδικὰ, ὅσα θέλομεν νὰ ἔχωμεν εἰς τὴν ῥίζαν καὶ μετὰ ταῦτα πράττομεν ἐπὶ τοῦ δεκαδικοῦ κλάσματος, ὡς εἴπομεν.

Ἂς προτεθῇ νὰ ἐξάξωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τῶν $\frac{11}{14}$ μεῖον $\frac{1}{1000}$.

Τὸ κλάσμα τοῦτο ἠγμένον εἰς δεκαδικὰ δίδει 0,785714 μεῖον 0, 000001. Ἀλλ' ἡ ῥίζα τοῦ 785714 εἶναι 886 μεῖον μονάδος. Λοιπὸν 0, 886 εἶναι ἡ ῥίζα τῶν $\frac{11}{14}$ μεῖον 0, 001.

Εὑρίσκομεν κατὰ τούτους τοὺς διαφόρους κανόνας

$\sqrt{31,027}$ μεῖον 0, 001 = . . . 5,570.

$\sqrt{0,01001}$ μεῖον 0, 00001 = . . . 0,10004.

$\sqrt{2\frac{13}{15}}$ ἢ $\sqrt{\frac{43}{15}}$ μεῖον 0, 0001 = . . . 1,6931.

§. 190. Σχόλιον πρῶτον. Σχεδὸν ὅλοι οἱ συγγραφεῖς, δίδοντες τὸν λόγον τῆς ἐξαγωγῆς τῆς κατὰ προσέγγισιν τετραγωνικῆς ῥίζης, συσταίνουν ἐντεῦθεν ἀρχὴν, ὅτι διὰ νὰ ἐξάξωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν ἑνὸς κλάσματος, πρέπει νὰ ἐξάξωμεν τὴν τετρα-

γωνικὴν ῥίζαν τοῦ ἀριθμητοῦ καὶ τὴν τοῦ παρονομαστοῦ. Αὕτη ἡ ἀρχὴ εἶναι φανερά, (ἀριθμ. 185), ὅταν οἱ δύο ὅροι εἶναι τέλεια τετράγωνα· ἀλλὰ παύει, ὅταν οἱ δύο ὅροι εἶναι ὁποιοιδήποτε· ἐπειδὴ ἀκόμη δὲν ἀπεδείχθη, ὅτι διὰ νὰ ὑψωθῇ εἰς τετράγωνον κλασματικός τις ἀριθμός, τοῦ ὁποίου οἱ δύο ὅροι εἶναι ἄλογοι, πρέπει νὰ ὑψωθῇ ἕκαστος ὅρος εἰς τετράγωνον. Ἰδοὺ διατί ἡμεῖς δὲν ἐσυστήσαμεν ταύτην τὴν ἀρχὴν (εἰς τὸν ἀριθμὸν 185). Ὅταν οἱ δύο ὅροι εἶναι τέλεια τετράγωνα, ἕπεται μετὰ ταῦτα ἀπὸ ὅσα εἴπομεν εἰς τὸν ἀριθμὸν 187, ὅτι εἶναι ἀληθινὴ δι' ἓν κλάσμα, τοῦ ὁποίου ὁ παρονομαστὴς εἶναι ἓν τέλειον τετράγωνον. Ἀλλὰ ἤδη δυνάμεθα νὰ τὸ παραδεχθῶμεν διὰ κάθε εἶδος κλάσματος, χωρὶς κανένα σφάλμα εἰς τὰς ἀριθμητικὰς ἐφαρμογάς, ἐπειδὴ εἰς τελευταίαν ἀνάλυσιν, πρέπει πάντοτε, διὰ νὰ ἐκτιμήσωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ κλάσματος, νὰ καταστήσωμεν τὸν παρονομαστήν του τέλειον τετράγωνον.

§. 191. Δεύτερον σχόλιον. Ἕπεται ἐκ τῶν ἄνω εἰρημένων ἀρχῶν, ὅτι ὁποιουδήποτε ἀριθμοῦ ἀκεραίου ἢ κλασματικοῦ δυνάμεθα πάντοτε νὰ προσδιορίσωμεν τὴν ἀκριβῆ ἔκφρασιν τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης, ἐὰν οὗτος εἶναι τέλειον τετράγωνον, ἢ τιμήν τινὰ τόσον πλησίον, ὅσον θέλομεν ταύτης τῆς ῥίζης, ἐὰν οὗτος δὲν εἶναι τέλειον τετράγωνον.

Αἱ ἀρχαὶ αὗται προσέτι εἶναι ἀνεξάρτητοι ἀπὸ τὸ σύστημα τῆς ἀριθμήσεως, τὸ ὁποῖον μεταχειριζόμεθα, τουτέστιν αἱ ἀρχαί, τὰς ὁποίας ἐσυστήσαμεν διὰ τὴν ἀναζήτησιν τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τῶν ἀριθμῶν, τόσον ἀκεραίων, ὅσον καὶ κλασματικῶν, θέλουν εἶναι ἀπολύτως αἱ αὐταὶ καὶ εἰς τὸ σύστημα τῆς ἀριθμήσεως τοῦ ὁποίου ἡ βάσις εἶναι β, καθὼς εἶναι καὶ εἰς τὸ δεκαδικὸν σύστημα. Οἱ ἀρχάριοι διὰ νὰ οἰκειωθοῦν

μὲ αὐτὰς τὰς μεθόδους, πρέπει νὰ ἐκτελέσωσιν ἐξαγωγὰς ῥιζῶν εἰς ὁποιονδήποτε σύστημα, π. χ. εἰς τὸ δωδεκαδικὸν σύστημα θέλουν γνωρίσει μὲ εὐκολίαν, ὅτι διὰ τὴν ἐξαγωγὴν τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης ἀκεραίου τινὸς ἀριθμοῦ εἴτε ἀκριβῶς εἴτε εἰς κλάσματα δωδεκαδικὰ, ἀρκεῖ νὰ πράξωσι κατὰ τοὺς ἐκτεθέντας κανόνας εἰς τὸν ἀριθμὸν 182 καὶ 186, καὶ διὰ τὴν ἐξαγωγὴν τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τῶν κλασμάτων, πρέπει νὰ κάμωσιν ἐπ' αὐτῶν ἀναλόγους προετοιμασίας μὲ τὰς δειχθείσας εἰς τοὺς ἀριθμοὺς 187 καὶ 189.

Οὕτω τέλος πάντων οἱ γνωσθέντες ἀριθμοὶ, ὡς τέλεια τετράγωνα εἰς τὸ δεκαδικὸν σύστημα, εἶναι τοιοῦτοι καὶ εἰς πᾶν ἄλλο σύστημα, καὶ οἱ ἀριθμοὶ οἵτινες δὲν εἶναι τέλεια τετράγωνα εἰς τὸ δεκαδικὸν σύστημα, δὲν εἶναι οὔτε εἰς κανὲν ἄλλο σύστημα διαφορετικοί· οὕτως οἱ ἀριθμοὶ τέσσαρα, ἐννέα, δεκαέξ, σαρανταεννέα . . . ὀγδοηκονταένα . . . εἶναι τέλεια τετράγωνα εἰς ὅλα τὰ συστήματα· καὶ οἱ ἀριθμοὶ δύο, τρία . . . ἑπτὰ, . . . ἕνδεκα . . . δὲν ἔχουσιν ἀκριβῆ ῥίζαν εἰς κανένα σύστημα. Τοῦτο πορίζεται ἐκ τοῦ ὅτι ἡ πρότασις τοῦ ἀριθμοῦ 179 ἐπιστηρίζεται ἐπὶ τῶν ἀποδεδειγμένων ἀρχῶν εἰς τοὺς ἀριθμοὺς 132 καὶ 133, αἱ ὁποῖαι εἶναι ἀνεξάρτητοι ἀπὸ κάθε σύστημα ἀριθμήσεως.

§. β'. Σχηματισμὸς τοῦ κύβου, καὶ ἐξαγωγὴ τῆς κυβικῆς ῥίζης τῶν ἀριθμῶν.

§. 192. Καλεῖται κύβος, ἡ τρίτη δύναμις ἑνὸς ἀριθμοῦ, τὸ γινόμενον τοῦ αὐτοῦ πολλαπλασιαζομένου δὶς ἐφ' ἑαυτὸν, καὶ κυβικὴ ῥίζα ἡ τρίτη ἑνὸς ἀριθμοῦ, ὁ ἀριθμὸς, ὅστις ὑψονόμενος εἰς τὸν κύβον, ἢ ὅστις πολλαπλασιαζόμενος δὶς ἐφ' ἑαυτὸν, δίδει τὸν δεδομένον ἀριθμόν. Ὁ σχηματισμὸς τοῦ κύβου ἀκεραίου

τινὸς ἀριθμοῦ ἢ κλασματικοῦ γίνεται πολλαπλασιαζομένου τοῦ ἀριθμοῦ δύο φοραῖς κατ' ἐξακολούθησιν ἐφ' ἑαυτὸν κατὰ τοὺς γνωστοὺς κανόνας.

Τῶν δέκα πρώτων ἀριθμῶν

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 οἱ κύβοι εἶναι

1, 8, 27, 64, 125, 226, 343, 512, 729, 1000.

π. χ. ὁ κῦβος τοῦ 7 μὲ τὸ νὰ εἶναι ἴσος μὲ 7×7×7, λέγομεν κατὰ πρῶτον, ὅτι 7 φοραῖς 7 κάμνουν 49, καὶ 7 φοραῖς 49 κάμνουν 343· οὕτω καὶ διὰ τοὺς ἄλλους.

Ἀντιστρόφως, οἱ ἀριθμοὶ τῆς ἀνωτέρω δευτέρας γραμμῆς ἔχουσι κυβικὰς ῥίζας τοὺς ἀριθμοὺς τῆς πρώτης.

Γνωρίζομεν ἀπὸ τὴν παρατήρησιν τούτων τῶν γραμμῶν, ὅτι μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν ἑνὸς, δύο, ἢ τριῶν ψηφίων ὑπάρχουσιν ἐννέα τέλειοι κύβοι· ἕκαστος τῶν ἄλλων ἔχει κυβικὴν ῥίζαν ἀριθμὸν ἀκέραιον μεθ' ἑνὸς κλάσματος, τὸ ὁποῖον δὲν δύναται νὰ ἐκφρασθῇ ἀκριβῶς διὰ μέσου τῆς μονάδος. Τῷ ὄντι, ἂς παραδεχθῶμεν πρὸς καιρὸν, ὅτι εἷς ἀκέραιος ἀριθμὸς N ἔχει ἀκριβῆ ῥίζαν κλασματικὸν ἀριθμὸν τοιοῦτον ὡς $\frac{\alpha}{\beta}$· λοιπὸν πρέπει πολλαπλασιάζοντες $\frac{\alpha}{\beta}$ δύο φοραῖς ἐφ' ἑαυτὸν νὰ λάβωμεν τὸ N· ἀλλὰ τοῦτο εἶναι ἀδύνατον, ἐπειδὴ $\frac{\alpha}{\beta}\times\frac{\alpha}{\beta}\times\frac{\alpha}{\beta}$ δίδει ἐξαγόμενον $\frac{\alpha^3}{\beta^3}$, καὶ ἐπειδὴ πάντοτε δυνάμεθα νὰ ὑποθέσωμεν, ὅτι $\frac{\alpha}{\beta}$ εἶναι ἀνάγωγον κλάσμα, ἕπεται, ὅτι α καὶ β εἶναι ἀναμεταξύ των πρῶτοι. Λοιπὸν (ἀριθμ. 134) εἶναι τὸ αὐτὸ καὶ

διὰ α^3 καὶ διὰ β^3· οὕτως $\frac{\alpha^3}{\beta^3}$ εἶναι ἀνάγωγος κλάσματος ἀριθμὸς, καὶ ἐπομένως δὲν δύναται νὰ εἶναι ἴσος μὲ ἀκέραιον ἀριθμὸν N.

Αἱ κυβικαὶ ῥίζαι τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν, οἵτινες δὲν εἶναι τέλειοι κύβοι ἄλλων ἀκεραίων ἀριθμῶν, δὲν δύνανται νὰ προσδιορισθῶσι μὲ ἀκρίβειαν, καὶ διὰ τοῦτο εἶναι ἀριθμοὶ ἀσύμμετροι ἢ ἄλογοι.

§. 193. Καθὼς, διὰ νὰ ἀνακαλύψωμεν τὸν τρόπον τοῦ ἐξάγειν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν ὁποιουδήποτε ἀκεραίου ἀριθμοῦ, ἠναγκάσθημεν νὰ στηριχθῶμεν ἐπὶ τῆς ἐκφράσεως τοῦ τετραγώνου τοῦ δυωνύμου $\alpha+\beta$, τουτέστιν ἐπὶ τοῦ ἀθροίσματος δύο ποσοτήτων, παρομοίως διὰ τὴν ἐξαγωγὴν τῆς κυβικῆς ῥίζης, εἶναι ἀναγκαῖον νὰ γνωρίζωμεν τὴν σύνθεσιν τοῦ κύβου τούτου τοῦ ἀθροίσματος $\alpha+\beta$.

Ἤδη δὲ εὑρήκαμεν (εἰς τὸν ἀριθμὸν 180) ὅτι $(\alpha+\beta)^2$ ἢ $(\alpha+\beta)(\alpha+\beta)=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$.

Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸ πρῶτον τοῦτο ἐξαγόμενον ἐπὶ $\alpha+\beta$, κατὰ τὸν συσταθέντα κανόνα (ἀριθμ. 115) διὰ τὸν πολλαπλασιασμὸν τῶν πολυωνύμων, καὶ κάμωμεν τὴν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων, θέλομεν λάβει

$$\begin{array}{r} \alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2 \\ \alpha+\beta \\ \hline \alpha^3+2\alpha^2\beta+\alpha\beta^2 \\ +\ \alpha^2\beta+2\alpha\beta^2+\beta^3 \\ \hline \alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3 \end{array}$$

$$(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3.$$

Ἐὰν κάμωμεν εἰς τοῦτον τὸν τύπον $\beta=1$, τρέπεται εἰς

$$(\alpha+1)^3=\alpha^3+3\alpha^2+3\alpha+1.$$

Ὅθεν ἐξάγομεν $(\alpha+1)^3-\alpha^3=3\alpha^2+3\alpha+1$, τὸ ὁποῖον μᾶς δίδει, ὅτι ἡ διαφορὰ μεταξὺ τοῦ κύβου δύο διαδοχικῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν εἶναι ἴση μὲ τὸ τριπλάσιον τοῦ τετραγώνου τοῦ μικροτέρου ἀριθμοῦ,

πλέον τὸ τριπλοῦν τούτου τοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ, πλέον ἕν.

Οὕτως ἡ διαφορὰ μεταξὺ τοῦ κύβου τοῦ 90 καὶ ἐκείνου τοῦ 89 εἶναι ἴση μὲ $3(89)^2 + 3 \times 89 + 1 = 24031$.

Μετὰ τοῦτο δυνάμεθα νὰ κρίνωμεν πόσον δύο τέλειοι διαδοχικοὶ κύβοι μακρύνονται ὁ εἷς τοῦ ἄλλου εἰς τὴν σειρὰν τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, ὅταν αἱ ῥίζαι εἶναι ὀλίγον τι μεγάλοι ἀριθμοί.

§. 194. Ἄς ζητήσωμεν τώρα μέθοδον τινὰ τοῦ νὰ ἐξάγωμεν τὴν κυβικὴν ῥίζαν ἀπὸ ἀκέραιον ἀριθμόν.

Κατὰ πρῶτον. Ἐὰν ὁ ἀριθμὸς δὲν ἔχῃ περισσότερον ἀπὸ τρία ψηφία, ἡ ῥίζα προσδιορίζεται ἀμέσως, κατὰ παρατήρησιν τῶν κύβων τῶν ἐννέα πρώτων ἀριθμῶν· οὕτως ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ 125 εἶναι 5. ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ 72 εἶναι 4 πλέον ἓν κλάσμα, ἢ 4 μεῖον μονάδος, τουτέστι διαφέρει τῆς ἀληθινῆς ὀλιγώτερον ἀπὸ μονάδα. Ἡ κυβικὴ ῥίζα τῶν 841 εἶναι 9 μεῖον μονάδος, ἐπειδὴ 841 εὑρίσκεται μεταξὺ 729, τὸ ὁποῖον εἶναι ὁ κύβος τοῦ 9, καὶ 1000 ἢ τοῦ κύβου τοῦ 10.

Ἄς θεωρήσωμεν λοιπὸν ἀριθμὸν ἔχοντα περισσότερον ἀπὸ τρία ψηφία.

Ἔστω π. χ. 103823 ὁ δεδομένος ἀριθμός.

103.823 ⎱ 4 / 48	48	47
64	48	47
398.23	384	329
	192	188
	2304	2209
	48	47
	18432	15403
	9216	8836
	110592	103823

Τοῦ ἀριθμοῦ τούτου εὑρισκομένου μεταξὺ τοῦ 1000, ὅςτις εἶναι ὁ κύβος τοῦ 10, καὶ 1000000, ὅς τις εἶναι ὁ κύβος τοῦ 100, ἡ ῥίζα εἶναι ἀναγκαίως σύνθετος ἀπὸ δύο ψηφία, τουτέστιν ἀπὸ μονάδας καὶ δεκάδας. Σημειόνοντες διὰ α τὰς δεκάδας, καὶ διὰ β τὰς μονάδας ἔχομεν (ἀριθ. 193) $103823=(\alpha+\beta)^3 =\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$.

Λοιπὸν βλέπομεν, ὅτι ὁ κύβος ἀριθμοῦ συνθέτου ἐκ δεκάδων καὶ μονάδων περιέχει τὸν κύβον τῶν δεκάδων, τὸ τριπλοῦν γινόμενον τοῦ τετραγώνου τῶν δεκάδων ἐπὶ τὰς μονάδας, τὸ τριπλοῦν γινόμενον τῶν δεκάδων ἐπὶ τὸ τετράγωνον τῶν μονάδων, πλέον τὸν κύβον τῶν μονάδων.

Τούτου τεθέντος, ἐπειδὴ ὁ κύβος τῶν δεκάδων δίδει τοὐλάχιστον χιλιάδας, τὰ τρία ἐν δεξιᾷ τελευταῖα ψηφία δὲν ἀποτελοῦν μέρος· καὶ διὰ τοῦτο εὑρίσκεται εἰς τὸ μέρος 103, (τὸ ὁποῖον χωρίζομεν ἀπὸ τὰ τρία τελευταῖα ψηφία διὰ στιγμῆς)· ἀλλ' ἡ ῥίζα τοῦ μεγαλητέρου κύβου, ὅς τις περιέχεται εἰς τὸ 103, ἐπειδὴ εἶναι 4 διὰ 64, 4 εἶναι τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων τῆς ζητουμένης ῥίζης· διότι 103823 περιλαμβάνεται μεταξὺ 64000 ἢ $(40)^3$ καὶ 125000 ἢ $(50)^3$· λοιπὸν ἡ ῥίζα εἶναι σύνθετος ἐκ τεσσάρων δεκάδων, πλέον ἕνα ἀριθμὸν μονάδων μικρότερον τῶν δέκα.

Εὑρεθέντος δὲ τοῦ ψηφίου τῶν δεκάδων, ἀφαιροῦμεν τὸν κύβον αὐτοῦ 64 ἀπὸ 103, καὶ μένει 39, τὸ ὁποῖον ἀκολουθούμενον ἀπὸ τὸ τμῆμα 823, δίδει 39823. Τοῦτο τὸ ἐξαγόμενον περιέχει προσέτι τὸ τριπλοῦν τετράγωνον τῶν δεκάδων ἐπὶ τὰς μονάδας, πλέον δύο μέρη; τὰ ὁποῖα ἀνωτέρω ἐκφράσαμεν.

Ἀλλ' ἐπειδὴ τὸ τετράγωνον ἀριθμοῦ δεκάδων δίδει τοὐλάχιστον ἑκατοντάδας, ἕπεται ὅτι τὸ τριπλοῦν τετράγωνον τῶν δεκάδων ἐπὶ τὰς μονάδας περι-

λαμβάνεται εἰς τὰ ἀριστερὰ 398 τῶν δύο τελευταίων ψηφίων 23; (τὰ ὁποῖα χωρίζομεν δι᾽ αὐτὸν τὸν λόγον μὲ στιγμήν). Ἀπὸ τὸ ἄλλο μέρος, σχηματίζομεν τὸ τριπλάσιον τοῦ τετραγώνου τῶν τεσσάρων δεκάδων, τὸ ὁποῖον δίδει 48. Λοιπὸν ἐὰν διαιρέσωμεν 398 διὰ 48, τὸ πηλίκον 8 εἶναι τὸ ψηφίον τῶν μονάδων τῆς ῥίζης, ἢ ψηφίον πολὺ μεγάλον· ἐπειδὴ 398 ἑκατοντάδες σύγκειται ἐκ τοῦ τριπλασίου τετραγώνου τῶν δεκάδων ἐπὶ τὰς μονάδας, καὶ ἀπὸ τὰ κρατηθέντα ἀπὸ τὰ ἄλλα δύο μέρη. Διὰ νὰ βεβαιωθῶμεν, ἐὰν τοῦτο τὸ ψηφίον 8 δὲν εἶναι πολλὰ μεγάλον, δυνάμεθα, καθὼς εἰς τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν, νὰ σχηματίσωμεν διὰ τούτου τοῦ ψηφίου 8, καὶ διὰ τοῦ ψηφίου 4 τῶν δεκάδων, τὰ τρία μέρη, τὰ ὁποῖα περιέχονται εἰς τὸν 39823· ἀλλ᾽ εἶναι πολὺ ἁπλούστερον νὰ ὑψώσωμεν 48 εἰς τὸν κύβον.

Εὑρίσκομεν δὲ διὰ τὸν τοιοῦτον κύβον, 110592, ἀριθμὸν μεγαλήτερον ἀπὸ 103823· οὕτως τὸ ψηφίον 8 εἶναι πολλὰ μεγάλον. Σχηματίζοντες τὸν κύβον τοῦ 47, εὑρίσκομεν 103823· οὕτως ὁ δεδομένος ἀριθμὸς εἶναι τέλειος κύβος, καὶ ἔχει κυβικὴν ῥίζαν 47.

Σ. Κ. Δὲν δυνάμεθα νὰ ἀναζητήσωμεν κατὰ πρῶτον τὸ ψηφίον τῶν μονάδων, ἐπειδὴ τοῦ κύβου τῶν μονάδων δίδοντος (ἀριθμ. 192) δεκάδας καὶ ἑκατοντάδας· αὗται αἱ δεκάδες καὶ αἱ ἑκατοντάδες εὑρίσκονται μεμιγμέναι μὲ τὰς ἀπὸ τ᾽ ἄλλα μέρη τοῦ κύβου προερχομένας.

Ἂς ἐξάξωμεν ἀκόμη τὴν κυβικὴν ῥίζαν τοῦ 47954.

```
47.954|36              36
27    |27              36
―――                   ―――
209                    216
                       108
47954                  ―――
46656                  1296
―――――                    36
 1298                  ――――
                       7776
                       3888
                       ――――
                       46656
```

Τοῦ ἀριθμοῦ 47954 περιλαμβανομένου μεταξὺ 1000 καὶ 1000000, ἡ ῥίζα του εὑρίσκεται μεταξὺ τοῦ 10 καὶ 100, τουτέστι περικλείει δεκάδας καὶ μονάδας. Ὁ κύβος τῶν δεκάδων εὑρίσκεται εἰς τὰς 47 χιλιάδας, καὶ δεικνύομεν, ὡς εἰς τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα, ὅτι 3, ῥίζα τοῦ μεγαλητέρου κύβου τοῦ εἰς τὸ 47 περιεχομένου, ἐκφράζει τὰς δεκάδας. Ἀφαιροῦμεν τὸν κύβον τοῦ 3 ἢ τὸ 27 ἀπὸ 47, καὶ ἔχομεν ὑπόλοιπον 20, κατεβάζομεν εἰς τὸ πλευρὸν τοῦ ὑπολοίπου μόνον τὸ ψηφίον 9 τοῦ τμήματος 954, καὶ ὁ ἀριθμὸς 209 ἑκατοντάδες, σύγκειται ἐκ τοῦ τριπλασίου τετραγώνου τῶν δεκάδων ἐπὶ τὰς μονάδας, πλέον τὰ κρατηθέντα ἀπὸ τὰ ἄλλα μέρη. Λοιπὸν ἐὰν σχηματίσωμεν τὸ τριπλοῦν τετράγωνον τῶν 3 δεκάδων, τὸ ὁποῖον δίδει 27 ἑκατοντάδας, καὶ διαιρέσωμεν 209 διὰ 27, τὸ πηλίκον 7 εἶναι τὸ ψηφίον τῶν μονάδων τῆς ῥίζης, ἢ ψηφίον τι πολλὰ μεγάλον. Ὑψόνοντες δὲ 37 εἰς τὸν κύβον, εὑρίσκομεν 50653, ἀριθμὸν μεγαλήτερον τοῦ 47954.

Ἐὰν ὅμως σχηματίσωμεν τὸν κύβον τοῦ 36, εὑρίσκομεν 46656, ἀριθμὸν, ὅς τις ἀφαιρεθεὶς ἀπὸ 47954, ὡς φαίνεται εἰς τὸν ἄνω πίνακα, δίδει ὑπόλοιπον 1298· οὕτως ὁ δεδομένος ἀριθμὸς δὲν εἶναι,

τέλειος κύβος· καὶ ἡ ῥίζα του εἶναι μεῖον μονάδος ἴση μὲ 36.

Τῷ ὄντι ἡ διαφορὰ μεταξὺ τοῦ δεδομένου ἀριθμοῦ καὶ τοῦ κύβου τοῦ 36 εἶναι, ὡς εἴδομεν, 1298, ἀριθμὸς μικρότερος τοῦ $3\times(36)^2+3\times36+1$, διαφορὰ μεταξὺ $(37)^3$ καὶ $(36)^3$, ἐπειδὴ ἐλάβαμεν εἰς τὸν δρόμον τῆς πράξεως 3888, τὸ τριπλοῦν τοῦ τετραγώνου 36.

§. 195. Προκείσθω ἤδη νὰ ἐξάξωμεν τὴν κυβικὴν ῥίζαν ἀριθμοῦ περισσότερον ἀπὸ ἓξ ψηφία, τοῦ 43725658 λόγου χάριν.

43.725.658	352	35	
27	27	35	3675
167		175	
43725		105	
42875		1225	
8506		35	
		6125	
		3675	
		42875	

	43725658	352
	43614208	352
ὑπόλοιπον.	111450	704
		1760
		1056
		123904
		352
		247808
		619520
		371712
		43614208

Ὁποιαδήποτε καὶ ἂν ἦναι ἡ ζητουμένη ῥίζα, ἀναγκαίως ἔχει περισσότερον ἀπὸ ἓν ψηφίον· ὅθεν τὴν θεωροῦμεν ὡς σύνθετον ἀπὸ μονάδας καὶ δεκάδας μόνον (αἱ δεκάδες δύνανται νὰ ἐκφρασθῶσι μὲ περισσότερα παρὰ ἓν ψηφίον).

Ὁ κύβος δὲ τῶν δεκάδων δίδει τοὐλάχιστον χιλιάδας· καὶ διὰ τοῦτο ἀναγκαίως εὑρίσκεται εἰς τὰ ἀριστερὰ τῶν τριῶν τελευταίων ψηφίων, 658. Λέγω τώρα, ὅτι ἐὰν ἐξάξωμεν τὴν ῥίζαν τοῦ μεγαλητέρου κύβου τοῦ περιεχομένου εἰς τὰ ἀριστερὸν μέρος 43725, θεωρούμενον μὲ τὴν ἀπόλυτόν του τιμὴν, θέλομεν ἔχει τὸν ἀριθμὸν τῶν δεκάδων τῆς ὅλης ῥίζης.

Τῷ ὄντι ἔστω α ἡ ῥίζα τῶν 43725, ὡς ἔγγιστα μεῖον μιᾶς μονάδος, ἕπεται ὅτι εἰς τὰ α^3 καὶ $(\alpha+1)^3$ περιέχονται αἱ 43725. Παρομοίως λοιπὸν καὶ 43725000 εὑρίσκεται μεταξὺ $\alpha^3\times1000$ καὶ $(\alpha+1)^3\times1000$· καὶ ἐπειδὴ οἱ δύο τελευταῖοι οὗτοι ἀριθμοὶ διαφέρουσι μεταξύ των περισσότερον ἀπὸ 1000, συμπεραίνομεν ὅτι καὶ αὐτὸς ὁ δεδομένος ἀριθμὸς 43725658, εὑρίσκεται μεταξὺ $\alpha^3\times1000$, καὶ $(\alpha+1)^3\times1000$· οὕτως ἡ ζητουμένη ῥίζα περιλαμβάνεται μεταξὺ $\alpha\times10$, καὶ $(\alpha+1)10$. Λοιπὸν τέλος πάντων αὕτη εἶναι σύνθετος ἀπὸ α δεκάδας, καὶ ἀριθμόν τινα μονάδων μικρότερον τοῦ 10 *).

---

*) Ἐπειδὴ α^3 διαφέρει τοῦ $(\alpha+1)^3$ κατὰ $3\alpha^2+3\alpha+1$, τὸ δὲ α^3 διαφέρει ἀπὸ τὸ 43725 τὸ περιττότερον $3\alpha^2+3\alpha$, διὰ τοῦτο $1000\alpha^3$ διαφέρει ἀπὸ 43725000 τὸ περισσότερον

$$1000\times3\alpha^2+1000\times3\alpha,$$

καὶ ἐπειδὴ

$$1000\,\alpha^3$$

διαφέρει ἀπὸ τὸ $1000\,(\alpha+1)^3$, κατὰ

$$1000\times3\alpha^2+1000\times3\alpha+1000\times1,$$

διὰ τοῦτο

$$100\,(\alpha+1)^3$$

διαφέρει ἀπὸ 43725000, τ' ὀλιγώτερον 1000. Λοιπὸν $1000\,(\alpha+1)^3 >$ τοῦ $43725000+658$.

Οὕτως τὸ ζήτημα ἄγεται εἰς τὸ νὰ ἐξάξωμεν τὴν κυβικὴν ρίζαν τοῦ 43725. Ἀλλ' οὗτος ὁ νέος ἀριθμὸς ἐπειδὴ ἔχει περισσότερον ἀπὸ τρία ψηφία, ἡ ρίζα του περιέχει περισσότερον ἀπὸ ἕν, τουτέστι περιέχει δεκάδας καὶ μονάδας. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὰς δεκάδας, πρέπει νὰ χωρίσωμεν τὰ τρία τελευταῖα ψηφία 725, καὶ νὰ ἐξάξωμεν τὴν ρίζαν τοῦ μεγαλητέρου κύβου τοῦ περιεχομένου εἰς τὸ 43· (βλέπομεν εὐκόλως τί ἔπρεπε νὰ πράξωμεν, ἐὰν ὁ νέος οὗτος ἀριθμὸς εἶχε περισσότερον ἀπὸ τρία ψηφία).

Ὁ μεγαλήτερος κύβος, ὅς τις περιέχεται εἰς τὸ 43 εἶναι 27, τοῦ ὁποίου ἡ ρίζα εἶναι 3, τὸ ὁποῖον ἐκφράζει τὰς δεκάδας τῆς ρίζης τοῦ 43725 (ἢ τὸ ψηφίον τῶν ἑκατοντάδων τῆς ὅλης ρίζης). Ἀφαιροῦντες τὸν κύβον τοῦ 3 ἢ 27, ἀπὸ τὸ 43, ἔχομεν ὑπόλοιπον 16, εἰς τὸ πλευρὸν τοῦ ὁποίου κατεβάζομεν τὸ πρῶτον ψηφίον 7 τοῦ ἀκολούθου τμήματος 725, καὶ οὕτως ἔχομεν 167.

Σχηματίζοντες μετὰ ταῦτα τὸ τριπλοῦν τετράγωνον τῶν 3 δεκάδων, εὑρίσκομεν 27000· καὶ ἐὰν διαιρέσωμεν 167 διὰ τοῦ 27, τὸ πηλίκον 6 εἶναι τὸ ψηφίον τῶν μονάδων τῆς ρίζης τῶν 43725, ἢ ψηφίον τι μεγαλήτερον. Μὲ εὐκολίαν δὲ γνωρίζομεν, ὅτι τοῦτο εἶναι πολλὰ μεγάλον. Δοκιμάζοντες δὲ τὸ 5, ὑψόνομεν 35 εἰς τὸν κύβον, καὶ ἔχομεν ἐξαγόμενον 42875, ἀριθμὸν, ὅς τις ἀφαιρεθεὶς ἀπὸ 43725, δίδει ὑπόλοιπον 850. Τοῦτο τὸ ὑπόλοιπον εἶναι προφανῶς μικρότερον παρὰ $3(35)^2+3\times35+1$, ἐπειδὴ ἤδη τὸ τετράγωνον τοῦ 35 εἶναι κατὰ τὸν ἄνω πίνακα, ἴσον μὲ 1225· οὕτως 35 εἶναι ἡ ρίζα τοῦ μεγαλητέρου κύβου, ὅς τις περιέχεται εἰς τὰς 43725. Εἶναι λοιπὸν ὁ ὅλος ἀριθμὸς τῶν δεκάδων τῆς ζητουμένης ρίζης.

Διὰ νὰ προσδιορίσωμεν τὰς μονάδας, καταβάζομεν εἰς τὸ πλευρὸν τοῦ ὑπολοίπου 850, τὸ πρῶτον ψηφίον 6 τοῦ τελευταίου τμήματος 658, ὥστε ἔχομεν 8506. Σχηματίζομεν προσέτι τὸ τριπλοῦν τετράγωνον τῶν 35 δεκάδων (τὸ ὁποῖον εἶναι εὔκολον, ἐπειδὴ εἰς τὴν δοκιμὴν τοῦ ἀνωτέρω ψηφίου εἴχαμεν σχηματίσει τὸ τετράγωνον τοῦ 35). Μετὰ ταῦτα διαιροῦμεν 8506 διὰ τοῦ τριπλοῦ τετραγώνου 3675· τὸ πηλίκον εἶναι 2, τὸ ὁποῖον δοκιμάζομεν ὑψόνοντες 352 εἰς τὸν κύβον. Λαμβάνομεν οὕτως 43614208, ἐξαγόμενον μικρότερον τοῦ δεδομένου ἀριθμοῦ, τὸ ὁποῖον ἀφαιροῦντες ἐκ τούτου, λαμβάνομεν ὑπόλοιπον 11450. Λοιπὸν 352 εἶναι ἡ κυβικὴ ῥίζα τῶν 43725658 μεῖον μονάδος.

Κανὼν Γενικός. Διὰ νὰ ἐξάξωμεν τὴν κυβικὴν ῥίζαν ἀκεραίου ἀριθμοῦ, χωρίζομεν τὸν ἀριθμὸν εἰς τμήματα, ἀπὸ τρία ψηφία ἕκαστον, ἀρχίζοντες ἀπὸ τὰ δεξιὰ, ἕως νὰ φθάσωμεν εἰς τμῆμα ἑνὸς, δύο, ἢ τριῶν ψηφίων τὸ περισσότερον (ὁ ἀριθμὸς τῶν τμημάτων εἶναι ἴσος μὲ τὸν ἀριθμὸν τῶν ψηφίων τῆς ῥίζης)· ἐξάγομεν τὴν ῥίζαν τοῦ μεγαλητέρου κύβου, ὅστις περιέχεται εἰς τὸ πρῶτον ἐν ἀριστερᾷ τμῆμα, καὶ ἀφαιροῦμεν τοῦτον τὸν κύβον ἀπὸ τὸ πρῶτον τμῆμα· καταβάζομεν εἰς τὸ πλευρὸν τοῦ ὑπολοίπου τὸ πρῶτον ψηφίον τοῦ δευτέρου τμήματος, καὶ διαιροῦμεν τὸν οὕτως σχηματισμένον ἀριθμὸν διὰ τοῦ τριπλοῦ τετραγώνου τοῦ ἤδη εὑρεθέντος εἰς τὴν ῥίζαν ψηφίου· γράφομεν δὲ τὸ πηλίκον εἰς τὰ δεξιὰ τούτου τοῦ ψηφίου, καὶ ὑψόνομεν τὴν ἕνωσιν τῶν δύο ψηφίων εἰς τὸν κύβον· Ἐὰν ὁ κύβος οὗτος εἶναι μεγαλήτερος τῆς ἑνώσεως τῶν δύο πρώτων τμημάτων τοῦ δεδομένου ἀριθμοῦ, ἐλαττοῦμεν τὸ πηλίκον ἀπὸ μίαν ἢ πολλὰς μονάδας, ἕως νὰ εὕρωμεν κύβον δυνάμενον νὰ ἀφαι-

ρεθῇ ἀπὸ τὴν ἕνωσιν τῶν δύο πρώτων τμημάτων. Ἐκτελεσθείσης τῆς ἀφαιρέσεως, κατεβάζομεν εἰς τὸ πλευρὸν τοῦ ὑπολοίπου τὸ πρῶτον ψηφίον τοῦ τρίτου τμήματος, μετὰ ταῦτα διαιροῦμεν τὸν οὕτως σχηματισμένον ἀριθμὸν διὰ τοῦ τριπλοῦ τετραγώνου τῆς ἑνώσεως τῶν δύο ἤδη εὑρεθέντων ψηφίων· τὸ πηλίκον ἐὰν δὲν εἶναι πολλὰ μεγάλον, πρέπει νὰ εἶναι τοιοῦτον, ὥστε γράφοντές το εἰς τὰ δεξιὰ τῶν δύο πρώτων ψηφίων τῆς ῥίζης, καὶ ὑψόνοντες τὸν ἐντεῦθεν ἐξαγόμενον ἀριθμὸν εἰς κύβον, ἠμποροῦμεν ὕστερον νὰ ἀφαιρέσωμεν τοῦτο τὸ γινόμενον ἀπὸ τὴν ἕνωσιν τῶν πρώτων τριῶν τμημάτων. Γενομένης ταύτης τῆς νέας ἀφαιρέσεως κατεβάζομεν εἰς τὸ πλευρὸν τοῦ ὑπολοίπου τὸ πρῶτον ψηφίον τοῦ τετάρτου τμήματος, καὶ ἐξακολουθοῦμεν τὴν αὐτὴν σειρὰν τῶν πράξεων, ἕως νὰ κατεβάσωμεν ὅλα τὰ τμήματα.

Παρατήρησις. Πολλάκις εἰς τὴν ὁδὸν τῶν πράξεων ὑποψιαζόμεθα, ὅτι ἓν τῶν πηλίκων, περὶ τῶν ὁποίων ὡμιλήσαμεν, εἶναι μεγαλώτατον, καὶ δυνάμεθα τότε νὰ ἐλαττώσωμεν αὐτὸ ἀπὸ δύο ἢ περισσοτέρας μονάδας. Ἀλλὰ ὑψόνοντες εἰς κύβον τὴν ἤδη εὑρεθεῖσαν ῥίζαν ἀκολουθημένην ἐκ τούτου τοῦ ψηφίου, καὶ ἀφαιροῦντες τοῦτον τὸν κύβον ἀπὸ τὴν ἕνωσιν τῶν τμημάτων, τὰ ὁποῖα θεωροῦμεν εἰς τὸν δεδομένον ἀριθμὸν, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν μέγα ὑπόλοιπον, τὸ ὁποῖον μᾶς κάμνει νὰ νομίσωμεν, ὅτι τὸ τελευταῖον ληφθὲν τῆς ῥίζης ψηφίον εἶναι πολλὰ μικρόν· θέλομεν βεβαιωθῆ περὶ τούτου διὰ τοῦ ἀκολούθου χαρακτηριστικοῦ, ὅτι „τὸ ὑπόλοιπον ὑπερβαίνει τὸ τριπλοῦν τοῦ τετραγώνου τῆς ἤδη εὑρεθείσης ῥίζης, πλέον τὸ τριπλοῦν αὐτῆς τῆς ἰδίας ῥίζης, πλέον ἕν.

Εἰς ταύτην τὴν περίστασιν αὐξάνομεν τὴν ῥίζαν ἀπὸ μίαν ἢ περισσοτέρας μονάδας τάξεως τοῦ τελευταίου ληφθέντος ψηφίου.

Ἰδοὺ παραδείγματα, ἐπὶ τῶν ὁποίων δυνάμεθα νὰ γυμνασθῶμεν.

$\sqrt[3]{483249}=78$ μὲ ὑπόλοιπον 8697.

$\sqrt[3]{91632508641}=4508$ μὲ ὑπόλοιπον 20644129.

$\sqrt[3]{32977340218432}=32068$ ἀκριβῶς.

§. 196. Ἐξαγωγὴ τῆς κυβικῆς ῥίζης διὰ προσεγγίσεως.

Ὅταν ὁ δεδομένος ἀριθμὸς δὲν ἦναι ὁ κύβος ἄλλου ἀκεραίου ἀριθμοῦ, ἡ ἀνωτέρω μέθοδος δίδει τὸ ἀκέραιον μέρος τῆς ῥίζης· τὸ δὲ κλάσμα, τὸ ὁποῖον ἔχει νὰ καταστήσῃ πλήρη τὴν ῥίζαν, εἴδομεν (ἀριθμ. 192) ὅτι δὲν προσδιορίζεται μὲ ἀκρίβειαν· ἀλλὰ δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἄλλο κλάσμα διαφορετικὸν τοῦ ζητουμένου κατὰ ποσότητα τόσον μικρὰν, ὅσην θέλομεν, καὶ τοῦτο κατὰ κανόνα τινὰ ἀνάλογον μὲ ἐκεῖνον τοῦ ἀριθμοῦ 185.

Ἐν γένει ἂς ἐξωχθῇ ἡ κυβικὴ ῥίζα ἢ ἡ τρίτη τοῦ ἀριθμοῦ α, μεῖον τοῦ κλάσματος $\frac{1}{\nu}$.

Ὁ ἀριθμὸς α βάλλεται ὑπὸ τὴν μορφὴν $\frac{\alpha\times\nu^3}{\nu^3}$.

Ἐὰν σημειώσωμεν διὰ ρ τὴν ῥίζαν τοῦ μεγαλητέρου κύβου, ὅς τις περιέχεται εἰς $\alpha\nu^3$, τουτέστι τὴν ῥίζαν τοῦ $\alpha\nu^3$ μεῖον μονάδος, ὁ ἀριθμὸς $\frac{\alpha\nu^3}{\nu^3}$, ἢ α, περιλαμβάνεται μεταξὺ $\frac{\rho^3}{\nu^3}$ καὶ $\frac{(\rho+1)^3}{\nu^3}$. Λοιπὸν οὕτως $\sqrt[3]{\alpha}$ εὑρίσκεται μεταξὺ τῶν ῥιζῶν τούτων τῶν δύο

ἀριθμῶν, ἢ μεταξὺ $\frac{\rho}{\nu}$ καὶ $\frac{\rho+1}{\nu}$. Λοιπὸν τέλος πάντων, $\frac{\rho}{\nu}$ εἶναι ἡ ζητουμένη ῥίζα μεῖον τοῦ κλάσματος $\frac{1}{\nu}$.

Οὕτως διὰ νὰ ἐξάξωμεν τὴν τρίτην ῥίζαν ἀριθμοῦ τινὸς μεῖον τοῦ $\frac{1}{\nu}$, πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀριθμὸν ἐπὶ τὸν κύβον τοῦ παρονομαστοῦ ν· ἐξάγομεν τοὐλάχιστον μεῖον μονάδος τὴν κυβικὴν ῥίζαν τοῦ γινομένου, καὶ διαιροῦμεν τὸ ἐξαγόμενον διὰ τοῦ ν.

Π α ρ ά δ ε ι γ μ α. Ζητεῖται ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ 15 μεῖον $\frac{1}{12}$. Ἔχομεν $15\times\overline{12}^{3}=15\times1728=25920$· ἀλλ' ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ 25920 μεῖον μονάδος εἶναι 29· λοιπὸν ἡ ζητουμένη ῥίζα εἶναι $\frac{29}{12}$ ἢ $2\frac{5}{12}$.

Εὑρίσκομεν παρομοίως

$$\sqrt[3]{47}=\frac{72}{20}=3\frac{12}{20}\text{ μεῖον }\frac{1}{20}.$$

Ἡ προσέγγισις εἰς δεκαδικὰ εἶναι συνέπεια τοῦ προηγουμένου κανόνος.

Προκείσθω νὰ ἐκτιμηθῇ $\sqrt[3]{25}$ μεῖον 0,001.

Πρέπει (ἀριθμ. 196) νὰ πολλαπλασιάσωμεν 25 ἐπὶ τὸν κύβον τῶν 1000 ἢ ἐπὶ 1000000000, τουτέστι νὰ προσθέσωμεν ἐννέα μηδενικὰ εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ 25, ὥστε θέλομεν ἔχει 25000000000· ἀλλ' ἡ κυ-

βικὴ ῥίζα τούτου τοῦ ἀριθμοῦ εἶναι 2924 μεῖον μονάδος· λοιπὸν 2,924 εἶναι ἡ ζητουμένη ῥίζα, καὶ διαφέρει τῆς ἀληθινῆς μεῖον τοῦ $\frac{1}{1000}$.

Ἐν γένει διὰ νὰ ἐκτιμήσωμεν τὴν κυβικὴν ῥίζαν ἀκεραίου τινὸς ἀριθμοῦ εἰς δεκαδικὰ, προσθέτομεν εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ ἀριθμοῦ τρεῖς φοραῖς τόσα μηδενικὰ, ὅσα ψηφία δεκαδικὰ θέλομεν νὰ ἔχωμεν εἰς τὴν ῥίζαν. Ἐξάγομεν μεῖον μονάδος τὴν κυβικὴν ῥίζαν τοῦ νέου ἀριθμοῦ. Μετὰ ταῦτα χωρίζομεν κατὰ τὰ δεξιὰ τοῦ ἐξαγομένου τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν τῶν δεκαδικῶν ψηφίων.

§. 198. Ἔστω ἤδη $\frac{\alpha}{\beta}$ κλάσμα ἢ κλασματικὸς ἀριθμὸς, τοῦ ὁποίου θέλομεν νὰ ἐξάξωμεν τὴν κυβικὴν ῥίζαν. Καθιστάνομεν πρότερον τὸν παρονομαστήν του τέλειον κύβον, πολλαπλασιάζοντες τοὺς δύο ὅρους του ἐπὶ τὸ τετράγωνον τούτου τοῦ παρονομαστοῦ, καὶ τὸ κλάσμα τρέπεται εἰς τοῦτο $\frac{\alpha\beta^2}{\beta^3}$. Σημειωθέντος δὲ διὰ ρ τοῦ ἀκεραίου μέρους τῆς κυβικῆς ῥίζης τοῦ $\alpha\beta^2$, ἕπεται κατὰ συλλογισμόν τινα ἀνάλογον μὲ ἐκεῖνον τοῦ ἀριθμοῦ 196, ὅτι $\frac{\rho}{\beta}$ εἶναι ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ $\frac{\alpha}{\beta}$ μεῖον τοῦ κλάσματος $\frac{1}{\beta}$.

Ἐὰν ἠθέλαμεν νὰ λάβωμεν μεγαλήτερον βαθμὸν προσεγγίσεως, ἠθέλαμεν ἀναζητήσει τιμὴν πλέον ἐγγίζουσαν εἰς τὸ $\sqrt[3]{\alpha\beta^2}$, καὶ νὰ διαιρέσωμεν τὸ ἐξαγόμενον διὰ τοῦ β.

Ὅταν ὁ παρονομαστὴς μὴ ὢν ἤδη κύβος τέλειος, περιέχῃ παράγοντας, μερικοὶ τῶν ὁποίων εἶναι τέλειοι κύβοι, καὶ οἱ ἄλλοι τέλεια τετράγωνα, ἡ τροπὴ τοῦ κλάσματος εἶναι ἁπλουστέρα.

Ἔστω π. χ. τὸ κλάσμα $\frac{113}{360}$.

Ὁ ἀριθμὸς 360 δύναται νὰ ἀναλυθῇ εἰς 2^3, $3^3 \cdot 5$. Διὰ τοῦτο, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τοὺς δύο ὅρους τοῦ κλάσματος διὰ 3×5^2 ἢ 75, τὸ κλάσμα δύναται νὰ τεθῇ ὑπὸ τὴν μορφὴν $\frac{113\times75}{2^3.3^3.5^3}$, καὶ ὁ παρονομαστὴς τούτου εἶναι τότε ὁ κύβος τοῦ $2\times3\times5$ ἢ τοῦ 30. Οὕτως ἀφ' οὗ ἐξάξωμεν τὴν κυβικὴν ῥίζαν τοῦ νέου ἀριθμητοῦ 113×75 ἢ 8475 μεῖον μονάδος, διαιροῦμεν τὸ προκύπτον 20 διὰ 30, καὶ οὕτως ἔχομεν $\frac{20}{30}$ ἢ $\frac{2}{3}$ τὴν ζητουμένην ῥίζαν μεῖον $\frac{1}{30}$.

§. 199. Ἂς περάσωμεν τώρα εἰς τὴν ἐξαγωγὴν τῆς κυβικῆς ῥίζης τῶν δεκαδικῶν κλασμάτων.

Ζητεῖται π. χ. ἡ κυβικὴ ῥίζα τῶν 3,1415. Ἐπειδὴ ὁ παρονομαστὴς 10000 δὲν εἶναι τέλειος κύβος, ἀλλὰ ἀνάγεται εἰς 1000×10, τὸν καθιστάνομεν τέλειον κύβον πολλαπλασιάζοντές τον ἐπὶ 100, διὰ τὸ ὁποῖον προσθέτομεν δύο μηδενικὰ εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ δεδομένου δεκαδικοῦ κλάσματος, καὶ οὕτως ἔχομεν 3,141500. Μετὰ ταῦτα ἐξάγομεν μεῖον μονάδος τὴν κυβικὴν ῥίζαν τοῦ ἀριθμητοῦ 3141500, τουτέστι τοῦ ἀριθμοῦ, ἀφαιροῦντες τὴν ὑποδιαστολήν, ἐκ τοῦ ὁποίου ἔχομεν 146. Μετὰ ταῦτα διαιροῦμεν τὸ ἐξαγόμενον διὰ τοῦ 100 ἢ $\sqrt[3]{1000000}$, καὶ εὑρίσκομεν $\sqrt{3,1415}=$ 1,46 μεῖον τοῦ 0,01.

Ἐὰν θέλωμεν μεγαλήτερον βαθμὸν προσεγγίσεως, προσθέτομεν τρεῖς φοραῖς τόσα μηδενικὰ περισσότερον, κατ' ἐξακολούθησιν τοῦ ἀριθμοῦ, παρ' ὅσα ψηφία δεκαδικὰ θέλομεν νὰ ἔχωμεν εἰς τὴν ῥίζαν.

Τέλος πάντων, διὰ νὰ ἐκτιμήσωμεν εἰς δεκαδικὰ τὴν κυβικὴν ῥίζαν κοινοῦ τινὸς κλάσματος, πρέπει νὰ τρέψωμεν τὸν δεδομένον ἀριθμὸν εἰς δεκαδικὰ, καὶ νὰ ἐξακολουθήσωμεν τὴν πρᾶξιν, ἕως νὰ λάβωμεν τρεῖς φοραῖς τόσα ψηφία δεκαδικὰ, ὅσα θέλομεν νὰ εὕρωμεν εἰς τὴν ῥίζαν. Ἡ ὑπόθεσις τότε μᾶς φέρει εἰς τὸ νὰ ἐξάξωμεν τὴν κυβικὴν ῥίζαν δεκαδικοῦ κλάσματος.

Διὰ νὰ τελειώσωμεν, θέλομεν προβάλει τὰ ἀκόλουθα γυμνάσματα.

$\sqrt[3]{473}$, μεῖον $\frac{1}{20}=\frac{155}{20}$.

$\sqrt[3]{79}$, μεῖον $\frac{1}{10000}=4,2908$.

$\sqrt[3]{3,00415}$, μεῖον $\frac{1}{10000}=1,4429$.

$\sqrt[3]{0,00101}$, μεῖον $\frac{1}{100}=0,10$.

$\sqrt[3]{\frac{14}{25}}$, μεῖον $\frac{1}{1000}=0,824$.

Τὰ δύο συσταθέντα σχόλια (ἀριθμ. 190, καὶ 191) περὶ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τῶν ἀριθμῶν, ἐφαρμόζονται ἐπίσης εἰς τὴν κυβικὴν ῥίζαν, καὶ ἐν γένει εἰς τὰς ῥίζας ὁποιουδήποτε βαθμοῦ. Δὲν ἠμποροῦμεν ὅμως νὰ ἐκθέσωμεν εἰς ταῦτα τὰ στοιχεῖα τὰς μεθόδους τῆς ἐξαγωγῆς τῶν ῥιζῶν βαθμοῦ ἀνωτέρου τοῦ τρίτου· ἐπειδὴ αὐταὶ αἱ μέθοδοι ἐπιστηρίζονται ἐπάνω εἰς τὴν σύνθεσιν δυνάμεως τινὸς ὁποιουδήποτε βαθ-

μοῦ ἑνὸς δυωνύμου, καὶ ὁ τύπος, ὅς τις ἔχει σχέσιν μὲ ταύτην τὴν σύνθεσιν, ἀπαιτεῖ πολλὰς ἐκτεταμένας γνώσεις τῆς Ἀλγέβρας. Ἀλλὰ θέλομεν δώσει εἰς τὸ τελευταῖον κεφάλαιον τούτου τοῦ συγγράμματος σύντομόν τι μέσον τοῦ νὰ ἐκτελῶμεν ἐξαγωγὰς ῥιζῶν παντὸς βαθμοῦ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ζ΄.

Ἐφαρμογαὶ τῶν κανόνων τῆς Ἀριθμητικῆς. Θεωρία τῶν λόγων καὶ ἀναλογιῶν.

---

§. 200. **Ε**ἰσαγωγή. Ἀφ' οὗ ἐγνωστοποιήσαμεν τὰς πᾶν εἶδος ἐργασιῶν τῆς ἀριθμητικῆς ἀποβλεπούσας μεθόδους, μᾶς μένει ἀκόμη νὰ ἐκπληρώσωμεν ὄχι εὔκολον μέρος αὐτῆς, δηλαδὴ νὰ διδάξωμεν τοὺς ἀρχαρίους τὸ λύειν ὅλα τὰ ἀριθμητικὰ ζητήματα.

Διακρίνονται δὲ δύο ἀρχικὰ γένη ζητημάτων, τὰ θεωρήματα καὶ τὰ προβλήματα.

Ὅταν ἔχωμεν σκοπὸν νὰ ἀποδείξωμεν τὴν ὕπαρξιν μερικῶν ἰδιοτήτων σχετικῶς εἰς γνωστοὺς καὶ δεδομένους ἀριθμοὺς, τότε τὸ ζήτημα τοῦτο ὀνομάζεται θεώρημα. Τὸ [illegible]μπτον κεφάλαιον προσφέρει πλῆθος ζητημάτων τούτου τοῦ γένους. Αἱ ἀρχαὶ ἐπὶ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ δύο ἢ περισσοτέρων παραγόντων καθ' ὁποιανδήποτε τάξιν, καὶ ἐπὶ τῆς διαιρετότητος τῶν ἀριθμῶν, αἱ ἰδιότητες τῶν δεκαδικῶν περιοδικῶν κλα-

σμάτων, καὶ τῶν συνεχῶν κλασμάτων εἶναι τόσα θεωρήματα.

Ὅταν δὲ προτείνεται νὰ προσδιορίσωμεν μερικοὺς ἀριθμοὺς διὰ τῆς γνώσεως ἄλλων ἀριθμῶν, οἵ τινες ἔχουσι μὲ τοὺς πρώτους σχέσεις δεικνυομένας ἀπὸ τὴν ἔκφρασιν, τότε τοῦτο, τὸ ὁποῖον θέλαμεν νὰ λύσωμεν ζήτημα, λέγεται πρόβλημα. Τοιαῦτα εἶναι τὰ ζητήματα, τὰ ὁποῖα ἐπαῤῥησιάσαμεν εἰς τὸν δρόμον τῶν δύο πρώτων κεφαλαίων, ὡς ἐφαρμογὰς τῶν διαφόρων κανόνων τῆς ἀριθμητικῆς.

Ὅταν δὲ λύωμεν προβλήματα πλέον συμπεπλεγμένα, τὰ ὁποῖα κατὰ τὴν ἔκφρασίν των ἀπαιτοῦν περισσότερον ἀγῶνα εἰς τὸ νὰ ἀνακαλύψωμεν καὶ νὰ προσδιορίσωμεν τὴν σειρὰν τῶν πράξεων, τὰς ὁποίας πρέπει νὰ ἐκτελέσωμεν ἐπὶ τῶν γνωστῶν καὶ δεδομένων ἀριθμῶν, διὰ νὰ φθάσωμεν εἰς τὴν γνῶσιν τῶν ἀριθμῶν, τοὺς ὁποίους ζητοῦμεν, τότε ὁ προσδιορισμὸς οὗτος συγκροτεῖ τὴν λεγομένην ἀνάλυσιν, εἴτε ἐπίλυσιν τοῦ προβλήματος.

Εἰς κλάσιν τινὰ τινῶν προβλημάτων δυνάμεθα νὰ συστήσωμεν κανόνας σταθεροὺς καὶ βεβαίους. Ταῦτα εἶναι ὅσα ἐξαρτῶνται ἀπὸ τὴν θεωρίαν τῶν λόγων καὶ ἀναλογιῶν. Φυσικὰ λοιπὸν πρέπει νὰ ἀναπτύξωμεν πρῶτον αὐτὴν τὴν θεωρίαν, ἥτις, ἐξ αἰτίας τῶν ἀπείρων ἐφαρμογῶντης, πρέπει νὰ θεωρῆται ὡς ἡ πλέον ἀξιόλογος εἰς τὴν Μαθηματικήν.

§. α΄. Περὶ λόγων καὶ Ἀναλογιῶν.

§. 201. Εἴπομεν ἤδη (ἀριθμ[illegible].) ὅτι δὲν ὑπάρχει ἀπόλυτος ποσότης, καὶ ὅτι διὰ νὰ ἐννοήσωμεν ποσότητα τινὰ, πρέπει νὰ τὴν συγκρίνωμεν μὲ ἄλλην, λαμβανομένην κατὰ συμφωνίαν, τοῦ ἰδίου εἴδους, ἥτις δύναται νὰ ληφθῇ κατ' ἀρέσκειαν, ἢ ἀπὸ τὴν φύ-

σιν· τὸ δὲ ἐξαγόμενον ταύτης τῆς συγκρίσεως ὠνομάσαμεν ἀριθμόν.

Ἐὰν ὅμως ἀντὶ νὰ συγκρίνωμεν τὴν ποσότητα μὲ τὴν μονάδατης, θελήσωμεν νὰ συγκρίνωμεν δύο ὁποιασδήποτε ποσότητας τοῦ ἰδίου εἴδους, τὸ ὁποῖον ἄλλο δὲν εἶναι, εἰμὴ σύγκρισις τῶν δύο ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι τὰς ἐκφράζουσι, τὸ ἐξαγόμενον ταύτης τῆς συγκρίσεως καλεῖται ἀναφορὰ ἢ λόγος τῶν δύο ἀριθμῶν. Αἱ δύο αὗται λέξεις „ἀναφορὰ καὶ λόγος" εἶναι συνώνυμοι εἰς τὴν μαθηματικὴν, καὶ ἐκφράζουν τὴν ἰδέαν τῆς ποσότητος, τὴν ὁποίαν λαμβάνομεν, διὰ μέσου ἐκείνης μὲ τὴν ὁποίαν τὴν συγκρίνομεν, καὶ ἡ ὁποία πρέπει νὰ ἦναι οὐσιωδῶς τοῦ ἰδίου εἴδους.

Κατὰ ταύτην τὴν ἔννοιαν ὁ ἀριθμὸς εἶναι ἡ ἔκφρασις τοῦ λόγου τῆς ποσότητος πρὸς τὴν μονάδα της.

Ἐν γένει ὑπάρχουν δύο τρόποι τοῦ συγκρίνειν δύο ποσότητας τὴν μίαν μὲ τὴν ἄλλην. Ἢ ζητοῦμεν πόσον ἡ μεγαλητέρα ὑπερβαίνει τὴν μικροτέραν, καὶ τὸ ἐξαγόμενον λαμβάνεται διὰ τῆς ἀφαιρέσεως τῆς μικροτέρας ἀπὸ τὴν μεγαλητέραν· ἢ ζητοῦμεν ποσάκις ἡ μεγαλητέρα περιέχει τὴν μικροτέραν, ἢ ποσάκις ἡ μικροτέρα περιέχεται εἰς τὴν μεγαλητέραν· τοῦτο δὲ ἐκτελοῦμεν διαιροῦντες τὴν μίαν ποσότητα διὰ τῆς ἄλλης.

Οὕτως ἔστωσαν 24 καὶ 6 οἱ δύο ἀριθμοὶ, τοὺς ὁποίους θέλομεν νὰ συγκρίνωμεν.

Ἔχομεν $24-6=18$, καὶ $\frac{24}{6}=4$.

Τὸ ἐξαγόμενον τῆς συγκρίσεως διὰ τῆς ἀφαιρέσεως εἶναι 18, ἐνῷ τὸ ἐξαγόμενον τῆς συγκρίσεως διὰ τῆς διαιρέσεως εἶναι 4.

Πρὸς διάκρισιν τῶν δύο τούτων εἰδῶν τοῦ λόγου, ὠνόμασαν ἄλλοτε τὸ πρῶτον ἀριθμητικὸν λόγον,

καὶ τὸ δεύτερον λόγον γεωμετρικόν. Ἀλλ᾽ ἀντ᾽ αὐτῶν τῶν ἀσημάντων ὀνομασιῶν ἀντεισήχθησαν τώρα αἱ ἀκόλουθοι· λόγος κατ᾽ ἀφαίρεσιν, ἢ ἁπλῶς διαφορὰ, ἐπειδὴ τοῦτο εἶναι τὸ ἐξαγόμενον τῆς ἀφαιρέσεως δύο ἀριθμῶν τοῦ ἑνὸς ἀπὸ τὸν ἄλλον, καὶ λόγος κατὰ διαίρεσιν, ἢ ἁπλῶς λόγος, ἐπειδὴ τὸν μεταχειριζόμεθα, διὰ νὰ γνωρίσωμεν μόνον πόσαις φοραῖς ἡ μία τῶν ποσοτήτων περιέχει τὴν ἄλλην, ἢ πόσαις φοραῖς ἡ μικροτέρα περιέχεται εἰς τὴν μεγαλητέραν, ὅταν συγκρίνωμεν δύο μεγέθη εἰς τὴν Μαθηματικήν.

Π. χ. εἰς τὴν θεωρίαν τῶν συμμιγῶν ἀριθμῶν, ὁ λόγος τῆς ἀρχικῆς μονάδος ὁποιασδήποτε φύσεως πρὸς μίαν τῶν ὑποδιαιρέσεών της, ἢ ὁ λόγος μεταξὺ δύο ὑποδιαιρέσεων εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν φορῶν, καθ᾽ ἃς ἡ μία περιέχει τὴν ἄλλην. Εἰς τὴν σύγκρισιν τοῦ νέου συστήματος τῶν βαρέων καὶ μέτρων πρὸς τὸ παλαιὸν, ὁ λόγος τοῦ μέτρου πρὸς τὴν ὀργυιὰν, ἢ τῆς ὀργυιᾶς πρὸς τὸ μέτρον, ὁ λόγος τοῦ χιλιογράμμου πρὸς τὴν λίτραν, ἢ τῆς λίτρας πρὸς τὸ χιλιόγραμμον, εἶναι ὁ ἀριθμὸς ἀκέραιος ἢ κλασματικὸς, ὅς τις προκύπτει ἀπὸ τὴν διαίρεσιν δύο ἀριθμῶν, οἵτινες ἐκφράζουσιν εἰς μονάδας τοῦ ἰδίου εἴδους τὰ μέτρα, τὰ ὁποῖα συγκρίνομεν. Διὰ τοῦτο εἰς τὸ ἑξῆς, ὅταν μεταχειριζώμεθα τὴν λέξιν λόγος, θέλομεν ἐννοεῖ τὸ ἐξαγόμενον, ἢ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τῶν δύο ἀριθμῶν· καὶ ἐὰν θέλωμεν νὰ φανερώσωμεν, ὅτι δύο ἀριθμοὶ συγκρίνονται μεταξύ των κατ᾽ ἀφαίρεσιν, τότε μεταχειριζόμεθα τὴν λέξιν διαφορὰ ἢ λόγος κατ᾽ ἀφαίρεσιν.

Εἰς κάθε λόγον εἴτε κατ᾽ ἀφαίρεσιν, εἴτε κατὰ διαίρεσιν διακρίνονται δύο ὅροι, οἵτινες εἶναι οἱ ἀριθμοὶ, τοὺς ὁποίους συγκρίνομεν. Ὁ ὅρος, τὸν ὁποῖον ἐκ-

φράζομεν ἢ γράφομεν πρῶτον, καλεῖται ἡγούμενος; καὶ ὁ δεύτερος, ἑπόμενος.

§. 202. Ὅταν δύο κατ' ἀφαίρεσιν λόγοι ἦναι ἴσοι, τὸ ἄθροισμα τῶν τεσσάρων ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι τοὺς συσταίνουν, καλεῖται Ἰσοδιαφορά, ὡς οὖσα ἔκφρασις δύο ἴσων διαφορῶν. (ἄλλοτε ἐκαλεῖτο ἀναλογία ἀριθμητική.)

Π. χ. Ἔστωσαν οἱ τέσσαρες ἀριθμοὶ 12, 5, 24, 17. Ἐπειδὴ ἡ διαφορὰ τοῦ 5 ἀπὸ τὸ 12 εἶναι 7, καὶ ἡ διαφορὰ τοῦ 17 ἀπὸ τὸ 24, εἶναι παρομοίως 7, λέγεται ὅτι αἱ ποσότητες αὗται σχηματίζουσιν Ἰσοδιαφοράν, τὴν ὁποίαν γράφομεν οὕτως,

12 . 5 : 24 . 17

τιθεμένης μιᾶς στιγμῆς μεταξὺ τοῦ πρώτου καὶ δευτέρου ὅρου, δύο στιγμῶν μεταξὺ τοῦ δευτέρου καὶ τρίτου, καὶ μιᾶς μεταξὺ τοῦ τρίτου καὶ τετάρτου.

Τὴν ἐκφράζομεν δὲ κατὰ τὸν ἀκόλουθον τρόπον.

12 εἶναι πρὸς 5, καθὼς 24 πρὸς 17,

τὸ ὁποῖον δηλοῖ, ὅτι 12 ὑπερβαίνει τὸ 5 κατὰ τόσας μονάδας, καὶ ὅσας τὸ 24 ὑπερβαίνει τὸ 17.

Καὶ δυνάμεθα νὰ γράψωμεν αὐτὴν κατὰ τὴν ὁποίαν παρεδέχθημεν ἀρχήν,

$$12 - 5 = 24 - 17.$$

Εἰς τὴν ἰσοδιαφορὰν 12 . 5 : 24 . 17 ὁ πρῶτος καὶ ὁ τρίτος ὅρος 12 καὶ 24 καλοῦνται ἡγούμενοι, ὁ δεύτερος καὶ ὁ τέταρτος καλοῦνται ἑπόμενοι. Αὗται αἱ ὀνομασίαι συμφωνοῦσι μὲ τὰς ὁποίας ἐδώκαμεν εἰς τοὺς δύο ὅρους λόγου τινὸς κατ' ἀφαίρεσιν.

Ὁ πρῶτος καὶ ὁ τελευταῖος ὅρος 12 καὶ 17 καλοῦνται τὰ δύο ἄκρα· ὁ δεύτερος καὶ ὁ τρίτος ὅρος 5 καὶ 24 καλοῦνται τὰ δύο μέσα.

Ὅταν δύο κατὰ διαίρεσιν λόγοι ἦναι ἴσοι, τὸ ἄθροισμα τῶν τεσσάρων ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι τοὺς συ-

σταίνουσι, καλεῖται ἀναλογία, (ἄλλοτε γεωμετρικὴ ἀναλογία), ἢ καὶ κατ' ἄλλον τρόπον Ἰσοπηλικότης, ἐπειδὴ παῤῥησιάζει τὴν ἔκφρασιν δύο ἴσων πηλίκων· ἀλλὰ ἡ λέξις ἀναλογία, εἶναι ἡ μόνη παρὰ πᾶσιν ἀποδεκτή.

Ἔστωσαν π. χ. οἱ τέσσαρες ἀριθμοὶ 15, 5, 36, 12. Ἐπειδὴ ὁ λόγος τοῦ 15 πρὸς τὸ 5, ἢ τὸ πηλίκον τοῦ 15 διὰ τοῦ 5 εἶναι 3, καθὼς καὶ ὁ λόγος τοῦ 36 πρὸς τὸ 12, οἱ τέσσαρες ὁμοῦ σχηματίζουν ἀναλογίαν, τὴν ὁποίαν γράφομεν οὕτως

15 : 5 :: 36 : 12.

τιθεμένων δύο στιγμῶν μεταξὺ τοῦ πρώτου καὶ δευτέρου, μεταξὺ τοῦ δευτέρου καὶ τρίτου τεσσάρων, καὶ μεταξὺ τοῦ τρίτου καὶ τοῦ τετάρτου δύο.

Τὴν προφέρομεν δὲ ὡς καὶ τὴν ἰσοδιαφορὰν, 15 πρὸς 5, καθὼς 36 πρὸς 12· τὸ ὁποῖον δηλοῖ, ὅτι τὸ 15 περιέχει τὸ 5 τοσάκις, ὁσάκις 36 περιέχει 12. Διὰ τοῦτο δυνάμεθα νὰ γράψωμεν αὐτὴν καὶ ὑπὸ ταύτην τὴν ἄλλην μορφὴν $\frac{15}{3}=\frac{36}{12}$.

Αἱ ὀνομασίαι τῶν ὅρων εἶναι αἱ αὐταὶ, ὡς καὶ εἰς τὴν Ἰσοδιαφοράν.

Οὕτως 15 καὶ 36 εἶναι οἱ ἡγούμενοι, 5 καὶ 12 εἶναι οἱ ἑπόμενοι· τέλος πάντων 15 καὶ 12 καλοῦνται ἄκρα, 5 καὶ 36 μέσα τῆς ἀναλογίας.

Τῶν ἰσοδιαφορῶν καὶ μάλιστα τῶν ἀναλογιῶν τὰς πολυπληθεῖς ἰδιότητας ἀναπτύσσομεν ἤδη κατὰ διαδοχήν.

Περὶ τῶν Ἰσοδιαφορῶν.

§. 204. Καλεῖται Ἰσοδιαφορὰ (ἀριθμ. 202) ἡ ἔκφρασις δύο ἴσων διαφορῶν.

Θεμελιώδης Ἰδιότης. Εἰς κάθε ἰσοδιαφορὰν τὸ ἄθροισμα τῶν ἄκρων εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν μέσων.

Ἔστω ἡ Ἰσοδιαφορὰ 11 . 7 ; 19 . 15·

Βλέπομεν φανερὰ, ὅτι $11+15=7+19$.

Διὰ νὰ δώσωμεν λόγον ταύτης τῆς προτάσεως κατὰ γενικόν τινὰ τρόπον, παρατηροῦμεν, ὅτι, ἐὰν οἱ ἑπόμενοι ἦσαν ἴσοι μὲ τοὺς ἡγουμένους τῶν, π. χ. ἐὰν εἴχαμεν 11 . 11 : 19 . 19,

ἡ πρότασις ἤθελεν εἶναι φανερά· διότι $11+19 = 11+19$· ὅθεν διὰ νὰ φέρωμεν τὴν ἰσοδιαφορὰν εἰς ταύτην τὴν κατάστασιν, ἀρκεῖ νὰ αὐξήσωμεν ἕκαστον τῶν ἑπομένων μὲ τὴν ἰδίαν διαφορὰν 4.

Ἀλλὰ διὰ ταύτης τῆς προσθέσεως βλέπομεν ὅτι αὐξήσαμεν ἓν τῶν μέσων, καὶ ἓν τῶν ἄκρων μὲ τὸν ἴδιον ἀριθμὸν 4; οὕτως τὸ ἄθροισμα τῶν μεσαίων καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ἄκρων εὑρίσκονται αὐξημένα ἀπὸ τὸν ἴδιον ἀριθμόν. Λοιπὸν ἐπειδὴ διὰ ταύτης τῆς προσθέσεως δύο ἀθροίσματα εἶναι ἴσα, ταῦτα ἄρα ἦσαν καὶ πρότερον ἴσα.

Παρατηροῦμεν προσέτι, ὅτι ἐὰν δὲν ἦτον ἰσοδιαφορὰ μεταξὺ τῶν τεσσάρων ἀριθμῶν, ἔπρεπε, διὰ νὰ καταστήσωμεν τοὺς ἑπομένους ἴσους μὲ τοὺς ἡγουμένους, νὰ προσθέσωμεν εἰς ἕκαστον τούτων ἀριθμὸν διαφορετικὸν, καὶ ἐπειδὴ μετὰ ταύτην τὴν πρόσθεσιν τὸ ἄθροισμα τῶν ἄκρων γίνεται ἴσον μὲ τὸ τῶν μέσων, ἕπεται ὅτι τὰ δύο ἀθροίσματα ἦτον ἄνισα πρὸ τῆς προσθέσεως.

Λοιπὸν ἐὰν τέσσαρες ἐκφρασμένοι ἢ γραμμένοι ἐπὶ τῆς αὐτῆς γραμμῆς ἀριθμοὶ σχηματίζουν ἰσοδιαφορὰν, τὸ ἄθροισμα τῶν ἄκρων εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν μέσων.

Καὶ ἀντιστρόφως, ἐὰν τὸ ἄθροισμα τοῦ πρώτου καὶ τελευταίου ἀριθμοῦ ἦναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τοῦ δευτέρου καὶ τρίτου, ἢ ἐὰν τὸ ἄθροισμα τῶν ἄκρων ἦναι ἴσον μὲ τὸ τῶν μέσων, οἱ τέσσαρες ἀριθμοὶ σχη-

ματίζουσιν ἰσοδιαφορὰν εἰς τὴν τάξιν, εἰς τὴν ὁποίαν εἶναι γραμμένοι· ἐπειδὴ ἐὰν δὲν ὑπῆρχεν ἰσοδιαφορὰ, εἴδομεν ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἄκρων δὲν ἤθελεν εἶναι ἴσον μὲ ἐκεῖνο τῶν μέσων· τὸ ὁποῖον εἶναι ἐναντίον τῆς ὑποθέσεως.

Σ. Κ. Συμβαίνει κάποτε νὰ ἦναι οἱ ἡγούμενοι μικρότεροι τῶν ἑπομένων των, καθὼς εἰς τὴν ἰσοδιαφοράν,

9 . 14 : 18 . 23.

Ἀλλ' οἱ συλλογισμοὶ ἤθελαν εἶναι οἱ ἴδιοι ὡς εἰς τὴν ἀνωτέρω περίστασιν. Ἤρκει δὲ νὰ προσθέσωμεν εἰς τοὺς δύο ἡγουμένους τὴν σταθερὰν διαφορὰν 5, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ αὐτὸ, ὡς νὰ ἐπροσθέταμεν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν εἰς τὸ ἄθροισμα τῶν ἄκρων, καὶ εἰς τὸ ἄθροισμα τῶν μέσων.

Ἂς ἴδωμεν τώρα μὲ ποίαν ἀκρίβειαν ἐφαρμόζονται αἱ Ἀλγεβραϊκαὶ γραφαὶ εἰς τὴν ἀνωτέρω ἰδιότητα, καὶ εἰς τὴν ἀντίστροφόν της.

Ἔστωσαν τέσσαρες ἀριθμοὶ α, β, γ, δ, τοὺς ὁποίους ὑποθέτομεν, ὅτι σχηματίζουν ἀναμεταξύ των ἰσοδιαφοράν.

Ἔχομεν λοιπὸν $α . β : γ . δ$, ἢ κατ' ἄλλον τρόπον $α - β = γ - δ$.

Τούτου τεθέντος προσθέτομεν εἰς τὰ δύο μέλη ταύτης τῆς ἰσότητος, $β + δ$, καὶ οὕτω συνάγομεν,

$$α - β + β + δ = γ - δ + β + δ$$

ἢ ἀνάγοντες, $α + δ = γ + β$. Λοιπὸν τὸ ἄθροισμα τῶν ἄκρων α καὶ δ, εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν μέσων γ καὶ β.

Ἀντιστρόφως, ἔστωσαν οἱ τέσσαρες ἀριθμοὶ α, β, γ, δ, τοιοῦτοι ὥστε $α + δ = β + γ$.

Ἂς ἀφαιρέσωμεν $β + δ$ ἀπὸ τὰ δύο μέλη ταύτης τῆς ἰσότητος, ὅθεν ἔχομεν $α + δ - β - δ = β + γ - β - δ$,

ἢ ἀνάγοντες $\alpha - \beta = \gamma - \delta$ ἢ $\alpha . \beta : \gamma . \delta$. Λοιπὸν οὗτοι οἱ τέσσαρες ἀριθμοὶ σχηματίζουσιν ἰσοδιαφορὰν, τῆς ὁποίας τὰ ἄκρα εἶναι οἱ δύο ὅροι τοῦ πρώτου ἀθροίσματος, καὶ τὰ μέσα, οἱ δύο ὅροι τοῦ δευτέρου ἀθροίσματος.

§. 205. Συνέπεια. Ἕπεται ἐκ τῆς ἀνωτέρω ἰδιότητος, ὅτι γνωρίζοντες τοὺς τρεῖς ὅρους τῆς ἰσοδιαφορᾶς προσδιαρίζομεν τὸν τέταρτον, ἀφαιροῦντες, ἐὰν εἶναι ἓν τῶν ἄκρων, τὸ γνωστὸν ἄκρον ἐκ τοῦ ἀθροίσματος τῶν μέσων, καὶ, ἐὰν εἶναι ἓν τῶν μέσων, τὸ γνωστὸν μέσον ἐκ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἄκρων.

Οὕτως ἔστω ἡ ἰσοδιαφορὰ $23 . 11 : 49 . \chi$ (χ παῤῥησιάζοντος τὸν ἄγνωστον ὅρον).

Ἐπειδὴ δὲ ἔχομεν κατὰ τὴν ἰδιότητα $\chi + 23 = 11 + 49$, προκύπτει $\chi = 11 + 49 - 23 = 37$, τὸ ὁποῖον μᾶς δίδει

$$23 . 11 : 49 . 37.$$

Παρομοίως εἰς τὴν ἰσοδιαφορὰν $31 . 25 : \chi . 78$ ἔχομεν $\chi + 25 = 31 + 78$. Λοιπὸν $\chi = 31 + 78 - 25 = 84$, καὶ ἐπομένως $31 . 25 : 84 . 78$.

§. 206. Συμβαίνει κάποτε νὰ θεωρῶμεν ἰσοδιαφορὰν, τῆς ὁποίας τὰ δύο μέσα εἶναι ἴσα. Αὕτη καλεῖται συνεχὴς ἰσοδιαφορὰ (ἢ συνεχὴς ἀριθμητικὴ ἀναλογία) π. χ. $27 . 39 : 39 . 51$, εἶναι συνεχὴς ἰσοδιαφορά. Ἐπειδὴ, εἰς ταύτην τὴν περίστασιν, τὸ διπλοῦν ἑνὸς τῶν μεσαίων πρέπει κατὰ τὴν ἀνωτέρω ἰδιότητα νὰ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἄκρων, ἕπεται ὅτι τὸ μέσον τοῦτο εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν δύο ἄκρων.

Οὕτως εἰς τὴν ἰσοδιαφορὰν $23 . \chi : \chi . 49$,

συνάγομεν $\chi = \frac{49+23}{2} = 36$.

Αὕτη ἡ τιμὴ τοῦ x καλεῖται ἓν μέσον διαφορᾶς (ἢ μέσον ἀριθμητικῶς ἀνάλογον), μεταξὺ τῶν δύο ἀριθμῶν 23 καὶ 49.

§. 207. Ἰδοὺ καὶ μερικαὶ ἄλλαι ἰδιότητες τῶν ἰσοδιαφόρων.

Δυνάμεθα νὰ αὐξήσωμεν τοὺς δύο ἡγουμένους, ἢ νὰ τοὺς ἐλαττώσωμεν, νὰ αὐξήσωμεν τοὺς δύο ἑπομένους; ἢ νὰ τοὺς ἐλατταττώσωμεν μὲ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν, νὰ αὐξήσωμεν ἢ νὰ ἐλαττώσωμεν τοὺς δύο πρώτους ὅρους, ἢ τοὺς δύο τελευταίους μὲ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν, χωρὶς ἡ ἰσοδιαφορὰ νὰ παύσῃ ἀπὸ τοῦ νὰ ὑπάρχῃ.

Τῷ ὄντι εἶναι φανερὸν ὅτι δι' ὅλων τούτων τῶν μεταβολῶν, ἢ αὐξάνομεν ἢ ἐλαττοῦμεν τὸ ἄθροισμα τῶν ἄκρων, καὶ ἐκεῖνο τῶν μέσων μὲ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν, διὰ τοῦτο ἡ ἰσότης τῶν μένει ἡ αὐτή· καὶ διὰ τοῦτο ὑπάρχει τὸ αὐτὸ καὶ διὰ τὸ ἀντίστροφον τῆς θεμελιώδους ἰδιότητος.

Δυνάμεθα παρομοίως νὰ τρέψωμεν τὴν τάξιν τῶν δύο ἄκρων εἰς ἐκείνην τῶν δύο μέσων, ἢ νὰ θέσωμεν τὰ μέσα εἰς τὸν τόπον τῶν ἄκρων, χωρὶς νὰ χαλάσῃ ἡ ἰσοδιαφορὰ, ἐπειδὴ εἶναι φανερὸν, ὅτι μετὰ ταύτας τὰς ἀλλαγὰς, τὸ ἄθροισμα τῶν ἄκρων εἶναι ἀκόμη ἴσον μὲ ἐκεῖνο τῶν μέσων.

Ἐν γένει, καθε τροπὴ ἐκτελουμένη ἐπὶ ἰσοδιαφορᾶς, οὔσης τοιαύτης, ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν ἄκρων νὰ μένῃ πάντοτε ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν μέσων, δὲν φθείρει παντελῶς τὴν ἰσοδιαφοράν.

Ἀλλ' εἶναι ἀνωφελὲς νὰ ἐκτανθῶμεν περισσότερον εἰς τὰς ἰδιότητας τῶν ἰσοδιαφόρων, ἐπειδὴ πολλὰ ὀλίγον τὰς μεταχειρίζονται.

Ἃς περάσωμεν λοιπὸν εἰς τὰς ἰδιότητας τῶν κυρίως λεγομένων ἀναλογιῶν (ἢ μὲ ἄλλας λέξεις γεωμετρικῶν ἀναλογιῶν).

Περὶ ἀναλογιῶν.

§. 208. Ἀναλογίαν ἐννοοῦμεν τὴν ἔκφρασιν δύο λόγων, ἢ δύο ἴσων πηλίκων.

Ὅταν τέσσαρες ἀριθμοὶ ἦναι ἀνάλογοι, ὁ σταθερὸς λόγος, ὅστις ὑπάρχει μεταξὺ τῶν δύο πρώτων ὅρων, καὶ μεταξὺ τῶν δύο τελευταίων, δύναται νὰ ἦναι ἀκέραιος ἢ κλασματικὸς ἀριθμὸς, ἢ κύριόν τι κλάσμα.

Ἔστωσαν αἱ ἀναλογίαι π. χ.

$$18 : 6 :: 24 : 8$$
$$12 : 9 :: 36 : 27$$
$$5 : 12 :: 20 : 48$$

Εἰς τὴν πρώτην ὁ σταθερὸς λόγος εἶναι 3. Εἰς τὴν δευτέραν εἶναι $\frac{12}{9}$ ἢ $\frac{36}{27} = \frac{4}{3}$, ἀφ' οὗ ἐξαλειφθῶσιν οἱ παράγοντες τῶν δύο ὅρων. Λοιπὸν $\frac{4}{3}$ εἶναι ὁ σταθερὸς λόγος. Τέλος πάντων εἰς τὴν τρίτην ἔχομεν $\frac{20}{48} = \frac{5}{12}$, ἀφ' οὗ ἐξαλειφθῇ ὁ κοινὸς παράγων 4 ἀπὸ τοὺς δύο ὅρους, οὕτως $\frac{5}{12}$ εἶναι ὁ σταθερὸς λόγος.

Θεμελιώδης ἰδιότης. Εἰς κάθε ἀναλογίαν τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῶν μέσων.

Τῷ ὄντι, αὕτη ἡ ἰδιότης ἤθελεν εἶναι φανερὰ, ἐὰν ἀντὶ τῆς ἀναλογίας

$$18 : 6 :: 24 : 8$$

εἴχαμεν ἄλλην, τῆς ὁποίας οἱ ἡγούμενοι ἤθελαν εἶναι ἴσοι μὲ τοὺς ἑπομένους της, ὡς π. χ. 18 : 18 :: 24 : 24.

Ὅθεν διὰ νὰ ἄξωμεν τὴν πρώτην ἀναλογίαν εἰς ταύτην τὴν περίστασιν, ἀρκεῖ προφανῶς νὰ πολλαπλα-

σιάσωμεν ἕκαστον ἑπόμενον ἐπὶ τὸν σταθερὸν λόγον 3· ἀλλὰ διὰ τοῦ τοιούτου πολλαπλασιασμοῦ ἓν τῶν μέσων καὶ ἓν τῶν ἄκρων πολλαπλασιάζονται ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, διὰ τοῦτο ἀκολουθεῖ τὸ αὐτὸ εἰς τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων καὶ εἰς τὸ γινόμενον τῶν μέσων, καὶ ἐπειδὴ τότε αὐτὰ τὰ δύο γινόμενα εἶναι ἴσα, πρέπει νὰ ἦτον ἴσα καὶ πρὸ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

Παρατηροῦμεν προσέτι, ὅτι ἐὰν οἱ τέσσαρες δεδομένοι ἀριθμοὶ δὲν ἐσχημάτιζαν ἀναλογίαν, ἔπρεπε, διὰ νὰ σχηματίσωμεν τοὺς ἑπομένους ἴσους μὲ τοὺς ἡγουμένους, νὰ πολλαπλασιάσωμεν τοὺς τοιούτους ἑπομένους ἕκαστον ἐπὶ ἀριθμὸν τινὰ διάφορον ἐκφράζοντα τὸν λόγον τοῦ πρώτου ὅρου πρὸς τὸν δεύτερον, ἢ τοῦ τρίτου ὅρου πρὸς τὸν τέταρτον· καὶ ἐπειδὴ μετὰ τὸν πολλαπλασιασμὸν τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων γίνεται ἴσον μὲ ἐκεῖνο τῶν μέσων, διὰ τοῦτο πρὸ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τὰ δύο γινόμενα δὲν ἦτον ἴσα.

Ἐκ τούτου πορίζομεν, ὅτι ἐὰν τέσσαρες ἀριθμοὶ προφερόμενοι ἢ γραφόμενοι ἐπὶ μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς γραμμῆς, εἶναι ἀνάλογοι, τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων εἶναι ἴσον μὲ ἐκεῖνο τῶν μέσων.

Ἀντιστρόφως, ἐὰν τὸ γινόμενον τῶν δύο ἄκρων εἶναι ἴσον μὲ ἐκεῖνο τῶν μέσων, οἱ ἀριθμοὶ σχηματίζουσιν ἀναλογίαν εἰς τάξιν, καθ' ἣν εἶναι γραμμένοι· ἐπειδὴ ἐὰν δὲν ὑπῆρχεν ἀναλογία μεταξὺ τῶν τεσσάρων ἀριθμῶν, τότε, ὡς εἴπομεν, τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων δὲν ἤθελεν εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῶν μέσων, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ ἐναντίον τῆς συσταθείσης ὑποθέσεως.

Ἂς ἐφαρμόσωμεν τὰς ἀλγεβραϊκὰς γραφὰς εἰς τὴν ἀπόδειξιν ταύτης τῆς ἰδιότητος καὶ τῆς ἀντιστρόφου της.

Ἔστωσαν οἱ τέσσαρες ἀριθμοὶ, α, β, γ, δ εἰς ἀναλογίαν, τουτέστι νὰ ἔχωμεν $\alpha : \beta :: \gamma : \delta$· ἢ, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ αὐτὸ, $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$. Πολλαπλασιάζομεν τὰ δύο μέλη ταύτης τῆς ἰσότητος διὰ βδ καὶ ἔχομεν $\frac{\alpha\beta\delta}{\beta} = \frac{\gamma\beta\delta}{\delta}$, καὶ ἀνάγοντες εὑρίσκομεν $\alpha\delta = \beta\gamma$.

Λοιπὸν τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων αδ εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῶν μέσων βγ.

Ἀντιστρόφως. Ἔστωσαν οἱ τέσσαρες ἀριθμοὶ α, β, γ, δ τοιοῦτοι ὥστε $\alpha \times \delta = \beta \times \gamma$.

Καὶ διαιροῦντες τὰ δύο μέλη ταύτης τῆς ἰσότητος διὰ $\beta \times \delta$, ἔχομεν $\frac{\alpha \times \delta}{\beta \times \delta} = \frac{\beta \times \gamma}{\beta + \delta}$.

Καὶ ἐξαλείφοντες τοὺς κοινοὺς παράγοντας, $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$, τουτέστιν . . . . ἔχομεν $\alpha : \beta :: \gamma : \delta$.

Λοιπὸν οἱ τέσσαρες ἀριθμοὶ σχηματίζουσιν ἀναλογίαν, τῆς ὁποίας τὰ ἄκρα εἶναι οἱ παράγοντες τοῦ πρώτου γινομένου, καὶ τὰ μέσα εἶναι οἱ παράγοντες τοῦ δευτέρου γινομένου.

§. 209. Συνέπεια. Ἐκ ταύτης τῆς θεμελιώδους ἰδιότητος προκύπτει· ὅτι γνωρίζοντες τοὺς τρεῖς ὅρους μιᾶς ἀναλογίας, διὰ νὰ προσδιορίσωμεν τὸν τέταρτον, διαιροῦμεν τὸ γινόμενον τῶν μέσων διὰ τοῦ γνωστοῦ ἄκρου, ἢ τὸ γινόμενον τῶν δύο ἄκρων διὰ τοῦ γνωστοῦ μέσου, καθ' ὅσον ὁ ὅρος, τὸν ὁποῖον ζητοῦμεν εἶναι ἐκ τῶν ἄκρων, ἢ ἐκ τῶν μέσων.

Οὕτως ἔστω ἡ ἀναλογία $18 : 24 :: 72 : x$.

Ἐπειδὴ δὲ ἔχομεν $18\times\chi = 24\times72$, προκύπτει $\chi = \frac{24\times72}{18} = 96$.

Ὥστε μᾶς δίδει $18 : 24 :: 72 : 96$.

§. 210. Κάποτε τὰ δύο μέσα τῆς ἀναλογίας εἶναι ἀναμεταξύ των ἴσα, καθὼς εἰς τὴν ἀκόλουθον,

$$9 : 12 :: 12 : 16.$$

Ἡ ἀναλογία καλεῖται τότε συνεχὴς ἀναλογία.

Εἰς ταύτην δὲ τὴν περίστασιν τὸ γινόμενον τῶν δύο μέσων εἶναι ἴσον μὲ τὸ τετράγωνον ἑνὸς αὐτῶν, καὶ ἑπομένως τὸ τετράγωνον εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων. Λοιπὸν ἓν τῶν μέσων ἔχει τιμὴν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ γινομένου τῶν ἄκρων.

Ἔστω π. χ. ἡ ἀναλογία $50 : \chi :: \chi : 8$, ὄντος χ τοῦ μέσου ἀγνώστου ὅρου συνεχοῦς τινὸς ἀναλογίας. Ἔχομεν δὲ

$$\chi^2 = 50\times8 = 400,$$

ἐκ τοῦ ὁποίου ἐξάγομεν $\chi = \sqrt{400} = 24$.

Καὶ διὰ τοῦτο $50 : 20 :: 20 : 8$.

Ἐν γένει, ἔστω ἡ ἀναλογία $\alpha : \chi :: \chi : \beta$, ἐκ τῆς ὁποίας προκύπτει $\chi^2 = \sqrt{\alpha\times\beta}$. Αὕτη ἡ τιμὴ τοῦ χ καλεῖται μέση ἀνάλογος μεταξὺ δύο ἀριθμῶν.

§. 211. Ἄλλαι ἰδιότητες. Πολλαπλασιαζομένων, ἢ διαιρουμένων τῶν δύο πρώτων ὅρων, ἢ τῶν δύο τελευταίων διὰ τοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ, ἡ ἀναλογία δὲν ἀλλοιοῦται.

Τῷ ὄντι, ὁ λόγος τῶν δύο πρώτων ὅρων, ἢ ἐκεῖνος τῶν δύο τελευταίων εἶναι (ἀριθμ. 201) κλασματικός τις ἀριθμὸς, καὶ ηὑρομεν ὅτι πολλαπλασιάζοντες ἢ διαιροῦντες τοὺς δύο ὅρους τοῦ κλάσματος διὰ τοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ, δὲν ἀλλάττομεν τὴν τιμήν του.

Παρομοίως πολλαπλασιαζομένων ἢ διαιρουμένων τῶν δύο ἡγουμένων, καὶ πολλαπλασιαζομένων ἢ διαιρουμένων τῶν δύο ἑπομένων δι' ἑνὸς καὶ τοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ, ἡ ἀναλογία δὲν χαλᾶται. Ἐπειδὴ διὰ ταύτης τῆς μεταμορφώσεως, πολλαπλασιάζομεν εἰς τὸν αὐτὸν καιρὸν ἓν τῶν ἄκρων καὶ ἓν τῶν μέσων, ἢ ἓν τῶν μέσων, καὶ ἓν τῶν ἄκρων διὰ τοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ. Λοιπὸν τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων μένει πάντοτε ἴσον μὲ ἐκεῖνο τῶν μέσων. Ὅθεν κατὰ τὸ ἀντίστροφον τῆς θεμελιώδους ἰδιότητος, αὕτη εἶναι συνθήκη ἱκανὴ, ὥστε οἱ τέσσαρες ἀριθμοὶ νὰ ἦναι ἀνάλογοι.

Δυνάμεθα, ὡς εἰς τὴν Ἰσοδιαφορὰν, νὰ μεταλλάξωμεν τὴν θέσιν τῶν ἄκρων τῆς ἀναλογίας εἰς ἐκείνην τῶν μέσων, ἢ νὰ θέσωμεν τὰ ἄκρα εἰς τὴν θέσιν τῶν μέσων, χωρὶς ἡ ἀναλογία νὰ πσαύῃ ἀπὸ τοῦ νὰ ὑπάρχῃ μεταξὺ τῶν τεσσάρων ἀριθμῶν.

Π. χ. ἐκ τῆς ἀναλογίας . . . 36 : 12 :: 75 : 25
ἐξάγομεν διαδοχικῶς.

1ον. Ἀλλάττοντες τὰ ἄκρα . . 25 : 12 :: 75 : 36

2ον. Ἀλλάττοντες τὰ μέσα . . 36 : 75 :: 12 : 25

3ον. Ἀντεισάγοντες τὰ μέσα εἰς τὴν θέσιν τῶν ἄκρων. . . 12 : 36 :: 25 : 75

Ὁ σταθερὸς λόγος εἶναι διαφορετικὸς ἀπὸ μίαν ἀναλογίαν εἰς ἄλλην· οὕτως ὁ λόγος εἶναι 3 εἰς τὴν πρώτην, $\frac{25}{13}$ εἰς τὴν δευτέραν, $\frac{12}{25}$ εἰς τὴν τρίτην, $\frac{12}{36}$ ἢ $\frac{1}{3}$ εἰς τὴν τετάρτην· ὅμως ὄχι διὰ τοῦτο ἑκάστη τῶν ἀναλογιῶν δὲν ὑπάρχει, ἐπειδὴ μετὰ τὰς τοιαύτας μεταβολὰς εἶναι φανερὸν, ὅτι τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων μένει πάντοτε ἴσον μὲ ἐκεῖνο τῶν μέσων.

Σ. Κ. Οἱ περισσότεροι συγγραφεῖς τῆς γεωμετρίας σημειόνουσιν ὑπὸ τῆς ὀνομασίας Ἐναλλὰξ καὶ Ἀντίστροφον, τὰς διαφόρους μεταλλαγὰς, τὰς ὁποίας ἔκαμαν ἐπὶ τῶν ὅρων μιᾶς ἀναλογίας.

Αἱ τροπαὶ, αἵτινες συνίστανται εἰς τὸ νὰ πολλαπλασιάσουν ἢ νὰ διαιρέσουν τοὺς ὅρους, καλοῦνται τροπαὶ τοῦ πολλαπλασιάζειν ἢ διαιρεῖν.

Αἱ ἀκόλουθοι ἰδιότητες εἶναι εὐχρηστότατοι εἰς τὴν Γεωμετρίαν, καὶ ἀπαιτοῦσιν ὅλην τὴν προσοχὴν τῶν ἀρχαρίων.

§. 212. Πρώτη. Εἰς κάθε ἀναλογίαν τὸ ἄθροισμα ἢ ἡ διαφορὰ τῶν δύο πρώτων ὅρων περιέχεται εἰς τὸν δεύτερον ὅρον, καθὼς τὸ ἄθροισμα ἢ ἡ διαφορὰ τῶν δύο ἄλλων ὅρων περιέχεται εἰς τὸν τέταρτον.

Οὕτως ἡ ἀναλογία 72 : 24 :: 45 : 15
γίνεται, ὅταν προσθέσωμεν 72 + 24 : 24 :: 45 + 15 : 15
καὶ, ὅταν ἀφαιρέσωμεν . 72 — 24 : 24 :: 45 — 15 : 15,
ἀναλογία, τὴν ὁποίαν δυνάμεθα εὐκόλως νὰ βεβαιώσωμεν· Ἀλλὰ διὰ νὰ δώσωμεν λόγον ταύτης τῆς ἰδιότητος μὲ τρόπον γενικὸν, παρατηροῦμεν, ὅτι αὐξανομένου, ἢ ἐλαττουμένου ἑκάστου ἡγουμένου ἀπὸ τὸν ἑπόμενόν του, αὐξάνεται ἢ ἐλαττοῦται κατὰ μονάδα ἕκαστος τῶν δύο λόγων· καὶ ἐπειδὴ οὗτοι οἱ λόγοι ἦσαν ἴσοι πρότερον, μένουσιν ἴσοι καὶ μετὰ τὴν αὔξησιν καὶ μετὰ τὴν ἐλάττωσιν.

Ἀπὸ τὴν ἀναλογίαν 72 ± 24 : 24 :: 45 ± 15 : 15 (± προφέρεται πλέον ἢ μεῖον) ἐξάγομεν, ἀλλάττοντες τοὺς μεσαίους ἀπὸ θέσιν (ἀριθμ. 211)

72 ± 24 : 45 ± 15 :: 24 : 15.

ἀλλ' ἔχομεν ἤδη 72 : 24 :: 45 : 15
ἢ . . . . 72 : 45 :: 24 : 15.

Λοιπὸν ἐπειδὴ δύο λόγοι ἴσοι μὲ ἕνα τρίτον εἶναι ἐξ ἀνάγκης ἴσοι ἀναμεταξύ τους, προκύπτει ἀκόμη

72±24 : 45±15 :: 75 : 45

ἢ . . . . 72±24 : 72 :: 45±15 : 45.

Δυνάμεθα λοιπὸν νὰ εἴπωμεν οὕτως, ὅτι εἰς κάθε ἀναλογίαν τὸ ἄθροισμα, ἢ ἡ διαφορὰ τῶν δύο πρώτων ὅρων περιέχεται εἰς τὸν πρῶτον ὅρον, καθὼς τὸ ἄθροισμα ἢ ἡ διαφορὰ τῶν δύο ἄλλων ὅρων περιέχεται εἰς τὸν τρίτον· ἔκφρασις, τὴν ὁποίαν εὐκόλως ἐννοοῦμεν, καὶ μὲ μόνον τὰς λέξεις πλέον ἢ μεῖον.

§. 214. Δευτέρα. Εἰς κάθε ἀναλογίαν τὸ ἄθροισμα ἢ ἡ διαφορὰ τῶν ἡγουμένων περιέχεται εἰς τὸ ἄθροισμα ἢ εἰς τὴν διαφορὰν τῶν ἑπομένων, ὡς εἷς ὁποιοσδήποτε τῶν ἡγουμένων περιέχεται εἰς τὸν ἑπόμενόν του.

Ἂς ἐπαναλάβωμεν τὴν ἀνωτέρω ἀναλογίαν

72 : 24 :: 45 : 15·

καὶ ἂς ἀλλάξωμεν τὴν θέσιν τῶν μέσων· ἐντεῦθεν λαμβάνομεν

72 : 45 :: 24 : 15.

Ἤδη ἐφαρμόζοντες εἰς ταύτην τὴν ἀναλογίαν τὴν ἰδιότητα τοῦ ἀνωτέρω ἀριθμοῦ ἔχομεν,

72±45 : 45 :: 24±15 : 15·

ἢ ἀλλάττοντες ἀπὸ θέσιν τοὺς μεσαίους,

75±45 : 24±15 :: 45 : 15 ἢ :: 72 : 24.

Αὕτη ἡ ἀναλογία ἐκφραζομένη εἰς τὴν κοινὴν γλῶσσαν καὶ συγκρινομένη μὲ τὴν ἀναλογίαν 72 : 24 :: 45 : 15 μᾶς ἄγει εἰς τὴν ἐκφρασθεῖσαν ἰδιότητα.

Ἐὰν εἰς τὴν ἀναλογίαν 72+45:24+15::45:15 θεωρήσωμεν τὰ ἄνω σημεῖα, καὶ ὕστερον τὰ κάτω, ἐξάγομεν διαδοχικῶς,

$$72+45:24+15::45:15,$$
$$72-45:24-15::45:15,$$

καὶ ἐξ αἰτίας τοῦ κοινοῦ λόγου,

$$72+45:24+15::72-45:24-15.$$

ἢ ἀλλάττοντες τὴν θέσιν τῶν μέσων,

$$72+45:72-45::24+15:24-15\cdot$$

τουτέστιν, εἰς κάθε ἀναλογίαν τὸ ἄθροισμα τῶν ἡγουμένων περιέχεται εἰς τὴν διαφοράν των, ὡς τὸ ἄθροισμα τῶν ἑπομένων περιέχεται εἰς τὴν διαφοράν των.

§. 214. Συνέπειαι ταύτης τῆς ἰδιότητος. 1ον. Ἔστω σειράτις ἀριθμῶν α, β, γ, δ, ε, ζ, η, θ, ι, κ . . . . . σχηματιζόντων ἀνὰ δύο λόγους ἴσους ὥστε νὰ ἔχωμεν,

$$\alpha:\beta::\gamma:\delta::\varepsilon:\zeta::\eta:\vartheta::\iota:\varkappa.$$

λέγω, ὅτι εἰς ταύτην τὴν σειρὰν τῶν ἴσων λόγων, τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν ἡγουμένων α, γ, ε, η, ι . . . . περιέχεται εἰς τὸ ἄθροισμα τῶν ἑπομένων β, δ, ζ, θ, κ . . . ὡς εἷς ὁποιοσδήποτε τῶν ἡγουμένων περιέχεται εἰς τὸν ἑπόμενόν του.

Τῷ ὄντι οἱ δύο πρῶτοι λόγοι $\alpha:\beta::\gamma:\delta$ δίδουσιν ἐξαιτίας τῆς ἀνωτέρω ἰδότητος $\alpha+\gamma:\beta+\delta::\gamma:\delta\cdot$ ἀλλ' ἐπειδὴ ἔχομεν καὶ

. . . $\alpha:\beta::\varepsilon:\zeta$, ἕπεται ὅτι $\alpha+\gamma:\beta+\delta::\varepsilon:\zeta$.

Καὶ ἐφαρμόζοντες εἰς ταύτην τὴν νέαν ἀναλογίαν τὴν αὐτὴν ἰδιότητα ἔχομεν,

$$\alpha+\gamma+\varepsilon:\beta+\delta+\zeta::\varepsilon:\zeta$$

ἀλλ' ἔχομεν προσέτι $\varepsilon:\zeta::\eta:\vartheta$,

λοιπὸν . . $\alpha+\gamma+\varepsilon+\eta:\beta+\delta+\zeta+\vartheta::\eta:\vartheta\cdot$

καὶ διὰ τοῦτο $\alpha+\gamma+\varepsilon+\eta+\iota:\beta+\delta+\zeta+\vartheta+\varkappa::\eta:\vartheta\cdot$

καὶ οὕτως ἐφεξῆς, ὁποῖος καὶ ἂν εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν ἴσων λόγων.

2ον. Ἔστω τὸ κλάσμα $\frac{8}{12}$ ἴσον μὲ τὸ $\frac{2}{3}$, ἐὰν

λάβωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμητῶν, καὶ τὸ τῶν παρονομαστῶν τῶν δύο κλασμάτων, τὸ νέον προκύπτον κλάσμα $\frac{10}{15}$ θέλει εἶναι ἴσον μὲ ἕκαστον τῶν προτεθέντων κλασμάτων.

Τῷ ὄντι ἡ ἰσότης $\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$ ἄγεται εἰς τὴν ἀναλογίαν 8 : 12 :: 2 : 3. Λοιπὸν ἐφαρμόζοντες τὴν ἀνωτέρω ἰδιότητα, ἔχομεν

$$8+2 : 12+3 :: 8 : 12 :: 2 : 3.$$

λοιπὸν $\frac{8+2}{12+3}=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$.

Ἤθελεν ἀκολουθήσει τὸ αὐτὸ, ἐὰν ἐλαμβάναμεν τὴν διαφορὰν τῶν ἀριθμητῶν, καὶ τὴν τῶν παρονομαστῶν.

Αἱ τροπαὶ, αἱ ὁποῖαι ἀναφέρονται εἰς τὰς ἀνωτέρω ἰδιότητας καλοῦνται εἰς τὴν Γεωμετρίαν τροπαὶ τοῦ προσθέτειν καὶ τροπαὶ τοῦ ἀφαιρεῖν.

§. 215. Τρίτη. Ἐὰν ἔχωμεν ἀριθμόν τινα ἀναλογιῶν, καὶ, ἀφ' οὗ τὰς θέσωμεν τὴν μίαν ὑπὸ τὴν ἄλλην, τὰς πολλαπλασιάσωμεν κατὰ τάξιν, τὰ λαμβανόμενα γινόμενα θέλουν εἶναι εἰς ἀναλογίαν.

Ἔστωσαν π, χ. αἱ τρεῖς ἀναλογίαι

$$3 : 8 :: 12 : 32$$
$$7 : 15 :: 28 : 60$$
$$40 : 12 :: 50 : 15.$$

Ἕπεται ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ των, ὅτι δύνανται νὰ τεθῶσιν ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$\frac{3}{8}=\frac{12}{32}$$
$$\frac{7}{15}=\frac{28}{60}$$
$$\frac{40}{12}=\frac{50}{15}$$

Ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὰς ἰσότητας μέλος ἐπὶ μέλος, θέλουν προκύψει ἀναγκαίως γινόμενα ἴσα. Ἀλλ' ἐκτελοῦντες τὴν ἐργασίαν κατὰ τὸν κανόνα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν κλασμάτων (ὅρα ἀριθμ. 56) ἔχομεν,

$$\frac{3\times7\times40}{8\times15\times12}=\frac{12\times28\times50}{32\times60\times15}.$$

Λοιπὸν 3×7×40 : 8×15×12 :: 12×28×50 : 32×60×15· ἢ ἐκτελοῦντες τὰς πράξεις 840 : 1440 :: 16800 : 28800, ἀναλογία, τὴν ὁποίαν μ' εὐκολίαν δυνάμεθα νὰ βεβαιώσωμεν· ἐπειδὴ διαιροῦντες τοὺς δύο τελευταίους ὅρους διὰ τοῦ 100, καὶ μετὰ ταῦτα διὰ τοῦ 2 εὑρίσκομεν

840 : 1440 :: 840 : 1440,

ἀναλογία φανερὰ (ἡ ὁποία καλεῖται ἀναλογία ταυτοσήμαντος).

Σ. Κ. Πρέπει νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι, κατὰ τὴν φύσιν τῶν πράξεων, τὰς ὁποίας ἐκτελέσαμεν, ὁ σταθερὸς λόγος τῆς ἀνωτέρω ἀναλογίας, τουτέστι $\frac{840}{1440}$, εἶναι ἴσος μὲ τὸ γινόμενον τῶν τριῶν σταθερῶν λόγων τῶν δεδομένων ἀναλογιῶν. Οὕτως οἱ τρεῖς σταθεροὶ λόγοι μὲ τὸ νὰ ἦναι, καθὼς δυνάμεθα νὰ βεβαιωθῶμεν, $\frac{3}{8}$, $\frac{7}{15}$, $\frac{10}{3}$, ἔχουν γινόμενον, $\frac{210}{360}$, ἤ, ἐξαλείφοντες τὸν κοινὸν παράγοντα 30 εἰς τοὺς δύο ὅρους, $\frac{7}{12}$, ἐξαγόμενον εἰς τὸ ὁποῖον τὸ κλάσμα $\frac{840}{1440}$ δύναται νὰ ἀχθῇ διὰ τῆς ἐκθλίψεως τοῦ κοινοῦ παράγοντος 120.

Οὗτος ὁ λόγος $\frac{7}{12}$, ὅςτις προέρχεται ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ πολλῶν ἄλλων λόγων, καλεῖται ἀπὸ τοὺς ἀριθμητικοὺς, λόγος σύνθετος.

Ἡ πρᾶξις, διὰ τῆς ὁποίας γίνεται ἡ ἀνωτέρω ἰδιότης, καλεῖται πρᾶξις τοῦ συνθέτειν.

§. 216. Συνέπειαι ταύτης τῆς ἰδιότητος. 1ον. Ὅταν τέσσαρες ἀριθμοὶ ἦναι ἀνάλογοι, τὰ τετράγωνα, οἱ κύβοι, καὶ ἐν γένει αἱ ὅμοιαι δυνάμεις αὐτῶν εἶναι παρομοίως ἀνάλογοι.

Διὰ νὰ τὸ ἀποδείξωμεν, ἀρκεῖ νὰ παρατηρήσωμεν, ὅτι ἐὰν ἡ ἀναλογία ἤθελε γραφθῆ ὑφ' ἑαυτὴν ἕνα τινὰ ἀριθμὸν φορῶν, ἠθέλαμεν ἔχει σειρὰν ἀναλογιῶν, αἱ ὁποῖαι πολλαπλασιαζόμεναι κατὰ τάξιν, δίδουσι γινόμενα ἀνάλογα κατὰ τὴν ἀνωτέρω ἰδιότητα.

2ον. Ἀντιστρόφως, ὅταν τέσσαρες ἀριθμοὶ ἦναι ἀνάλογοι, αἱ τετραγωνικαὶ ῥίζαι καὶ κυβικαὶ, αἱ τέταρται κ. τ. λ. τῶν τοιούτων ἀριθμῶν εἶναι ἀνάλογοι.

Ἔστω ἡ ἀναλογία $\alpha : \beta :: \gamma : \delta$ ἢ $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$.

Ἐπειδὴ οἱ δύο λόγοι $\frac{\alpha}{\beta}$, $\frac{\gamma}{\delta}$ εἶναι ἴσοι, αἱ τετραγωνικαὶ ῥίζαι τῶν τοιούτων λόγων εἶναι καὶ αὐταὶ ἴσαι, καὶ ἔχομεν $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} = \sqrt{\frac{\gamma}{\delta}}$.

Ἀλλὰ διὰ νὰ ἐξάξωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν ἑνὸς κλάσματος, πρέπει (ἀριθμ. 190) νὰ ἐξάξωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ ἀριθμητοῦ, καὶ ἐκείνην τοῦ παρονομαστοῦ, καὶ διὰ τοῦτο ἔχομεν $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} =$

$\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}$, $\sqrt{\frac{\gamma}{\delta}}=\frac{\sqrt{\gamma}}{\sqrt{\delta}}$. Λοιπὸν $\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}=\frac{\sqrt{\gamma}}{\sqrt{\delta}}$, ἢ $\sqrt{\alpha}$: $\sqrt{\beta}$ :: $\sqrt{\gamma}$: $\sqrt{\delta}$.

Ὁ συλλογισμὸς εἶναι ὁ αὐτὸς, καὶ διὰ τὰς κυβικὰς ῥίζας, ἢ δι' ὁποιασδήποτε βαθμοῦ ῥίζας, κατὰ ταύτην τὴν γενικὴν ἀρχὴν ὅτι „διὰ νὰ ἐξάξωμεν ῥίζαν τινὰ ὁποιουδήποτε βαθμοῦ ἑνὸς κλάσματος, πρέπει νὰ ἐξάξωμεν τὴν ῥίζαν τοῦ ἀριθμητοῦ καὶ τὴν τοῦ παρονομαστοῦ."

§. 217. Παρατήρησις. Ὅταν οἱ ἀριθμοὶ α, β, γ, δ, δὲν ἦναι τέλεια τετράγωνα, αἱ ποσότητες, $\sqrt{\alpha}$, $\sqrt{\beta}$, $\sqrt{\gamma}$, $\sqrt{\delta}$ εἶναι ἀριθμοὶ ἄλογοι, καὶ ἡ ἄνω ἀναλογία ὑπάρχει ἀκόμη μεταξὺ ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν· τουτέστι θεωροῦμεν λόγους μεταξὺ ἀσυμμέτρων ποσοτήτων, λόγους, τοὺς ὁποίους ἔπρεπε διὰ τὸν αὐτὸν λόγον νὰ τοὺς στοχασθῶμεν ὡς ἀλόγους· καὶ τώρα ζητοῦμεν νὰ μάθωμεν, ἐὰν ἦναι δυνατὸν νὰ ἐφαρμόσωμεν εἰς τὰς ἀναλογίας τοῦ τοιούτου εἴδους ὅλας τὰς ἰδιότητας, τὰς ὁποίας πρότερον ἐσυστήσαμεν.

Ἡ ἀπόκρισις εἶναι καταφατικὴ, ἐὰν ἀνακαλέσωμεν εἰς τὴν μνήμην μας τὰ ὅσα εἴπομεν (εἰς τὸν ἀριθμὸν 190), ὅτι ἀλογόςτις ἀριθμὸς δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἴσος μὲ ἀκριβῆ κλασματικὸν ἀριθμὸν μὴ διαφέροντα τοῦ δεδομένου ἀριθμοῦ, εἰμὴ κατὰ ποσότητα τόσον μικρὰν, ὥστε νὰ μὴ προξενῇ κἂνὲν ἀξιοθεώρητον σφάλμα διὰ τὴν παράβλεψίν της, καὶ τότε θεωροῦμεν τοὺς συσταθέντας λόγους μεταξὺ τῶν συμμετρικῶν ἀριθμῶν, εἰσαγομένων ἀντὶ τῶν ἀλόγων ποσοτήτων.

Ὅσον δὲ διὰ τοὺς λόγους μεταξὺ κλασματικῶν ἀκριβῶν ἀριθμῶν, μὲ εὐκολίαν γνωρίζομεν κατὰ τὸν κανόνα τῆς διαιρέσεως τῶν κλασμάτων, ὅτι δυνάμεθα νὰ ἀντεισάξωμεν δι' αὐτοὺς λόγους ἀκεραίων ἀριθμῶν.

Π. χ. ὁ λόγος τῶν $\frac{3}{7}$ πρὸς $\frac{5}{11}$ ἐπειδὴ εἶναι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τῶν $\frac{3}{7}$ διὰ $\frac{5}{11}$, εἶναι ἴσον (ἀριθμ. 59) μὲ $\frac{3}{7}\times\frac{11}{5}$ ἢ μὲ $\frac{33}{35}$, τουτέστι μὲ τὸν λόγον τοῦ 33 πρὸς 35.

Παρομοίως ὁ λόγος τῶν $\frac{7}{8}$ πρὸς $\frac{15}{23}$ εἶναι ἴσος μὲ $\frac{7}{8}\times\frac{23}{15}$ ἢ μὲ τὸν λόγον τοῦ 161 πρὸς τὸ 120. Οὕτως ὅλαι αἱ ἰδιότητες τῶν ἀναλογιῶν εἶναι ἀληθεῖς, ὁποῖοι καὶ ἂν ἦναι οἱ ἀριθμοὶ ἐπὶ τῶν ὁποίων συλλογιζόμεθα.

---

§. β. Περὶ τῆς Μεθόδου τῶν τριῶν, καὶ περὶ τῶν μεθόδων τῶν ἀπ' αὐτῆς ἐξαρτωμένων.

Περὶ τῆς Μεθόδου τῶν τριῶν.

§. 218. Εἰς τὴν ἀριθμητικὴν δίδουσι τὸ ὄνομα Μέθοδος τῶν τριῶν, εἰς τὴν πρᾶξιν, διὰ τῆς ὁποίας δοθέντων τριῶν ὅρων μιᾶς ἀναλογίας, προσδιορίζομεν

τὴν τιμὴν τοῦ ἀγνώστου ὅρου. Ἐκθέσαμεν (ἀριθμ. 209) τὸν τρόπον τοῦ προσδιορίζειν τὸν τέταρτον τοῦτον ὅρον. Οὕτως διὰ νὰ λύσωμεν ζήτημά τι ἐξαρτώμενον ἐκ τῆς μεθόδου τῶν τριῶν, πρέπει νὰ σχηματίσωμεν τὴν ἀναλογίαν, τὴν ὁποίαν μᾶς δίδει ἡ ἔκφρασις τοῦ ζητήματος. Τὰ ἀκόλουθα παραδείγματα θέλουν διασαφήσει τὸ πρᾶγμα.

Πρῶτον παράδειγμα. Ζητεῖται ἡ τιμὴ 384 χιλιογράμμων μιᾶς πραγματείας, ὑποτιθεμένου, ὅτι 25 χιλιόγραμμα τῆς ἰδίας πραγματείας τιμῶνται μὲ 650φρ.

Ἀνάλυσις τοῦ προβλήματος. Ἐπειδὴ 25χιλ. ἀξίζουσι 650φρ. εἶναι φανερὸν, ὅτι 2, 3, 4.... φοραῖς τόσα χιλιόγραμμα πρέπει νὰ ἀξίζωσι 2, 3, 4...φοραῖς περισσότερον. Οὕτως ὑπάρχει ἐξ ἀνάγκης ἀναλογία μεταξὺ τῶν δύο ἀριθμῶν τῶν χιλιογράμμων καὶ τῆς τιμῆς των.

Λοιπὸν ἐὰν σημειώσωμεν διὰ x τὴν ἄγνωστον τιμὴν τῶν 384χιλ., θέλομεν ἔχει τὴν ἀναλογίαν· 25χιλ. : 384χιλ. :: 650φρ. : x.

Ἐκ τῆς ὁποίας (ἀριθμ. 209) $x=\frac{384\times650}{25}=\frac{249600}{25}=9984$, τουτέστι 9984 φράγκα εἶναι ἡ τιμὴ τῶν 384 χιλιογράμμων.

Σ. Κ. Εἰς τοῦτο τὸ παράδειγμα, ἐδυνάμεθα νὰ καταστήσωμεν ἁπλουστέραν τὴν πρᾶξιν, παρατηροῦντες ὅτι οἱ δύο ἡγούμενοι τῆς ἀνωτέρω ἀναλογίας εἶναι διαιρετοὶ διὰ τοῦ 25· δυνάμεθα λοιπὸν (ἀριθμ. 211) νὰ ἐξαλείψωμεν τὸν κοινὸν τοῦτον παράγοντα, καὶ οὕτως θέλομεν ἔχει.

$1 : 384 :: 26 : x$, καὶ διὰ τοῦτο $x=384\times26=9984$.

Ὁσάκις παῤῥησιάζεται αὕτη ἡ εὐκολία δὲν πρέπει νὰ τὴν ἀμελῶμεν.

Δεύτερον παράδειγμα. Ἐπλήρωσέτις $743^{\lambda i\beta.}$ $15^{\sigma o\lambda.}$ $8^{\delta\eta\nu.}$ διὰ $43^{\acute{o}\rho.}$ $5^{\pi o\delta.}$ $4^{\delta\alpha\varkappa.}$ ἑνός τινος τεχνήματος. Ζητεῖται πόσον πρέπει νὰ πληρώσῃ διὰ $77^{\acute{o}\rho.}$ $3^{\pi o\delta.}$ $8^{\delta\alpha\varkappa.}$ τοῦ αὐτοῦ τεχνήματος.

Εἶναι φανερὸν, ὅτι ὑπάρχει ἀκόμη ἀναλογία μεταξὺ τῶν δύο κλασματικῶν ἀριθμῶν τῶν ὀργυιῶν, καὶ μεταξὺ τῆς τιμῆς τῶν δύο ἀριθμῶν.

Ἔστω λοιπὸν χ ἡ ζητουμένη τιμή· ὅθεν ἔχομεν τὴν ἀναλογίαν

$$43^{\acute{o}\rho.}\ 5^{\pi o\delta.}\ 4^{\delta\alpha\varkappa.} : 77^{\acute{o}\rho.}\ 3^{\pi o\delta.}\ 8^{\delta\alpha\varkappa.} :: 743^{\lambda i\beta.}\ 15^{\sigma o\lambda.}\ 8^{\delta\eta\nu.} : \chi.$$

Δυνάμεθα κατὰ τοὺς συσταθέντας κανόνας τοῦ ὑπολογισμοῦ τῶν συμμιγῶν ἀριθμῶν, νὰ σχηματίσωμεν τὸ γινόμενον τῶν δύο μέσων, καὶ νὰ διαιρέσωμεν τὸ γινόμενον διὰ τοῦ γνωστοῦ ἄκρου· ἀλλὰ συντέμνομεν ἐπαισθητῶς τὸν ὑπολογισμὸν, ἄγοντες τοὺς δύο πρώτους ὅρους, οἵτινες ἐκφράζουσι μονάδας τῆς ἰδίας φύσεως, εἰς τὰς ὑποδιαιρέσεις τοῦ πλέον μικροῦ εἴδους, τὸ ὁποῖον οἱ δύο ἀριθμοὶ περιέχουσι, δηλαδὴ εἰς δακτύλους, καὶ οὕτω λαμβάνομεν τὴν νέαν ἀναἀναλογίαν,

$$3160^{\delta.} : 5588^{\delta.} :: 744^{\lambda i\beta.},\ 15^{\sigma o\lambda.}\ 8^{\delta\eta\nu.} : \chi.$$

Ἢ ἐξαλείφοντες τὸν κοινὸν παράγοντα 4 τῶν δύο πρώτων ὅρων,

$$790 : 1397 :: 743^{\lambda.}\ 15^{\sigma.}\ 8^{\delta.} : \chi.$$

Οὕτως ἔχομεν νὰ ἐκτελέσωμεν πολλασιασμὸν συμμιγοῦς ἀριθμοῦ δι' ἀκεραίου, καὶ νὰ διαιρέσωμεν τὸ προκύπτον γινόμενον δι' ἄλλου ἀκεραίου ἀριθμοῦ· ἡ ὁποία πρᾶξις εἶναι εὐκολωτέρα.

Κατὰ πρῶτον τὸ γινόμενον τῶν $743^{\lambda i\beta.}$ $15^{\sigma o\lambda.}$ $8^{\delta\eta\nu.}$ ἐπὶ 1397 εἶναι ἴσον μὲ $1039065^{\lambda i\beta.}$ $6^{\sigma o\lambda.}$ $4^{\delta\eta\nu.}$

Διαιροῦντες τοῦτο τὸ γινόμενον διὰ 790 εὑρίσκομεν τέλος πάντων πηλίκον $1315^{\lambda/\beta.}$ $5^{\sigma o\lambda.}$ $5^{\delta\eta\nu.}$ $\frac{326}{790}$ ἢ $\frac{163}{395}$.

Τοῦτο τὸ παράδειγμα εἶναι τὸ μόνον, τὸ ὁποῖον προτείνομεν ἐπὶ τῶν συμμιγῶν ἀριθμῶν, ἐπειδὴ μετὰ τὴν σύστασιν τοῦ νέου συστήματος τῶν βαρέων καὶ μέτρων, ἔχομεν νὰ θεωρήσωμεν ἀναλογίας μεταξὺ ἀκεραίων ἀριθμῶν, ἢ μεταξὺ κλασματικῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν. Ἀρκεῖ νὰ μὴ λησμονήσωμεν, ὅτι εἰς τὰ παραδείγματα τούτου τοῦ εἴδους εἶναι ἐν γένει πλέον εὔκολον νὰ ἄξωμεν τοὺς δύο πρώτους ὅρους τῆς ἀναλογίας (οἱ ὁποῖοι εἶναι πάντοτε τῆς ἰδίας φύσεως) εἰς μονάδας τῆς πλέον μικροτέρας ὑποδιαιρέσεως, τὴν ὁποίαν περιέχουν οἱ δύο ἀριθμοί.

Τρίτον παράδειγμα. Ἐχρειάσθησαν ἡμέραι 20 εἰς 135 ἀνθρώπους διὰ νὰ κάμουν μίαν τινὰ ἐργασίαν. Ζητεῖται πόσαι ἡμέραι χρειάζονται εἰς 300 ἀνθρώπους, διὰ νὰ κάμουν τὴν αὐτὴν ἐργασίαν;

Ἀνάλυσις. Ἐὰν ἀριθμός τις ἀνθρώπων χρειάζεται 20 ἡμέρας διὰ νὰ κάμῃ ἓν ἔργον, εἶναι φανερὸν, ὅτι εἷς ἀριθμὸς ἀνθρώπων 2, 3, 4 . . . φοραῖς μεγαλήτερος, πρέπει νὰ δαπανήσῃ 2, 3, 4 . . . φοραῖς ὀλιγώτερον καιρὸν, θεωρουμένων ὅλων τῶν ἄλλων ἐξ ἴσου. Λοιπὸν τόσαις φοραῖς ὁ πρῶτος ἀριθμὸς τῶν 135 ἀνθρώπων περιέχεται εἰς τὸν δεύτερον 300, ὅσαις φοραῖς ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀναγκαίων ἡμερῶν εἰς τὸν δεύτερον ἀριθμὸν τῶν ἀνθρώπων, τουτέστιν ὁ ζητούμενος x θέλει περιέχεται εἰς τὸν ἀριθμὸν τῶν ἀναγκαίων ἡμερῶν εἰς τὸν πρῶτον ἀριθμὸν τῶν ἀνθρώπων.

Οὕτως ἔχομεν τὴν ἀναλογίαν. $135^{\dot{\alpha}\nu\vartheta.} : 300^{\dot{\alpha}\nu\vartheta.} :: x^{\dot{\eta}\mu.} : 20^{\dot{\eta}\mu.}$

Καὶ θέτοντες τὰ μέσα εἰς τὴν θέσιν τῶν ἄκρων, διὰ νὰ ἔχωμεν τὸ χ τελευταῖον ὅρον 300 : 135 : : 20 : χ, ἐκ τῆς ὁποίας συνάγομεν $\chi = \frac{135 \times 20}{300} = \frac{2700}{300} =$ 9ἡμ. (δυνάμεθα νὰ ἐξαλείψωμεν ἀπὸ τὴν ἀναλογίαν 1ον. τὸν κοινὸν παράγοντα τῶν δύο πρώτων ὅρων, ὅστις εἶναι τὸ 15· 2ον. τὸν κοινὸν παράγοντα 20 τῶν δύό ἡγουμένων, ὥστε συνάγομεν τὴν ἀναλογίαν 1 : 9 : : 1 : χ ἢ χ=9).

§. 219. Παρατήρησις περὶ τῶν εὐθέων καὶ ἀντιπεπονθότων λόγων.

Ἐδῶ πρέπει νὰ διατρίψωσι πολὺ οἱ ἀρχάριοι, διὰ νὰ καταλάβουν ὀνομασίας τινὰς, τὰς ὁποίας οἱ Μαθηματικοὶ μεταχειρίζονται πολλάκις.

Ἐν γένει, τὰ ζητήματα τὰ ὁποῖα ἐξαρτῶνται ἀπὸ ἁπλῆν μέθοδον τῶν τριῶν, περικλείουσιν εἰς τὴν ἔκφρασίν των τέσσαρας ἀριθμοὺς, ἐκ τῶν ὁποίων οἱ δύο εἶναι ἑνὸς εἴδους, καὶ οἱ δύο ἄλλοι ἄλλου εἴδους, ἐκ τῶν ὁποίων ὁ ἕνας εἶναι ὁ ἄγνωστος ἀριθμός· προσέτι ἕκαστος ὅρος τοῦ δευτέρου εἴδους συνδέεται διὰ τῆς ἐκφράσεως μὲ ἕνα τῶν ὅρων τοῦ πρώτου εἴδους.

Οὕτως εἰς τὸ ἀνωτέρω πρῶτον παράδειγμα δύο τῶν τεσσάρων ἀριθμῶν ἐκφράζουσι βάρος, ἐνῷ οἱ δύο ἄλλοι ἐκφράζουσι τὰς ἀμοιβαίας τιμὰς τοῦ βάρους. Ἡ τιμὴ τοῦ πρώτου βάρους λοιπὸν εἶναι προσκολλημένη μὲ τοῦτο τὸ βάρος, καὶ δύναται δι' αὐτὸν τὸν λόγον νὰ ὀνομασθῇ ὅρος τοῦ δευτέρου εἴδους ἀντικειμένου εἰς τὸ πρῶτον βάρος· Παρομοίως ἡ τιμὴ τοῦ δευτέρου βάρους εἶναι ὁ ὅρος τοῦ δευτέρου εἴδους, ἀντικειμένου εἰς τὸ δεύτερον βάρος.

Εἰς τὸ δεύτερον παράδειγμα, δύο τῶν τεσσάρων ἀριθμῶν ἐκφράζουσι μήκη, καὶ οἱ δύο ἄλλοι εἶναι ἀκόμη

αἱ τιμαὶ τῶν μηκῶν. Ἑκάστη τῶν δύο τιμῶν καλεῖται ὅρος τοῦ δευτέρου εἴδους, ἀντικείμενος εἰς τὸ ἐκτιμώμενον μῆκος διὰ ταύτης τῆς τιμῆς.

Τέλος πάντων εἰς τὸ τρίτον παράδειγμα θεωροῦμεν δύο ἀριθμοὺς ἀνθρώπων, καὶ δύο ἀριθμοὺς ἡμερῶν, τὰς ὁποίας μετεχειρίσθη ὁ ἀριθμὸς οὗτος τῶν ἀνθρώπων διὰ νὰ κάμῃ ἓν ἔργον· ὁ δὲ ἀριθμὸς τῶν ἡμερῶν, τὰς ὁποίας μετεχειρίσθη ὁ πρῶτος ἀριθμὸς τῶν ἀνθρώπων καλεῖται ὁ ἀντικείμενος εἰς τοῦτον τὸν ἀριθμὸν τῶν ἀνθρώπων· καὶ ὁ δεύτερος ἀριθμὸς τῶν ἡμερῶν καλεῖται ἀντικείμενος εἰς τὸν δεύτερον ἀριθμὸν τῶν ἀνθρώπων.

Τούτου τεθέντος, λέγεται ὅτι ὑπάρχει εὐθεῖα σχέσις μεταξὺ τῶν δύο ἀριθμῶν τοῦ πρώτου εἴδους, καὶ τῶν ἀριθμῶν τοῦ δευτέρου, ἢ ὅτι οἱ δύο ἀριθμοὶ τοῦ πρώτου εἴδους εἶναι κατ' εὐθεῖαν ἀνάλογοι μὲ τοὺς ἀντικειμένους των τοῦ δευτέρου, ὅταν εἷς τῶν ἀριθμῶν τοῦ πρώτου εἴδους, καὶ ὁ ἀντικείμενος τοῦ δευτέρου εἴδους μέλλουν νὰ σχηματίσωσι τοὺς δύο ἡγουμένους τῆς ἀναλογίας, ἐνῷ ὁ ἄλλος ὅρος τοῦ πρώτου εἴδους, καὶ ὁ ἀντικείμενος τοῦ δευτέρου εἴδους μέλλουν νὰ σχηματίσωσι τοὺς δύο ἑπομένους· τουτέστιν ὅταν εἷς ὅρος τοῦ πρώτου εἴδους, καὶ ὁ ἀντικείμενος τοῦ δευτέρου μέλλουν νὰ σχηματίσωσιν ἓν ἄκρον καὶ ἓν μέσον εἰς τὴν ἀναλογίαν, καὶ ὅταν ὁ ἄλλος ὅρος τοῦ πρώτου εἴδους καὶ ὁ ἀτικείμενός του, μέλλουν νὰ σχηματίσουν ἓν μέσον καὶ ἓν ἄκρον.

Ἐξ ἐναντίας θέλομεν ἔχει ἀντιπεπονθυῖαν σχέσιν μεταξὺ τῶν τεσσάρων ἀριθμῶν, ἢ οἱ δύο ὅροι τοῦ πρώτου εἴδους καλοῦνται ἀμοιβαίως ἢ ἀντιστρόφως ἀνάλογοι εἰς τοὺς ἀντικειμένους των, ὅταν εἷς τῶν ὅρων τοῦ πρώτου εἴδους καὶ ὁ ἀντικείμενός του μέλλουν νὰ σχηματίσουν τὰ δύο μέσα.

Ἐπαναλαμβάνοντες τὰς ἀναλογίας τῶν ἀνωτέρω τριῶν παραδειγμάτων, μὲ εὐκολίαν βλέπομεν, ὅτι εἰς τὰς δύο πρώτας ὑπάρχει εὐθεῖα σχέσις μεταξὺ τῶν τεσσάρων ἀριθμῶν, τουτέστι τὰ δύο βάρη ἢ τὰ δύο μήκη εἶναι κατ' εὐθεῖαν ἀνάλογα μὲ τὰς δύο τιμάς. Ἀλλὰ εἰς τὴν τρίτην ὑπάρχει ἀντιπεπονθυῖα σχέσις, ἢ οἱ δύο ἀριθμοὶ τῶν ἀνθρώπων εἶναι ἀντιστρόφως ἢ ἀμοιβαίως ἀνάλογοι μὲ τοὺς δύο ἀριθμοὺς τῶν ἡμερῶν.

Ἑπομένως ἡ ἀνάλυσις ἑνὸς προβλήματος μᾶς κάμνει πάντοτε νὰ γνωρίσωμεν, ἐὰν ὑπάρχῃ εὐθεῖα ἢ ἀντιπεπονθυῖα σχέσις· ἀρκεῖ νὰ ἠξεύρωμεν, ἐὰν ἑνὸς μεγέθους τοῦ πρώτου εἴδους αὐξανομένου ἢ ἐλαττουμένου, τὸ ἀντικείμενόν του αὐξάνει ἢ ἐλαττοῦται, ἢ ἐὰν ἐξ ἐναντίας ἑνὸς μεγέθους τοῦ πρώτου εἴδους αὐξανομένου ἢ ἐλαττουμένου, τὸ ἀντικείμενόν του πρέπει νὰ ἐλαττοῦται ἢ νὰ αὐξάνεται.

Εἰς τὴν πρώτην περίστασιν ἔχομεν εὐθεῖαν σχέσιν, ἢ οἱ δύο ἀριθμοὶ τοῦ πρώτου εἴδους εἶναι κατ' εὐθεῖαν ἀνάλογοι εἰς τοὺς ἀντικειμένους των.

Εἰς τὴν δευτέραν ἔχομεν ἀντιπεπονθυῖαν σχέσιν, τουτέστιν οἱ δύο ἀριθμοὶ τοῦ πρώτου εἴδους εἶναι ἀμοιβαίως ἀνάλογοι εἰς τοὺς ἀντικειμένους των. Λέγεται προσέτι εἰς τὴν πρώτην περίστασιν, ὅτι ἕκαστον μέγεθος τοῦ πρώτου εἴδους εἶναι εἰς εὐθὺν λόγον τοῦ ἀντικειμένου του, καὶ εἰς τὴν δευτέραν, ὅτι εἶναι εἰς ἀντιπεπονθότα λόγον τοῦ ἀντικειμένου του.

Π. χ. Ἡ τιμὴ μιᾶς πραγματείας εἶναι εἰς εὐθὺν λόγον τοῦ ἀριθμοῦ τῶν μονάδων ταύτης τῆς πραγματείας, ἐπειδὴ ὅσας περισσοτέρας μονάδας ἔχει αὕτη ἡ πραγματεία, τόσον περισσότερον πρέπει νὰ πληρώσωμεν διὰ τὸν ἀριθμὸν τῶν μονάδων της· ἐξ ἐναντίας ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀναγκαίων ἡμερῶν εἰς ἀριθμὸν τινὰ ἀν-

θρώπων διὰ νὰ κάμωσιν ἓν ἔργον, εἶναι εἰς ἀντιπεπονθότα λόγον τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἀνθρώπων, ἐπειδὴ ὅσον περισσότεροι ἄνθρωποι κάμνουσι τὸ αὐτὸ ἔργον, τόσον ὀλιγώτεραι ἡμέραι χρειάζονται.

§. 220. Αὐτὰς τὰς διαφόρους φράσεις συχνὰ μεταχειρίζονται οἱ Μαθηματικοί· οὕτως ὁμιλοῦντες διὰ δύο κλάσματα, τὰ ὁποῖα ἔχουσι τὸν αὐτὸν παρονομαστήν, λέγουσιν, ὅτι αὐτὰ εἶναι εἰς εὐθὺν λόγον τῶν ἀριθμητῶν των· καὶ δύο κλάσματα, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὸν αὐτὸν ἀριθμητὴν, εἶναι εἰς ἀντιπεπονθότα λόγον τῶν παρονομαστῶν των.

Διὰ νὰ ἐξηγήσωμεν ταύτας τὰς δύο ἐκφράσεις, ἄς θεωρήσωμεν κατὰ πρῶτον τὰ δύο κλάσματα $\frac{7}{12}$, $\frac{11}{12}$, τὰ ὁποῖα ἔχουσι τὸν αὐτὸν παρονομαστήν.

Ἔχομεν φανερὰ τὴν ἀναλογίαν $\frac{7}{12} : \frac{11}{12} :: 7 : 11$, εἰς τὴν ὁποίαν ὁ δεύτερος λόγος εἶναι ὁ πρῶτος, τοῦ ὁποίου οἱ δύο ὅροι ἐπολλαπλασιάσθησαν ἐπὶ 12.

Ἤδη τὸ κλάσμα $\frac{7}{12}$ καὶ ὁ ἀριθμητὴς 7, ὅς τις εἰς αὐτὰ ἀνταποκρίνεται, σχηματίζουσι τοὺς δύο ἡγουμένους, ἐνῷ τὸ κλάσμα $\frac{11}{12}$, καὶ ὁ ἀριθμητὴς 11 ὁ εἰς αὐτὸ ἀνταποκρινόμενος σχηματίζουσι τοὺς δύο ἑπομένους· οὕτως τὰ δύο κλάσματα εἶναι κατ᾽ εὐθὺν λόγον ἀνάλογα τοῦ ἀριθμητοῦ των.

Ἔστωσαν τώρα τὰ κλάσματα $\frac{15}{23}$, $\frac{15}{36}$, τὰ ὁποῖα ἔχουσι τὸν αὐτὸν ἀριθμητήν. Ἔχομεν κατὰ πρῶ-

του την αναλογίαν $\frac{15}{23}:\frac{15}{36}::\frac{1}{23}:\frac{1}{36}$, εἰς τὴν ὁποίαν ὁ δεύτερος λόγος εἶναι ὁ πρῶτος, τοῦ ὁποίου οἱ δύο ὅροι ἐδιαιρέθησαν διὰ τοῦ 15.

Ἀλλ' ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τοὺς δύο ὅρους τοῦ δευτέρου λόγου ταύτης τῆς ἀναλογίας ἐπὶ 23×36, εὑρίσκομεν μετὰ τὴν ἀναγωγὴν

$$\frac{15}{23}:\frac{15}{36}::36:23.$$

Ἤδη τὸ πρῶτον κλάσμα $\frac{15}{23}$ καὶ ὁ παρονομαστής του 23 σχηματίζουν τὰ ἄκρα μιᾶς ἀναλογίας, τῆς ὁποίας τὸ δεύτερον κλάσμα $\frac{15}{36}$ καὶ ὁ παρονομαστὴς 36 σχηματίζουν τὰ μέσα, καὶ διὰ τοῦτο τὰ δύο κλάσματα εἶναι ἀμοιβαίως ἀνάλογα εἰς τοὺς παρονομαστάς των, ἢ αὐτὰ εἶναι εἰς ἀντιπεπονθότα λόγον τῶν παρονομαστῶν των.

Εἴδομεν ἀκόμη (ἀριθμ. 42), ὅτι τὸ κλάσμα εἶναι τόσον μεγαλήτερον, ὅσον ὁ ἀριθμητής του εἶναι μεγαλήτερος, τοῦ παρονομαστοῦ μένοντος πάντοτε τοῦ αὐτοῦ· καὶ ὅτι ἐξ ἐναντίας αὐτὸ εἶναι τόσον μικρότερον, ὅσον ὁ παρονομαστής του εἶναι μεγαλήτερος, τοῦ ἀριθμητοῦ μένοντος πάντοτε τοῦ αὐτοῦ.

Ἐστοχάσθημεν καλὸν νὰ ἐκτανθῶμεν ὀλίγον περισσότερον εἰς ταύτας τὰς ἀρχάς, ἐπειδὴ ἐπαρατηρήσαμεν, ὅτι ἡ νεολαία διὰ τὴν ἄγνοιαν αὐτῶν ἀπατᾶται συχνὰ εἰς τὴν λύσιν τῶν ζητημάτων, ὅσα ἀποβλέπουν τὰς ἀναλογίας.

§. 221. Εἶναι συνήθεια, ὅταν θέλωμεν νὰ λύσωμεν κἀνὲν ζήτημα ἐξαρτώμενον ἐκ τῆς μεθόδου

τῶν τριῶν, νὰ βάλλωμεν εἰς τὸν τελευταῖον ὅρον τῆς ἀναλογίας τὸν ἄγνωστον ὅρον.

Διὰ νὰ γίνῃ πλήρης αὕτη ἡ συνθήκη ἀρχίζομεν νὰ γράφωμεν τὸν λόγον τῶν δύο ὅρων τοῦ εἴδους, ὁ εἷς τῶν ὁποίων παριστάνει τὴν ἄγνωστον· μετὰ ταῦτα ἀφ' οὗ γνωρίσωμεν διὰ τῆς ἀναλύσεως τοῦ προβλήματος, ἂν ἡ σχέσις μεταξὺ τῶν τεσσάρων ἀριθμῶν εἶναι εὐθεῖα ἢ ἀντιπεπονθυῖα, θέτομεν τὸν ἄλλον λόγον εἰς τὰ ἀριστερὰ τούτου, εἰς τρόπον ὥστε ὁ ὅρος τοῦ ὁποίου τὸ χ εἶναι ὁ ἀντικείμενος, νὰ εἶναι ὁ πρῶτος μεσαῖος, ἢ ὁ πρῶτος τῶν ἄκρων, καθὼς ἡ σχέσις εἶναι εὐθεῖα ἢ πλαγία (ὅρα ἀριθμ. 219).

Τέταρτον παράδειγμα. Ὑποθέτομεν, ὅτι 45 ἐργάται ἔκαμαν 280 μέτρα οἰκοδομῆς, καὶ ζητεῖται πόσον 76 ἐργάται θέλουν κάμει ἀπὸ τὸ αὐτὸ ἔργον εἰς τὸν αὐτὸν καιρόν.

Ἔστω χ ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς τῶν μέτρων. Γράφομεν κατὰ πρῶτον τὸν λόγον 280 : χ· μετὰ ταῦτα παρατηροῦμεν, ὅτι ὅσον περισσότεροι ἄνθρωποι εἶναι, τόσον περισσότερον ἔργον κάμνουσιν. Ἡ σχέσις λοιπὸν εἶναι εὐθεῖα· λοιπὸν ἐπειδὴ χ εἶναι ἑπόμενος ἢ ἄκρος, ὁ ἀντικείμενος τοῦ 76 πρέπει νὰ ἦναι ὁ πρῶτος ἑπόμενος, ἢ τὸ πρῶτον ἄκρον, καὶ οὕτως, ἔχομεν· 45 : 76 :: 280 : χ, ἐκ τῆς ὁποίας ἔχομεν

$$\chi = \frac{280 \times 76}{45} = 472^{\mu\acute{\varepsilon}\tau.},\ 89,\ \mu\varepsilon\tilde{\iota}o\nu\ 0{,}01.$$

Πέμπτον παράδειγμα. Δι' ἀποσκευὴν πλοίου εὑρίσκονται μόνον 20 ἡμερῶν ζωοτροφίαι, ἐν ᾧ πρέπει τὸ πλοῖον νὰ μείνῃ εἰς τὴν θάλασσαν 35 ἡμέρας. Ζητεῖται πόσον πρέπει νὰ ὀλιγοστευθῇ τὸ σιτηρέσιον ἑκάστου ἀνθρώπου τὴν ἡμέραν.

Ἀνάλυσις. Ἔστω 1 τὸ σιτηρέσιον ἑκάστου ἀνθρώπου, καὶ χ ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ τοῦ δο-

θῇ διὰ τὴν ἀνάγκην, εἰς τὴν ὁποίαν εὑρίσκεται ἡ ἀποσκευή. Εἶναι φανερὸν, ὅτι τὸ νέον σιτηρέσιον πρέπει νὰ ἦναι τόσον μικρότερον σχετικῶς πρὸς τὸ πρῶτον, ὅσον ὁ ἀριθμὸς τῶν ἡμερῶν, εἰς τὰς ὁποίας τὸ πλοῖον μένει εἰς τὴν θάλασσαν, εἶναι μεγαλήτερος. Οὕτως τὰ δύο σιτηρέσια εἶναι εἰς ἀντιπεπονθότα λόγον τῶν δύο ἀριθμῶν τῶν ἡμερῶν. Λοιπὸν, ἐὰν θέσωμεν τὸν λόγον . . . . $1 : x$, ὁ ἀριθμὸς 35, τοῦ ὁποίου τὸ x εἶναι ὁ ἀντικείμενος, πρέπει νὰ σχηματίσῃ τὸ πρῶτον ἄκρον, ἐπειδὴ x εἶναι τὸ δεύτερον, καὶ γράφομεν οὕτως.

$$35 : 20 :: 1 : x$$

Ὅθεν $x = \frac{20}{35} = \frac{4}{7}$· τουτέστι τὸ σιτηρέσιον ἑκάστου πρέπει νὰ φερθῇ εἰς $\frac{4}{7}$ τοῦ συνήθους σιτηρεσίου.

Ἄλλη λύσις. Δυνάμεθα νὰ φθάσωμεν εἰς τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον χωρὶς τὴν συνδρομὴν τῶν ἀναλογιῶν, καὶ μ' ἕνα τρόπον πλέον ἁπλούστερον.

Ἂς δεχθῶμεν πρὸς τὸ παρὸν, ὅτι ὑπάρχει ἓν μόνον τακτικὸν σιτηρέσιον δι' ἕκαστον, διὰ νὰ ἐξακολουθῇ τὸ ταξείδιον διὰ 35 ἡμέρας· τὸ σιτηρέσιον θέλει εὑρεθῇ εἰς $\frac{1}{35}$ διὰ κάθε ἡμέραν τοῦ κοινοῦ σιτηρεσίου· ἀλλ' ἐπειδὴ κατὰ τὴν ἔκφρασιν ἔχομεν 20 σιτηρέσια διὰ καθένα, ἕπεται, ὅτι τὸ παρὸν σιτηρέσιον ἑκάστου θέλει εἶναι $\frac{1}{35} \times 20$ ἢ $\frac{20}{35}$, τουτέστι $\frac{4}{7}$ τοῦ κοινοῦ σιτηρεσίου.

§. 222. Μέθοδος τῶν τριῶν σύνθετος. Ἕως ἐδῶ ἐλύσαμεν ζητήματα, τῶν ὁποίων ἡ

ἔκφρασις ἐπερίκλειε τέσσαρας μόνον ἀριθμούς. Ἰδοὺ τώρα ἄλλα πλέον συμπεπλεγμένα.

Ἕκτον παράδειγμα. 20 ἐργάται δαπανῶσι 18 ἡμέρας, διὰ νὰ κάμουν 500 μέτρα ἔργου. Ζητεῖται εἰς πόσας ἡμέρας 76 ἐργάται θέλουν κάμει 1265 μέτρα τοῦ αὐτοῦ ἔργου.

Ἀνάλυσις. Εἰς αὐτὴν τὴν ἔκφρασιν θεωροῦμεν τοὺς λόγους, τουτέστι τὸν λόγον τῶν δύο ἀριθμῶν τῶν ἐργατῶν, ἐκεῖνον τῶν δύο ἀριθμῶν τῶν ἡμερῶν, καὶ τὸν λόγον τῶν δύο ἔργων. Ἀλλὰ διὰ νὰ εὐκολύνωμεν τὸ ζήτημα, καὶ νὰ ἄξωμεν αὐτὸ εἰς τὰ προηγούμενα ζητήματα, ὑποθέτομεν κατὰ πρῶτον, ὅτι τὸ ἔργον, τὸ ὁποῖον θέλει γένει διὰ τοὺς δύο ἀριθμοὺς τῶν ἐργατῶν, εἶναι τὸ ἴδιον καὶ ἴσον μὲ τὰ πρῶτον 500 μέτρα· τότε τὸ ζήτημα τρέπεται εἰς τὸ ἀκόλουθον· 20 ἐργάται δαπανῶσι 18 ἡμέρας διὰ νὰ κάμουν 500 μέτρα ἑνὸς ἔργου. Πόσας ἡμέρας θέλουν μεταχειρισθῇ 76 ἐργάται διὰ νὰ κάμουν τὸ αὐτὸ ἔργον;

Ἐδῶ ἔχομεν ἀντιπεπονθότα λόγον μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν τῶν ἐργατῶν, καὶ μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν τῶν ἡμερῶν. Οὕτω σημειόνοντες διὰ x, ὄχι τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν τῶν ἡμερῶν κατὰ τὴν πρώτην ἔκφρασιν, ἀλλὰ τὸν ζητούμενον κατὰ τὴν νέαν ἔκφρασιν, ἔχομεν τὴν ἀναλογίαν . . . . $76 : 20 :: 18 : x$ . . . . (1).

Δυνάμεθα νὰ ἐξάξωμεν ἐκ ταύτης τῆς ἀναλογίας τὴν τιμὴν τοῦ x, ἀλλὰ τοῦτο εἶναι ἀνωφελές· ἀρκεῖ μόνον νὰ συλλογισθῶμεν ἐπὶ τοῦ x, ὡς νὰ ἦτον γνωστὸν ἐκ ταύτης τῆς ἀναλογίας. Παρατηροῦμεν τώρα, ὅτι x, μὲ τὸ νὰ ἦναι ὁ ἀριθμὸς τῶν ἡμερῶν τῶν ἀναγκαίων εἰς 76 ἐργάτας διὰ νὰ κάμουν τὰ 500 μέτρα ἄλλο δὲν λείπει, εἰμὴ νὰ γνωρίσωμεν πόσας

ἡμέραι χρειάζονται εἰς αὐτοὺς διὰ νὰ κάμουν τὰ 1265 μέτρα.

Τώρα ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐργατῶν μὲ τὸ νὰ ἦναι ὁ αὐτὸς, ὅσον περισσότερον ἔργον ἔχομεν, τόσον περισσοτέρας ἡμέρας θέλομεν· διὰ τοῦτο ὑπάρχει εὐθεῖα σχέσις· καὶ ἐὰν σημειώσωμεν διὰ x' (x πρῶτον ἢ τονούμενον) τὸν ἀριθμὸν τῶν ζητουμένων ἡμερῶν, (τὸ ὁποῖον θέλει εἶναι ἡ ἄγνωστος τῆς πρώτης ἐκφράσεως), ἔχομεν τὸν νέαν ἀναλογίαν,

$$500 : 1265 :: x : x' \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

(500 καὶ x σχηματίζουσιν ἄκρον καὶ μέσον, ἐπειδὴ ἡ σχέσις εἶναι εὐθεῖα)· Πολλαπλασιάζοντες τώρα ὅρον ἐπὶ ὅρον τὰς δύο ἀναλογίας (1) καὶ (2) λαμβάνομεν (ἀριθμ. 215)

$$76\times500 : 20\times1265 :: 18\times x : x\times x'.$$

Ἢ ἐξαλείφοντες τὸν κοινὸν παράγοντα x ἀπὸ τοὺς δύο ὅρους,

$$76\times500 : 20\times1265 :: 18 : x'.$$

Λοιπὸν $x' = \frac{20\times1265\times18}{76\times500} = 11^{\text{ἡμ.}}\frac{187}{190}$ ἢ 12 ἡμέρας σχεδόν.

Ἂς ἔλθωμεν τώρα εἰς παράδειγμα πλέον σύνθετον.

Ἕβδομον παράδειγμα. 500 ἄνθρωποι ἐργαζόμενοι 12 ὥρας καθ' ἡμέραν ἐδαπάνησαν 57 ἡμέρας εἰς τὸ νὰ σκάψωσιν ἓν αὐλάκιον 1800 μέτρων μήκους, 7 πλάτους καὶ 3 βάθους. Ζητεῖται εἰς πόσας ἡμέρας 860 ἄνθρωποι ἐργαζόμενοι 10 ὥρας τὴν κάθε ἡμέραν, θέλουν σκάψει ἄλλο αὐλάκιον 2900 μέτρων μήκους, 12 πλάτους καὶ 5 βάθους, εἰς γῆν 3 φοραῖς πλέον δύσκολον παρὰ τὴν πρώτην;

Ἰδοὺ ὁ πίναξ τοῦ ὑπολογισμοῦ, τοῦ ὁποίου ἔπειτα θέλομεν δώσει τὴν ἐξήγησιν.

$$860^{\text{ἀνδ.}} : 500^{\text{ἀνδ.}} :: 57^{\text{ἡμ.}} : x^{\text{ἡμ.}} \ldots\ldots (1)$$
$$10^{\text{ὥρ.}} : 12^{\text{ὥρ.}} :: x : x' \ldots\ldots (2)$$
$$1800^{\text{μετ.}} : 2900^{\text{μετ.}} :: x' : x'' \ldots\ldots (3)$$
$$7^{\text{πλ.}} : 12^{\text{πλ.}} :: x'' : x''' \ldots\ldots (4)$$
$$3^{\text{βαθ.}} : 5^{\text{βαθ.}} :: x''' : x'''' \ldots\ldots (5)$$
$$1^{\text{σκληρ.}} : 3^{\text{σκληρ.}} :: x'''' : x''''' \text{ ἢ } X \ldots (6).$$
$$860\times10\times1800\times7\times3\times1 : 500\times12\times2900\times12\times5\times3 \cdot\cdot 57 : X \ldots\ldots (7)$$
$$\text{ὅπου } X=\frac{500\times12\times2900\times12\times5\times3\times57}{860\times10\times1800\times7\times3\times1}=549^{\text{ἡμ.}}\ \frac{51}{301}.$$

Ἀνάλυσις. Διακρίνομεν εἰς τὴν ἀνωτέρω ἔκφρασιν δύο ἀρχικὰ μέρη· τὸ πρῶτον περιέχει τοὺς ἀριθμοὺς $500^{\text{ἀνδ.}}$, $12^{\text{ὥρ.}}$, $57^{\text{ἡμ.}}$, $1800^{\text{μετρ.μήκ.}}$, $7^{\text{μ.πλ.}}$, $3^{\text{σκλ.}}$, $1^{\text{σκλ.}}$· τὸ δεύτερον 860, 10, x, 2900, 12, 5, 3 (ἐπειδὴ ἡ γῆ εἶναι 3 φοραῖς πλέον δύσκολη εἰς τὸ νὰ σκαφθῇ παρὰ τὴν πρώτην, δυνάμεθα νὰ παῤῥησιάσωμεν τὴν σκληρότητα τῆς πρώτης γῆς διὰ 1, καὶ ἐκείνην τῆς δευτέρας διὰ 3, ὡς ἐδῶ φαίνεται).

Προσέτι ἐσημειώσαμεν διὰ X τὸν ἀριθμὸν τῶν ζητουμένων ἡμερῶν.

Τούτου τεθέντος, ἂς ὑποθέσωμεν κατὰ πρῶτον, ὅτι τὸ ἔργον, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ γένῃ ἀπὸ τοὺς δύο ἀριθμοὺς τῶν ἐργατῶν, εἶναι τὸ αὐτὸ, καὶ προσέτι ὅτι τόσον ὁ εἷς ἀριθμὸς, ὅσον καὶ ὁ ἄλλος τῶν ἐργατῶν νὰ ἐργάζωνται τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν τῶν ὡρῶν καθ' ἡμέραν.

Ἐπειδὴ εἰς ταύτην τὴν περίστασιν, ὅσον περισσότεροι ἐργάται εἶναι διὰ νὰ κάμουν αὐτὸ τὸ ἔργον, τόσον ὀλιγωτέρας ἡμέρας θέλουσι, διὰ τοῦτο ὑπάρχει ἐδῶ

σχέσις ἀντιπεπονθυῖα μεταξὺ τῶν δύο αριθμῶν τῶν ἡμερῶν. Οὕτω σημειόνοντες διὰ χ τὸν ἀριθμὸν τὸν ἀναγκαῖον τῶν ἡμερῶν εἰς τοὺς 860 ἐργάτας διὰ νὰ σκάψωσι τὸ πρῶτον αὐλάκιον, τὸ καθ' ἡμέραν ἔργον ἀπὸ 12 ὥρας ὡς ἐκεῖνο τῶν 500 ἐργατῶν, λαμβάνομεν τὴν ἀναλογίαν (1), εἰς τὴν ὁποίαν 860 καὶ τὸ ἀντικείμενόν του χ σχηματίζουσι τὰ δύο ἄκρα.

Τώρα ἐὰν οἱ 860 ἄνθρωποι ἀντὶ νὰ ἐργασθῶσι 12 ὥρας, ἐργάζονται μόνον 10 ὥρας, ἀναγκαίως ἤθελαν δαπανήσει περισσοτέρας ἡμέρας, διὰ νὰ ἐκτελέσωσι τὸ αὐτὸ ἔργον. Οὕτω παρατηροῦντες τοὺς δύο ἀριθμοὺς τῶν ὡρῶν τῆς καθ' ἡμέραν ἐργασίας, ἐπειδὴ ὑπάρχουσιν ὀλιγώτεραι ὧραι ἐργασίας, χρειάζονται περισσότεραι ἡμέραι, ἔχομεν ακόμη ἀντιπεπονθυῖαν σχέσιν μεταξὺ τῶν δύο ἀριθμῶν τῶν ἡμερῶν 12$^{αν.}$ καὶ 10$^{αν.}$, καὶ τῶν δύο ἀριθμῶν χ, χ', καὶ οὕτως ἔχομεν τὴν ἀναλογίαν . . . . . (2), εἰς τὴν ὁποίαν τὸ 10 καὶ τὸ ἀντικείμενόν του χ' σχηματίζουσι τὰ ἄκρα.

Δυνάμεθα πολλαπλασιάζοντες τὰς δύο ἀναλογίας (1) καὶ (2) τὴν μίαν ἐπὶ τὴν ἄλλην, καί

Παρατηροῦντες, ὅτι ὁ ὅρος χ ἐξαλείφεται ὡς κοινὸς παράγων τῶν δύο τελευταίων ὅρων τῆς νέας ἀναλογιας, δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν τὴν τιμὴν τοῦ χ', ἡ ὁποία ἐκφράζει τὰς ἀναγκαίας ἡμέρας εἰς τοὺς 860 ἐργάτας, ἐργαζομένους ἀπὸ 10 ὥρας τὴν ἡμέραν, διὰ νὰ σκάψωσι τὸ πρῶτον αὐλάκιον, ἀλλὰ τοῦτο εἶναι ἀνωφελὲς, καὶ ἀρκεῖ νὰ θεωρήσωμεν τὸ χ' ὡς νὰ ἦτον γνωστόν.

Ἂς μεταβάλωμεν τώρα τὸ μῆκος τοῦ αὐλακίου, φυλάττοντές του τὸ αὐτὸ πλάτος, βάθος καὶ σκληρότητα τῆς γῆς.

Τώρα ἐὰν τὸ αὐλάκιον ἔχῃ περισσότερον μῆκος, ὅλων τῶν ἄλλων μενόντων τῶν αὐτῶν, χρειάζονται ἀναγκαίως περισσότεραι ἡμέραι διὰ τὸ σκάψιμον. Οὕτως ἔχομεν σχέσιν εὐθεῖαν μεταξὺ τῶν δύο ἀριθμῶν 1800, 2900· καὶ x', x'' (ἢ x δεύτερον) ἐκφράζουν τὸν ἀριθμὸν τῶν ἡμερῶν τῶν ἀντικειμένων εἰς τὸ μῆκος 2900. Ἐκ τούτου προκύπτει ἡ ἀναλογία (3), εἰς τὴν ὁποίαν 2900 καὶ x'' σχηματίζουν μέσον καὶ ἄκρον.

Ἐξακολουθοῦντες τοὺς αὐτοὺς συλλογισμοὺς σχετικῶς εἰς τὸ πλάτος καὶ βάθος, λαμβάνομεν τὰς δύο ἀναλογίας (4) καὶ (5), εἰς τὰς ὁποίας x''' καὶ x'''' (ἢ x τρία καὶ x τέσσαρα) ἐκφράζουσι τοὺς ἀριθμοὺς τῶν ἡμερῶν, αἱ ὁποῖαι ἀνταποκρίνονται εἰς τὰς μεταβολὰς τοῦ πλάτους καὶ βάθους.

Τέλος πάντων, ἐὰν παρατηρήσωμεν τὴν διαφορὰν τῆς σκληρότητος τῶν δύο γαιῶν, βλέπομεν, ὅτι ὑπάρχει σχέσις εὐθεῖα, καὶ συνάγομεν τὴν ἀναλογίαν (6), τῆς ὁποίας ὁ τελευταῖος ὅρος x''''' ἢ X, ἐκφράζει τὸν ἀριθμὸν τῶν ζητουμένων ἡμερῶν.

Πολλαπλασιάζοντες τώρα ὅρον ἐπὶ ὅρον τὰς ἓξ συσταθείσας διαδοχικῶς ἀναλογίας καὶ παρατηροῦντες, ὅτι ὅλαι οἱ ὅροι x, x', x'', x''', x'''' ἐξαλείφονται ὡς κοινοὶ παράγοντες εἰς τὸν δεύτερον ἡγούμενον καὶ εἰς τὸν δεύτερον ἑπόμενον τῆς νέας ἀναλογίας, λαμβάνομεν τὴν ἀναλογίαν (7), ἐκ τῆς ὁποίας ἐξάγεται ἡ τιμὴ τοῦ X, ἡ ὁποία, ἐκτελουμένης πάσης ἀναγωγῆς, ἄγεται εἰς $549^{\text{ἡμ.}} \frac{51}{371}$.

Οὕτως ὁ ἀριθμὸς τῶν ζητουμένων ἡμερῶν εἶναι 549 ἡμέραι σχεδόν.

Σ. Κ. Ἂς ἐνθυμηθῶμεν ὅτι, ὅταν φθάσωμεν εἰς τὴν ἔκφρασιν $X=\frac{500\times12\times2900\times12\times5\times3\times57}{860\times10\times1800\times7\times3\times1}$, πρέπει, πρὶν ἐκτελέσωμεν ὅλους τοὺς σημειωμένους πολλαπλασιασμοὺς, νὰ ἐξαλείψωμεν ὅλους τοὺς κοινοὺς παράγοντας, οἱ ὁποῖοι μᾶς παῤῥησιάζονται τόσον εἰς τὸν ἀριθμητὴν, ὅσον καὶ εἰς τὸν παρονομαστήν.

Οὕτω π. χ. ἀφ' οὗ ἐκτελέσωμεν ὅλας τὰς ἐξαλείψεις συνάγομεν $X=\frac{5\times4\times29\times5\times57}{43\times7}$, ἢ ἐκτελοῦντες τὸν ὑπολογισμὸν, $X=\frac{165300}{301}=549\,\frac{51}{301}$.

Τοῦτο τὸ παράδειγμα, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ πλέον σύνθετον ἀφ' ὅσα δύνανται νὰ προτεθῶσιν, ἀρκεῖ διὰ νὰ δείξῃ εἰς τοὺς ἀρχαρίους τὸν δρόμον, τὸν ὁποῖον πρέπει νὰ ἀκολουθήσουν εἰς κάθε ἄλλο.

§. 223. Γενικὴ παρατήρησις περὶ τῆς μεθόδου τῶν τριῶν. Ἡ πρᾶξις, διὰ τῆς ὁποίας ἐπροσδιορίσαμεν τὸν ἄγνωστον ἀριθμὸν εἰς τὰ δύο ἀνωτέρω ζητήματα, καλεῖται Μέθοδος σύνθετος τῶν τριῶν, ἐπειδὴ τῷ ὄντι φθάνομεν εἰς ἀναλογίαν, τῆς ὁποίας ὁ πρῶτος λόγος σχηματίζεται διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ὅλων τῶν περιεχομένων λόγων εἰς τὴν ἔκφρασιν, ἐκτὸς ἐκείνου εἰς τὸν ὁποῖον ἡ ἄγνωστος ἀποτελεῖ μέρος, καὶ ὁ ὁποῖος εἰς τὸν αὐτὸν καιρὸν σχηματίζει τὸν δεύτερον λόγον τῆς ἀναλογίας.

Ἄλλοτε ἐδιαιροῦσαν ἀκόμη τὰς μεθόδους τῶν τριῶν εἰς μέθοδον τῶν τριῶν ἁπλῆν καὶ εὐθεῖαν, εἰς μέθοδον τῶν τριῶν ἁπλῆν καὶ ἀντίστροφον, εἰς μέθοδον τῶν τριῶν σύνθετον, εὐθεῖαν καὶ ἀντιπεπονθυῖαν εἰς τὸν αὐτὸν καιρὸν κ. τ. λ. Ἀλλ' ἐσυμφώνησαν μετὰ ταῦτα καὶ ἐπαραίτησαν ταύτας τὰς ὀνομασίας ὡς ἀνωφελεῖς εἰς τὴν λύσιν τῶν ζητημάτων.

Ἡ μόνη προσοχὴ, τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ ἔχωμεν, θέτοντες ὑπ' ἀλλήλας τὰς διαφόρους ἀναλογίας, τῶν ὁποίων τὸ γινόμενον δίδει ἀναλογίαν ἔχουσαν ἄγνωστον ὅρον τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν, εἶναι νὰ βεβαιωθῶμεν, ἐὰν οἱ τέσσαρες ἀριθμοὶ, τοὺς ὁποίους συγκρίνομεν, διὰ κάθε ἀναλογίαν εἶναι εἰς εὐθεῖαν ἢ εἰς ἀντιπεπονθυῖαν ἀναλογίαν, καὶ νὰ γράφωμεν ταύτην τὴν ἀναλογίαν, ὡς πρέπει, κατὰ τὴν παρατήρησιν τοῦ ἀριθμοῦ 219.

Προτείνομεν ἐνταῦθα διὰ γύμνασιν καὶ τὰ ἀκόλουθα παραδείγματα.

Ὄγδοον παράδειγμα· 15 ἐργάται ἐργαζόμενοι 10 ὥρας τὴν ἡμέραν, ἐχρειάσθησαν 18 ἡμέρας, διὰ νὰ κάμουν 450 μέτρα ἔργου. Ζητεῖται πόσοι ἐργάται χρειάζονται, ἐργαζόμενοι 12 ὥρας τὴν ἡμέραν, διὰ νὰ κάμουν εἰς 8 ἡμέρας 480 μέτρα τοῦ ἰδίου ἔργου; [ἀπόκρισις· $x=30$ ἀνθρώπους].

Ἔννατον παράδειγμα· Χρειάζονται 1200 μέτρα ὑφάσματος ἀπὸ $\frac{3}{4}$ πλάτους, διὰ νὰ ἐνδυθῶσι 500 ἄνθρωποι. Ζητεῖται πόσα μέτρα χρειάζονται ἀπὸ $\frac{7}{8}$ πλάτους, διὰ νὰ ἐνδυθῶσιν 960;

[ἀπόκρισις· $3291^{\text{μέτρ.}}\frac{3}{7}$.]

Δέκατον παράδειγμα. Εἷς ταχυδρόμος περιπατῶν 15 ὥρας τὴν ἡμέραν διέτρεξε 375 λέγας εἰς 20 ἡμέρας. Ζητεῖται πόσας ὥρας θέλει περιπατεῖ τὴν ἡμέραν, διὰ νὰ κάμῃ 400 λέγας εἰς 18 ἡμέρας;

[ἀπόκρισις· $17^{\text{ὡρ.}}\frac{7}{9}$.]

Περὶ τῆς Μεθόδου τοῦ τόκου.

§. 224. Καλεῖται τόκος ἑνὸς ἀθροίσματος, τὸ κέρδος τὸ ὁποῖον προκύπτει ἐκ τῆς δανείσεως τοῦ τοιούτου ἀθροίσματος εἰς ἓν διάστημα χρόνου. Τὸ ἄθροισμα, τὸ ὁποῖον θέτομεν, καλεῖται κεφάλαιον.

Ὁ τόκος ἑνὸς ἀθροίσματος ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν ποσότητα τοῦ κεφαλαίου, ἀπὸ τὸν καιρὸν, καθ' ὃν ἐβάλθη, καὶ ἀπὸ τὴν τιμὴν τοῦ τόκου.

Καλεῖται τιμὴ ὁ τόκος ἢ τὸ κέρδος τῶν 100 φράγκων δι' ἕνα χρόνον. Οὗτος ὁ τόκος εἶναι ἁπλῆ συμφωνία μεταξὺ τοῦ δανείζοντος καὶ δανειζομένου, μ' ὅλον τοῦτο ὑπάρχει εἰς τὸ ἐμπόριον ἢ εἰς τοὺς τραπεζίτας ὅρια, ἐκτὸς τῶν ὁποίων ὁ τόκος δὲν δύναται νὰ ὑψωθῇ, χωρὶς νὰ ὀνομασθῇ παράνομος τόκος. Ὁ ἀνομοτοκιστὴς εἶναι ἐκεῖνος, ὅστις δανείζει τὰ ἀργύριά του περισσότερον τῆς συνειθισμένης τιμῆς.

Ἡ μέθοδος τοῦ τόκου εἶναι μερική τις περίστασις τῆς μεθόδου τῶν τριῶν, καθὼς θέλομεν τὸ ἰδεῖ εἰς τὰ ἀκόλουθα ζητήματα.

Πρῶτον παράδειγμα. Ζητεῖται ὁ τόκος ἑνὸς ἀθροίσματος 4500 φράγκων διὰ 2 χρόνους καὶ 5 μῆνας, ἀπὸ 7 φράγκα τὰ $\frac{0}{0}$ τὸν χρόνον. (οὕτω συνειθίζουν νὰ γράφουν οἱ ἔμποροι $\frac{0}{0}$ ἀντὶ 100). Αὕτη ἡ ἔκφρασις εἶναι ὁ σύντομος τρόπος τῆς ἀκολούθου.

100 φράγκα δίδουσιν 7 φράγκα τόκον τὸν χρόνον, πόσον θέλει προκύψει κατ' ἀναλογίαν ἀπὸ ἄθροισμα 4500 φράγκων δεδομένων, ἢ δανεισμένων διὰ 2 χρόνους καὶ 5 μῆνας;

Ἀνάλυσις καὶ λύσις. Ἐφαρμόζοντες εἰς τοῦτο τὸ ζήτημα τὰς συσταθείσας ἀνωτέρω ἀρχὰς,

λέγομεν, οἱ τόκοι δύο κεφαλαίων θεμένων διὰ τὸν αὐτὸν καιρὸν εἶναι κατ' εὐθεῖαν ἀνάλογοι τῶν τοιούτων κεφαλαίων· οὕτως καλοῦντες χ τὸν τόκον τοῦ κεφαλαίου 4500φρ., θεμένων διὰ ἕνα χρόνον, θέλομεν ἔχει τὴν ἀκόλουθον ἀναλογίαν.

$$100 : 4500 :: 7 : \chi \quad . \; . \; . \; . \; (1).$$

Μετὰ ταῦτα, οἱ τόκοι τοῦ ἰδίου κεφαλαίου εἶναι κατ' εὐθεῖαν ἀνάλογοι τῶν χρόνων, εἰς τοὺς ὁποίους ἐτέθησαν. Λοιπὸν ἐὰν σημειώσωμεν διὰ χ τὸν τόκον τῶν 4500φρ. διὰ 2 χρόνους καὶ 5 μῆνας, ἢ τὸν ζητούμενον τόκον, ἔχομεν ταύτην τὴν νέαν ἀναλογίαν,

$$\overset{\chi\rho.}{1} : \overset{\chi\rho.}{1} \; \overset{\mu\eta\nu.}{5} :: \chi : X \quad . \; . \; . \; . \; (2)$$

λοιπὸν, πολλαπλασιάζοντες ὅρον ἐπὶ ὅρον τὰς ἀναλογίας (1) καὶ (2) ἔχομεν

$$100 : 4500 \times 2^{\chi\rho.}\,5^{\mu\eta\nu.} :: 7 : X$$

καὶ διὰ τοῦτο $X = \dfrac{4500 \times 2^{\chi\rho}\,5^{\mu\eta\nu.} \times 7}{100} = 315 \times 2^{\chi.}\,5^{\mu.}$

Καὶ ἐκτελοῦντες τὴν σημειωμένην πρᾶξιν διὰ 315×2χρ. 5μ. κατὰ τὸν γνωστὸν κανόνα, καὶ ὡς ἐδῶ βλέπομεν, εὑρίσκομεν ἐξαγόμενον 761φρ. καὶ 25 ἑκατοστημόρια. Οὕτως ὁ ζητούμενος τόκος φθάνει εἰς 761 φράγκα, καὶ 25 ἑκατοστημόρια.

		315	
		2χρ. 5μ.	
		630	
μην.			
4	. . .	105	
1	. . .	26	25
		761,	25

Ἔστω ἐν γένει κεφάλαιον α τεθειμένον διά τινα χρόνον ἐκφραζόμενον διὰ τ, πρὸς ψ τὰ 100 τὸν χρόνον.

Συλλογιζόμενοι ὡς ἀνωτέρω θέλομεν φθάσει εἰς τὰς δύο ἀναλογίας ἐκ τῶν ὁποίων ἐξάγομεν . . .

$$\left\{\begin{array}{l} 100 : \alpha :: \psi : \chi \\ \psi : \tau :: \chi : X \\ 100 : \alpha \times \tau :: \psi : X \end{array}\right.$$

καὶ διὰ τοῦτο $X = \dfrac{\alpha \times \tau \times \psi}{100} = \dfrac{\alpha\psi\tau}{100}.$

Οὗτος ὁ τύπος $X = \frac{\alpha\psi\tau}{100}$ περιέχει ὑπὸ ἀπλουστέραν μορφὴν τὸν τρόπον τοῦ προσδιορίζειν τὸν τόκον ἑνὸς ἀθροίσματος θεμένου εἰς ἕνα τινὰ χρόνον, καὶ κατάτινα τόκον.

Εἰς κοινὴν γλῶσσαν αὐτὸς φανερόνει, ὅτι πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸ δεδομένον ἄθροισμα ἐπὶ τὸν τόκον δι' ἕνα χρόνον, μετὰ ταῦτα ἐπὶ τοῦ χρόνου, καθ' ὃν τὸ ἄθροισμα ἐβάλθη, καὶ νὰ διαιρέσωμεν τὸ ἐξαγόμενον διὰ τοῦ 100. Εἰς ταύτην τὴν πρᾶξιν συνίστασαι ἡ μέθοδος τοῦ ἁπλοῦ τόκου.

§. 225. Δυνάμεθα νὰ φθάσωμεν εἰς αὐτὸν τὸν τύπον χωρὶς τὴν βοήθειαν τῶν ἀναλογιῶν, καὶ δι' ἑνὸς μέσου, τὸ ὁποῖον εἶναι ὠφέλιμον νὰ γνωρίσωμεν.

Ἐπειδὴ 100 φράγκα δίδουσιν ἀριθμὸν τινὰ φράγκων σημειωμένων διὰ ψ εἰς τὴν μονάδα τοῦ χρόνου ἢ εἰς ἕνα χρόνον, εἶναι φανερὸν, ὅτι ἓν μόνον φράγκον πρέπει νὰ δώσῃ $\frac{\psi}{100}$. Λοιπὸν ἓν ἄθροισμα ὁποιονδήποτε α θέλει δώσει $\frac{\psi}{100} \times \alpha$ ἢ $\frac{\psi\alpha}{100}$ εἰς ἕνα χρόνον· καὶ τὸ αὐτὸ ἄθροισμα ὕστερον ἀπὸ τ χρόνους θέλει δώσει $\frac{\alpha\psi}{100} \times \tau$ ἢ $\frac{\alpha\psi\tau}{100}$.

Σ. Κ. Τὸ κλάσμα $\frac{\psi}{100}$, τὸ ὁποῖον ἐκφράζει τὸν τόκον ἑνὸς φράγκου δι' ἕνα χρόνον, παριστάνεται εἰς μερικὰς περιστάσεις ὑπὸ ἁπλούστατον τύπον.

Ἔστω π. χ. $\psi = 5$, τὸ ὁποῖον δηλοῖ ὅτι ἓν ἄθροισμα ἐτέθη μὲ 5 τὰ 100 τὸν χρόνον, ἔπεται ὅτι $\frac{\psi}{100} = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}$· ὅθεν $\frac{\alpha\psi}{100} = \frac{\alpha}{20}$. Λοιπὸν βλέπομεν,

ὅτι ὁ τόκος ἑνὸς κεφαλαίου μὲ 5 τὰ 100 τὸν χρόνον, εἶναι ἴσος μὲ τὸ εἰκοστὸν τοῦ κεφαλαίου.

Ἔστω προσέτι $\phi = 10$, προκύπτει $\frac{\phi}{100}=\frac{10}{100}$.

λοιπὸν $\frac{\alpha\phi}{100}=\frac{\alpha}{10}$, τουτέστι ὁ τόκος ἑνὸς κεφαλαίου θεμένου μὲ 10 τὰ 100, εἶναι ἴσος μὲ τὸ δέκατον τοῦ κεφαλαίου.

Λέγεται εἰς τὴν πρώτην περίστασιν, ὅτι τὸ κεφάλαιον ἐτέθη εἰς δηνάρια 20, καὶ εἰς τὴν δευτέραν εἰς δηνάρια 10.

Τέλος πάντων λέγοντες, ὅτι ἕνας ἔβαλε τὰ χρήματά του εἰς δηνάρια 40, ὑποθέτομεν, ὅτι λαμβάνει τὸν χρόνον διὰ τόκον, 40 μέρος τοῦ κεφαλαίου, ἢ μὲ ἄλλας λέξεις, ὅτι ὁ τόκος εἶναι ἀπὸ $2\frac{1}{2}$ τὰ 100 τὸν χρόνον.

Ἐπειδὴ ἔχομεν $\frac{2\frac{1}{2}}{100}=\frac{5}{200}=\frac{1}{40}$. Λοιπὸν $\frac{\alpha\phi}{100}$ $=\frac{\alpha\times 2\frac{1}{2}}{100}=\frac{\alpha}{10}$. Αὗται αἱ ὀνομασίαι συνηθίζονται εἰς τὸ ἐμπόριον.

§. 226. Μερικαῖς φοραῖς ἡ τιμὴ τοῦ τόκου δίδεται ὄχι δι' ἕνα χρόνον, ἀλλὰ 1 μῆνα ἢ διὰ 30 ἡμέρας· εἰς ταύτην τὴν περίστασιν λαμβάνεται ὁ μὴν ὡς μονὰς τοῦ χρόνου· ἀλλὰ ὁ τρόπος τῆς πράξεως εἶναι πάντοτε ὁ αὐτός.

Δεύτερον Παράδειγμα. Ζητεῖται ὁ τόκος 5000 φράγκων διὰ 315 ἡμέρας ἢ 10 μῆνας καὶ 15 ἡμέρας ἀπὸ $\frac{3}{4}$ τὰ 100 τὸν κάθε μῆνα.

Κάμνοντες εἰς τὸν τύπον $X=\frac{\alpha\phi\tau}{100}$, $\alpha = 5000$,

$\tau = 10^{\mu}\ \frac{1}{2}$, καὶ $\phi = \frac{3}{4}$, ἔχομεν $\chi = \frac{500\times10\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}}{100}$
$= 50\times\frac{21}{2}\times\frac{3}{4} = \frac{3150}{8} = 393,75$. Οὕτως ὁ ζητούμενος τόκος εἶναι 393 φράγκα, καὶ 75 ἑκατοστημόρια.

Τρίτον παράδειγμα. Ἓν ἄθροισμα ἀπὸ 3750 φράγκα ἔδωκε 719 φράγκα καὶ 25 ἑκατοστημόρια τόκον, ὕστερον ἀπὸ 2 χρόνους καὶ 6 μῆνας. Ζητεῖται ἡ τιμὴ τοῦ τόκου, διὰ τοῦ ὁποίου ἐτέθη τὸ ἄθροισμα.

Συλλογιζόμενοι, καθὼς εἰς τὸ πρῶτον παράδειγμα, φθάνομεν εἰς δύο ἀναλογίας,

$$\begin{cases} 3750 : 100 :: 719 : 25 : \chi \\ 2\chi\rho.\ \frac{1}{2} : 1 \quad :: \chi : X \end{cases}$$

ὅθεν ἐξάγομεν $3750\times2\frac{1}{2} : 100 :: 719,\ 25 : X$

Λοιπὸν $X = \frac{719,25\times100}{3750\times2\frac{1}{2}} = \frac{71925}{9375} = 7,672$· τουτέστι ὅτι ἡ τιμὴ τοῦ τόκου εἶναι 7φρ.,67, τὰ 100 τὸν χρόνον, μεῖον ἑνὸς ἑκατοστημορίου.

Δυνάμεθα νὰ βεβαιώσωμεν τοῦτο τὸ ἐξαγόμενον, προσδιορίζοντες τὸν τόκον τοῦ κεφαλαίου 3750 φράγκα, διὰ τὸ διάστημα 2 χρόνων καὶ 6 μηνῶν, ἀπὸ 7φρ.,67 τὰ 100 τὸν χρόνον, μ' ὅλον τοῦτο εἶναι ἀνάγκη διὰ περισσοτέραν ἀκρίβειαν νὰ λάβωμεν διὰ τὸν τόκον 7,672, καθὼς τὸ ἐλάβαμεν ἀνωτέρω.

Ὁ τύπος $X = \frac{\alpha\phi\tau}{100}$ εἶναι παρομοίως ἱκανὸς νὰ μᾶς δίδῃ τοῦτον τὸν τόκον. Τῷ ὄντι, αὐτὸς μᾶς δίδει φανερὰ $100X = \alpha\times\phi\times\tau$, ἐκ τοῦ ὁποίου $\phi = \frac{100X}{\alpha\times\tau}$.

Τώρα ἔχομεν $\alpha = 3750$, $\tau = 2^{\chi\rho.}, 6^{\mu\eta\nu.}$, $X = 719, 25$.

Λοιπὸν $\psi = \frac{71925}{3750 \times 2\frac{1}{2}} = \frac{71925}{9375}$, ὡς καὶ ἀνωτέρω εὑρήκαμεν.

§. 227. Ἐν γένει ὁ τύπος περιέχει τέσσαρας ποσότητας α, ψ, τ, καὶ X, ἑκάστη τῶν ὁποίων δύναται νὰ ληφθῇ ὡς ἄγνωστος, ὅταν αἱ τρεῖς ἄλλαι εἶναι δεδομέναι. Εἶναι δὲ πάντοτε εὔκολον νὰ προσδιορίζωμεν ἐξ αὐτῶν τὴν ἄγνωστον ποσότητα.

Καὶ διὰ τοῦτο δυνάμεθα νὰ προτείνωμεν τέσσαρα οὐσιώδη ζητήματα διαφορετικὰ, τῶν ὁποίων ἰδοὺ ἡ ἔκφρασις. μὲ τὰ ἐξαγόμενα, τὰ ὁποῖα εἰς αὐτὰ ἀνταποκρίνονται.

1^{ον}. Νὰ προσδιορίσωμεν τὸν τόκον ἑνὸς κεφαλαίου ὕστερον ἀπὸ κάποιον καιρὸν, σχετικῶς εἰς μίαν τινὰ τιμὴν τοῦ τόκου.

Ἔστω X ὁ ζητούμενος τόκος, ἔχομεν $X = \frac{\alpha\psi\tau}{100}$.

(Τὰ δύο πρῶτα παραδείγματα ἀναφέρονται εἰς τοῦτο τὸ ζήτημα.)

2^{ον}. Νὰ προσδιορίσωμεν τὴν τιμὴν τοῦ τόκου, εἰς τὴν ὁποίαν ἓν ἄθροισμα πρέπει νὰ τεθῇ, διὰ νὰ δώσῃ ὕστερον ἀπὸ τινὰ καιρὸν, ἄλλοτι ἄθροισμα. Ὁ τύπος εἶναι $\psi = \frac{100X}{\alpha\theta}$.

(Τὸ τρίτον παράδειγμα ἀναφέρεται εἰς τοῦτο τὸ ζήτημα.)

3^{ον}. Νὰ προσδιορίσωμεν τὸν καιρὸν, εἰς τὸν ὁποῖον ἄθροισμά τι πρέπει νὰ τεθῇ, διὰ νὰ δώσῃ κατὰ μίαν τινὰ τιμὴν γνωστὴν, ἄλλοτι ἐσπίσης γνωστὸν ἄθροισμα.

Ὁ τύπος θέλει εἶναι τότε $\tau = \frac{100X}{\alpha \times \psi}$.

Αὕτη ἡ τιμὴ τοῦ τ πρέπει νὰ λογαριάζεται εἰς μονάδας τοῦ ἰδίου εἴδους, ὡς ἐκεῖναι τὰς ὁποίας μεταχειζόμεθα διὰ νὰ στερεώσωμεν τὴν τιμὴν, τουτέστιν εἰς χρόνους, ἢ εἰς μῆκας.

4ον. Νὰ προσδιορίσωμεν τὸ κεφάλαιον, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ θέσωμεν εἰς γνωστὸν καιρὸν, διὰ νὰ δώσῃ κατὰ μίαν τινὰ τιμὴν δεδομένην, ἄθροισμά τι παρομοίως γνωστόν.

Θέλομεν ἔχει τὸν τύπον $\alpha = \frac{100X}{\psi \times \tau}$.

Ἰδοὺ καὶ ἄλλα παραδείγματα, ἐπὶ τῶν ὁποίων δυνάμεθα νὰ γυμνασθῶμεν.

Τέταρτον παράδειγμα. Κεφάλαιόν τι θεμένον 27 μῆνας πρὸς $\frac{1}{2}$ τὰ 100 τὸν μῆνα, ἔδωκε 1312γρ., 65έκ. διὰ τόκον. Ζητεῖται ἡ τιμὴ τοῦ κεφαλαίου.
[ἀπόκρ. 9723γρ., 33έκ.]

Πέμπτον Παράδειγμα. Ἀθροισμάτι ἀπὸ 7400γρ. ἔδωκεν εἰς 27 μῆνας 852γρ., 50έκ. Ζητεῖται πόσον ἓν ἄλλο ἄθροισμα ἀπὸ 8500γρ. θέλει δώσει, μὲ τὴν ἰδίαν τιμὴν τοῦ τόκου, διὰ 45 μῆνας, καὶ ποία εἶναι ἡ τιμὴ τοῦ τόκου.
[ἀπόκρ. 1593γρ., 75έκ., καὶ 5 τὰ 100 τὸν χρόνον.]

Περὶ τῆς μεθόδου τῆς ὑφαιρέσεως.

§. 228. Ἡ ὑφαίρεσις ἄλλο δὲν εἶναι, εἰμὴ τὸ ὅ,τι κατεβάζομεν ἢ κρατοῦμεν ἀπὸ τὴν τιμὴν ἑνὸς γραμματίου, τὸ ὁποῖον μ' ὅλον ὅτι πρέπει νὰ πληρω-

θῆ ὕστερον ἀπό τινα καιρὸν, θέλομεν νὰ πληρωθῆ πρὸ τῆς διορίας του.

Πρὸς ἀκριβῆ δὲ τούτου κατάληψιν, ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἄνθρωπός τις ὢν κύριος γραμματίου τινὸς ἀπὸ 3000φρ., πληρωτέα εἰς ἕνα χρόνον, παῤῥησιάζεται εἰς τραπεζίτην, διὰ νὰ τὸ πληρωθῆ μὲ ὑφαίρεσιν. Ζητεῖται πόσον πρέπει νὰ κρατήσῃ ὁ τραπεζίτης, ἢ τὸ ἄθροισμα, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ μετρήσῃ ἤδη εἰς τὸν ἄνθρωπον. Ἠξεύρομεν περιπλέον, ὅτι ἡ τιμὴ τοῦ τόκου εἶναι 6 τὰ 100.

Ἀνάλυσις. Εἶναι φανερὸν, ὅτι ὁ ἄνθρωπος πρέπει νὰ λάβῃ τώρα ἄθροισμά τι, τὸ ὁποῖον ἑνωμένον μὲ τὸν τόκον του ὕστερον ἀπὸ ἕνα χρόνον, γεννᾷ 3000φρ., δηλαδὴ τὴν συμποσουμένην τιμὴν τοῦ γραμματίου.

Τώρα, ἐπειδὴ 100 φράγκα δίδουν 6 φράγκα τόκον δι' ἕνα χρόνον, ἕπεται ὅτι 100 φράγκα γίνονται εἰς ἕνα χρόνον 106, περιεχομένου καὶ τοῦ κεφαλαίου, ἢ, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ αὐτὸ, γραμμάτιόν τι ἀπὸ 106 φράγκα πληρωτέα μετὰ ἕνα χρόνον, ἰσοδυναμεῖ μὲ 100 φράγκα πληρονόμενα ἤδη. Λοιπὸν διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν παροῦσαν τιμὴν τοῦ γραμματίου τῶν 3000 φράγκων, ἀρκεῖ νὰ συστήσωμεν τὴν ἀναλογίαν . . .

$$106 : 100 :: 3000 : x,$$

καὶ ὁ τέταρτος παριστάνει τὸ ἄθροισμα, τὸ ὁποῖον ὁ τραπεζίτης πρέπει νὰ δώσῃ.

Δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν ἀκόμη· ἐὰν διὰ 106 φράγκα, τὰ ὁποῖα πρέπει νὰ πληρωθῶσι μετὰ ἕνα χρόνον, ὁ τρεπεζίτης κρατῇ 6 φράγκα, πόσα διὰ 3000 φράγκα πρέπει νὰ κρατήσῃ; τουτέστι

$$106 : 6 :: 3000 : x'$$

καὶ ὁ τέταρτος ὅρος ἐκφράζει τὸ ὅσον ὁ τραπεζίτης κρατεῖ, ἢ τὴν τοῦ γραμματίου ὑφαίρεσιν.

Ἡ πρώτη ἀναλογία δίδει $\chi = \frac{300000}{106} = 2830^{\varphi\rho.}, 19^{\grave{\epsilon}\kappa.}$

καὶ ἡ δευτέρα . . $\chi' = \frac{18000}{106} = 169^{\varphi\rho.}, 81^{\grave{\epsilon}\kappa.}$

ἡ τιμὴ ἡ παροῦσα τοῦ γραμματίου εἶναι 3000φρ., 00. Λοιπὸν 2830φρ., 19ἑκ., ἢ ὁ τραπεζίτης πρέπει νὰ κρατήσῃ 169φρ., 81ἑκ.. Τῷ ὄντι, τὸ κεφάλαιον 2830φρ., 19ἑκ. ἑνωμένον μὲ τὸν τόκον τοῦ 169φρ., 81ἑκ. ἐπαναδίδει 3000φρ., τὸ ὅλον τοῦ γραμματίου. Βλέπομεν περιπλέον ἐδῶ, ὅτι αἱ δύο πράξεις χρησιμεύουσιν ἀμοιβαίως διὰ βεβαίωσιν.

Ἂς σημειώσωμεν ἐν γένει διὰ α τὸ ὅλον τοῦ γραμματίου, διὰ τ τὸν καιρὸν, ὅστις μέλλει νὰ περάσῃ ἕως εἰς τὴν πληρωμήν του, καὶ διὰ ψ τὴν τιμὴν τοῦ τόκου διὰ τὴν μονάδα τοῦ χρόνου.

Ἐπειδὴ 100φρ. δίδουν 1φρ. εἰς τὴν μονάδα τοῦ χρόνου, πρέπει νὰ δώσωσιν ἄθροισμα $\psi \times \tau$ ἢ ψτ ὕστερον ἀπὸ τ καιρὸν, καὶ διὰ τοῦτο $100+\psi\tau$ ἐκφράζει ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον γίνεται τὸ κεφάλαιον 100φρ ὕστερον ἀπὸ τὸν καιρὸν τ, περιεχομένου καὶ τοῦ κεφαλαίου, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ αὐτὸ, ὡς νὰ εἴπωμεν ὅτι $100+\psi\tau$ πληρωτέα ὕστερον ἀπὸ τὸν καιρὸν τ, ἰσοδυναμοῦσι μὲ 100 πληρονόμενα ἤδη. Λοιπὸν διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν παροῦσαν τιμὴν τοῦ γραμματίου α, πρέπει νὰ συστήσωμεν τὴν ἀναλογίαν,

$$100+\psi\tau : 100 :: \alpha : \chi \cdot \text{ ὅθεν } \chi = \frac{100\alpha}{100+\psi\tau}.$$

καὶ διὰ νὰ προσδιορίσωμεν τὴν ὑφαίρεσιν τοῦ γραμματίου γράφομεν

$$100+\psi\tau : \psi\tau :: \alpha : \chi \cdot \text{ ὅπου } \chi = \frac{\alpha \times \psi\tau}{100+\psi\tau}$$

εἰς κοινὴν γλῶσσαν, τὴν παροῦσαν τιμὴν ἑνὸς γραμ-

ματίου, λαμβάνομεν, πολλαπλασιάζοντες τὸ ὅλον τοῦ γραμματίου ἐπὶ 100, καὶ διαιροῦντες τὸ γινόμενον διὰ 100, αὐξανομένου ἀπὸ τὸν τόκον τῶν 100$^{φρ.}$ λογαριασμένον ἐπὶ τοῦ καιροῦ, ὅστις μέλλει νὰ διατρεχθῇ ἕως εἰς τὴν διορίαν του.

Εὑρίσκομεν τὴν ἰδίαν ὑφαίρεσιν, ἢ ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον ἐκρατήσαμεν, πολλαπλασιάζοντες τὸ ὅλον τοῦ γραμματίου διὰ τοῦ τόκου τῶν 100$^{φρ.}$, λογαριαζομένου ἐπὶ τοῦ καιροῦ τ, καὶ διαιροῦντες τὸ γινόμενον διὰ τοῦ 100 αὐξανομένου ἀπὸ τὸν τόκον του ἐπὶ τὸν ἴδιον καιρόν.

Ἐὰν ἡ πρᾶξις ἦναι ὀρθή, τὰ δύο ἐξαγόμενον προσθετόμενα ἀναμεταξύ τους, πρέπει νὰ δώσωσι τὸ ὅλον τοῦ γραμματίου.

Π ρ ῶ τ ο ν π α ρ ά δ ε ι γ μ α. Ζητεῖται ἡ παροῦσα τιμὴ ἑνὸς γραμματίου ἀπὸ 4850$^{φρ.}$, ἡ ὁποία πρέπει νὰ πληρωθῇ εἰς $13^{μην.}\frac{1}{2}$, ὑποτιθεμένης τῆς τιμῆς τοῦ τόκου πρὸς $\frac{3}{4}$ τὰ 100 τὸν κάθε μῆνα.

Ἔχομεν $α = 4850$, $τ = 13^{μην.}\frac{1}{2}$, $ψ = \frac{3}{4}$.

Ὅθεν $ψ \times τ = \frac{3}{4} \times 13\frac{1}{2} = \frac{81}{8} = 10{,}125$.

Λοιπὸν ὁ τύπος $χ = \frac{100 \cdot α}{110 + ψτ}$ τρέπεται εἰς

$$χ = \frac{485600}{110{,}125} = \frac{485000000}{110125} = \ldots 4404^{φρ.},09^{εκ.}$$

Ἔχομεν παρομοίως ἐκ τοῦ δευτέρου τύπου,

$$χ' = \frac{4850 \times 10{,}125}{110{,}125} = \frac{4910625\,0}{110125} = \frac{445,\ 91}{4850{,}00}$$

§. 229. Οὗτος ὅμως ὁ τρόπος τοῦ ὑφαιρεῖν δὲν εἶναι ἐκεῖνος, τὸν ὁποῖον μεταχειρίζονται οἱ τραπεζῖται καὶ οἱ ἔμποροι· ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον ὑφαιροῦν ἀπὸ τόσον τὰ $\frac{0}{0}$ τὸν χρόνον ἢ τὸν μῆνα· τουτέστι στερεόνουσι μίαν τιμὴν ὑφαιρέσεως καθὼς ἐσύστησαν καὶ τιμὴν τόκου.

Ἂς ἀπαναλάβωμεν τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα.

Ζητεῖται νὰ ἐκτελεσθῇ ἡ ὑφαίρεσις γραμματίου $4800^{\text{γρ.}}$, τὸ ὁποῖον μέλλει νὰ πληρωθῇ εἰς $13^{\text{μην.}}\frac{1}{2}$ πρὸς $\frac{3}{4}$ τὰ $\frac{0}{0}$ τὸν μῆνα.

Ἀνάλυσις. Ἐπειδὴ κατὰ τὴν ἔκφρασιν πρέπει νὰ κρατήσωμεν διὰ $100^{\text{γρ.}}$, $\frac{3}{4}$ τὸν μῆνα, ἕπεται, ὅτι διὰ $13^{\text{μην.}}\frac{1}{2}$ πρέπει νὰ κρατήσωμεν $\frac{3}{4}\times 13\frac{1}{2}$ ἢ $\frac{81}{8}$, τουτέστιν, ἄγοντες εἰς δεκαδικά, $10^{\text{γρ.}}$, $125^{\text{ἑκ.}}$. Οὕτως διὰ νὰ μάθωμεν τί μέλλει νὰ κρατήσωμεν ἐπὶ τῶν $4850^{\text{γρ.}}$, ἀρκεῖ νὰ συστήσωμεν τὴν ἀναλογίαν,

$$100 : 10,125 :: 4850 : \chi,$$

ἐκ τῆς ὁποίας συνάγομεν $\chi = \frac{4850\times 10,125}{100} = 491,06$ μεῖον ἑκατοστημορίου.

Τώρα, ἐὰν ἀπὸ τὰ 4850, ἀφαιρέσωμεν 491,06, μένει $4358^{\text{γρ}}$, $94^{\text{ἑκ.}}$, τὰ ὁποῖα παῤῥησιάζουν τὴν παροῦσαν τιμὴν τοῦ γραμματίου.

Συγκρίνοντες τοῦτο τὸ ἐξαγόμενον $4358^{\text{γρ}}$, $94^{\text{ἑκ.}}$, μὲ ἐκεῖνο τὸ ὁποῖον ἐπροσδιορίσαμεν κατὰ τὴν πρώτην μέθοδον, γνωρίζομεν, ὅτι ὁ ἄνθρωπος λαμβάνει $45^{\text{γρ.}}$, $15^{\text{ἑκ.}}$ ὀλιγώτερον διὰ τῆς δευτέρας, παρ' ὅσον διὰ τῆς πρώτης μεθόδου.

4404,09
4358,94
45,15

Διὰ νὰ ἐξηγήσωμεν ταύτην τὴν διαφορὰν, πρέπει νὰ παρατηρήσωμεν, ὅτι οἱ τραπεζῖται λαμβάνοντες ἀμέσως 491,06 ἀπὸ 4850, λαμβάνουν τὸν τόκον, τὸν ὁποῖον τὸ ἄθροισμα τοῦτο ἤθελε δώσει ὕστερον ἀπὸ $13^{\text{μην.}}\frac{1}{2}$, ἐν ᾧ δὲν ἔπρεπε νὰ λάβωσιν, εἰμὴ τὸν τόκον τοῦ ἀθροίσματος τὸν ἀνήκοντα κατὰ τὸ παρὸν εἰς τὸν κύριον τοῦ γραμματίου. Αὕτη δὲ ἡ συνθήκη πληροῦται διὰ τῆς πρώτης μεθόδου.

Οὗτος ὁ ἀριθμὸς 491,06, τὸν ὁποῖον ὁ τραπεζίτης κρατεῖ κατὰ τὴν δευτέραν μέθοδον, σύγκειται πραγματικῶς ἀπὸ τὸν τόκον τῆς παρούσης τιμῆς τοῦ γραμματίου, τουτέστι ἀπὸ 445,91, πλέον ὁ τόκος τούτου τοῦ τόκου, καθὼς δυνάμεθα νὰ βεβαιωθῶμεν.

Τῷ ὄντι ἡ ἀναλογία $100 : 10,125 :: 445,91 : x$ δίδει

$$x = \frac{445,91 \times 10,125}{100} = 45,1483875$$

τουτέστι 45,15 μεῖον ἑκαταστημορίου. Ἕπεται ἐκ τούτου, ὅτι τὰ $45^{\text{φρ.}}$, $15^{\text{ἑκ.}}$ εἶναι καθαρὸς χαμὸς εἰς τὸν κύριον τοῦ γραμματίου. Τοῦτο εἶναι κέρδος τοῦ τραπεζίτου, ξεχωρεστὰ ἀπὸ ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον δικαίως τοῦ πρέπει διὰ τὴν πρὸ τοῦ καιροῦ πληρωμήν.

Ἀλλ' ὅπως καὶ ἂν ἦναι, ἡ δευτέρα μέθοδος εἶναι ἐν γένει ἀποδεκτὴ εἰς τὸ ἐμπόριον, ἐπειδὴ εἶναι πλέον σύντομος, ὡς πρὸς τοὺς ὑπολογισμούς. Τῷ ὄντι ἂς σημειώσωμεν πάντοτε διὰ α τὴν ποσότητα τοῦ γραμματίου, διὰ τ τὸν καιρὸν, ὅστις πρέπει νὰ διατρεχθῇ ἕως εἰς τὴν πληρωμήν του, καὶ διὰ φ τὴν τιμὴν τοῦ τόκου διὰ τὴν μονάδα τοῦ καιροῦ, ἢ καλήτερα τὴν τιμὴν τῆς ὑφαιρέσεως· ὥστε ἔχομεν φτ διὰ τὸ ἄθροισμα, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ κρατηθῇ ἐπὶ τῶν $100^{\text{φρ.}}$, διὰ τὸν καιρὸν τ.

Ἤδη διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν ὑφαίρεσιν τοῦ γραμματίου α, πρέπει νὰ σχηματίσωμεν τὴν ἀκόλουθον ἀναλογίαν,

$$100 : \psi\times\tau :: \alpha : \chi \cdot \text{ ὅθεν } \chi = \frac{\alpha\times\psi\tau}{100},$$

τύπος ὅμοιος μ' ἐκεῖνον τῆς μεθόδου τοῦ τόκου, ὁ ὁποῖος δὲν περιέχει, εἰμὴ πολλαπλασιασμοὺς, καὶ ἁπλῆν τινα διαίρεσιν, ἐν ᾧ οἱ δύο τύποι οἱ σχετικοὶ πρὸς τὴν πρώτην μέθοδον, δίδουσι διαιρέσεις πολλὰ συνθέτους.

Ἤθελ' εἶναι καλὸν νὰ διαλλάξωμεν τὰς δύο μεθόδους· ὁ δὲ τρόπος τούτου ἦτον νὰ συστήσωμεν μίαν τιμὴν διὰ τῆς ὑφαιρέσεως ὀλίγον μικροτέραν πρὸς τὴν τιμὴν τοῦ τόκου· ἀλλ' ἡ δυσκολία ἤθελ' εἶναι τὸ νὰ θέσωμεν εἰς ἀναλογίαν τὴν μίαν καὶ τὴν ἄλλην εἰς ὅλας τὰς συνειθισμένας περιστάσεις. Διὰ τοῦτο ἀκολουθοῦμεν τὴν πλέον ἁπλουστέραν μέθοδον, ἡ ὁποία προσέτι ἄλλο δὲν εἶναι, εἰμὴ συμφωνία τις μεταξὺ τοῦ ἔχοντος τὸ γραμμάτιον καὶ τοῦ τραπεζίτου, ὅστις θέλει νὰ κάμῃ τὴν ὑφαίρεσιν.

Σ. Κ. Διὰ νὰ διακρίνωμεν τοὺς δύο τρόπους τῆς ὑφαιρέσεως, ὀνομάζομεν τὴν πρώτην ὑφαίρεσιν ἐσωτερικῶς, καὶ τὴν δευτέραν, ὑφαίρεσιν ἐξωτερικῶς.

Δὲν εἶναι προσφυεῖς αὗται αἱ ὀνομασίαι, ἐπειδὴ ὀρθότερον ἴσως ἦτον νὰ ὀνομάσωμεν τὴν πρώτην, ὑφαίρεσιν ἐξωτερικῶς, καὶ τὴν δευτέραν, ὑφαίρεσιν ἐσωτερικῶς· τοῦτο εἶναι γνώμη τῶν περισσοτέρων Ἀριθμητικῶν, ἀλλ' ἡμεῖς θέλομεν συμφωνήσει μὲ τὴν συνήθειαν.

§. 230. Ἰδοὺ μερικὰ παραδείγματα καὶ διὰ τὴν μίαν καὶ διὰ τὴν ἄλλην μέθοδον.

Δεύτερον Παράδειγμα. Ζητεῖται ἡ παροῦσα τιμὴ ἑνὸς γραμματίου ἀπὸ 2850γρ., 45γρ.,

πληρωτέα εἰς 2χρ., 8μην., ὑποτιθεμένης τῆς τιμῆς τοῦ τόκου πρὸς 8φρ. καὶ 75ἑκ. τὰ 100 τὸν χρόνον.

Ὑφαίρεσις ἐσωτερικῶς. Κατὰ πρῶτον ἐπειδὴ 100φρ δίδουσιν 8φρ., 75ἑκ. εἰς 1χρ., ὁ τόκος ὕστερον ἀπὸ 2χρ. καὶ 8μην. πρέπει νὰ ἦναι ἴσος μὲ 8,75 $\times$ 2χρ. 8μ. ἢ $8,75 \times \frac{8}{3}$, ἢ μὲ $\frac{70}{3}$· οὕτως ἡ παροῦσα τιμὴ τοῦ γραμματίου ἐκφράζεται διὰ

$$\frac{2850,45 \times 100}{100+\frac{70}{3}} = \frac{285045 \times 3}{370} = \frac{855135}{370}.$$

τὸ δὲ ἄθροισμα, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ κρατηθῇ, ἐκφράζεται διὰ

$$\frac{2850,45 \times \frac{70}{3}}{100\frac{70}{3}} = \frac{2850,45 \times 70}{370} = \frac{199531,5}{370}.$$

Ἐκτελοῦντες τὰς δύο σημειωμένας διαιρέσεις εὑρίσκομεν

$$\left.\begin{array}{l} 1^{ον.} \ldots\ldots \dfrac{855135}{370} = 2311,18 \\ 2^{ον.} \ldots\ldots \dfrac{199531,5}{370} = 539,27 \end{array}\right\} 2850,45$$

Λοιπὸν ἡ παροῦσα τιμὴ τοῦ γραμματίου εἶναι 2311φρ., 18ἑκ., καὶ τὸ ὅ,τι ἐκράτησεν ὁ τραπεζίτης εἶναι 539φρ., 27ἑκ..

Ὑφαίρεσις ἐξωτερικῶς. Τὸ κρατούμενον ἄθροισμα ἐπάνω εἰς 100φρ. διὰ τοὺς 2χρ. 8μην., μὲ τὸ νὰ ἦναι $\frac{70}{3}$, ἡ ὑφαίρεσις τῶν 2850φρ. 45ἑκ. θέλει εἶναι·

$$\frac{2850,45 \times \frac{70}{3}}{100} = \frac{950,15 \times 70}{100} = 665^{φρ.},105·$$

Ἡ παροῦσα τιμὴ τοῦ γραμματίου εἶναι λοιπὸν 2850, 45

— 665, 10 ἢ 2185, 35. Οὕτως ὁ κύριος τοῦ γραμματίου λαμβάνει 125$^{φρ.}$, 83$^{έκ.}$ ὀλιγώτερα διὰ τῆς δευτέρας μεθόδου παρὰ διὰ τῆς πρώτης.

2 311, 18
2 185, 35
125, 83

Οὗτος ὁ χαμὸς εἶναι, καθὼς ἀνωτέρω τὸ ἐπαρατηρήσαμεν, ὁ τόκος τῶν 539, 27.

Τῷ ὄντι ἔχομεν διὰ τοῦτον τὸν τόκον πρὸς $\frac{70}{3}$ τὰ 100 εἰς 2^{χρ}, 8$^{μην.}$,

$$\frac{539,27 \times \frac{70}{3}}{100} = \frac{37748,9}{300} = 125,829.$$

Τρίτον Παράδειγμα. Εἷς τραπεζίτης ἐπλήρωσε δι' ἓν γραμμάτιον 5600, τὸ ὁποῖον ἔμελλε νὰ πληρωθῇ ὕστερον ἀπὸ 21$^{μην.}$ ἄθροισμά τι ἀπὸ 5129, 45$^{έκ.}$. Ζητεῖται εἰς ποίαν τιμὴν τόκου τὸν κάθε μῆνα ἔγινε τοῦ γραμματίου ἡ ὑφαίρεσις.

Ὑφαίρεσις ἐσωτερικῶς. Ἐπειδὴ 5129$^{φ.}$, 45$^{έκ.}$, ἐκφράζουσι τὴν παροῦσαν τιμὴν τῶν 5600$^{φρ.}$; προσδιορίζομεν πρῶτον τὸ ἄθροισμα, τοῦ ὁποίου τὰ 100$^{φρ.}$ παρασταίνουν τὴν παροῦσαν τιμὴν διὰ τῆς ἀναλογίας,

$$5129,45 : 5600 :: 100 : x$$

ὅθεν $x = \frac{560000}{5129,45} = 109^{φρ.}, 1735$.

Οὕτως ὁ τόκος τῶν 100$^{φρ.}$ διὰ 14$^{μην.}$ εἶναι 9$^{φρ.}$, 1735

Διαιροῦντες ταύτην τὴν τιμὴν διὰ 14 ἔχομεν 0$^{φρ.}$, 6552 διὰ τὴν τιμὴν τοῦ τόκου τὸν μῆνα· ἐξαγόμενον, τὸ ὁποῖον βεβαιόνομεν εὐκόλως, ἐκτελοῦντες ἐπὶ τοῦ γραμματίου τὴν ὑφαίρεσιν τῶν 5600^{φρ}, μὲ ταύτην τὴν τιμὴν τοῦ τόκου. (Λαμβάνομεν ἕως εἰς δεκαχιλιοστημόρια τὴν τιμὴν τοῦ τόκου, διὰ νὰ γένῃ ἀκριβὴς ἡ βεβαίωσις.)

Ὑφαίρεσις ἐξωτερικῶς. Ἐὰν ἀφαιρέσωμεν 5129,45 ἀπὸ 5600, λαμβάνομεν 470,55 δι' ὅσον ὁ τραπεζίτης κρατεῖ ἐπὶ τῶν 5600.

Ἤδη διὰ νὰ γνωρίσωμεν, πόσον κρατεῖ ἐπάνω εἰς τὰ 100 διὰ 14$^{\mu\nu\cdot}$, συσταίνομεν τὴν ἀναλογίαν, 5600 : 470,55 :: 100 : χ.

Ὅθεν $\chi = \frac{47055}{5600} = 8,40$.

Διαιροῦντες τοῦτο τὸ ἐξαγόμενον διὰ 14 ἔχομεν 0$^{\gamma\rho\cdot}$,60 δι' ὅσον κρατεῖ τὸν κάθε μῆνα ἐπάνω εἰς 100$^{\gamma\rho\cdot}$. Τοῦτο εἶναι, κυρίως εἰπεῖν, ἡ τιμὴ τῆς ὑφαιρέσεως διὰ τὸν μῆνα.

Αὕτη ἡ τιμὴ εἶναι, καθὼς βλέπομεν, μικροτέρα τῆς τιμῆς, τὴν ὁποίαν ἐπροσδιορίσαμεν μὲ τὴν ἄλλην μέθοδον, καὶ τοιαύτη πρέπει νὰ ἦναι.

§. 231. Τὸ ἀκόλουθον παράδειγμα μετέχει εἰς τὸν αὐτὸν καιρὸν καὶ ἀπὸ τὴν μέθοδον τοῦ τόκου, καὶ ἀπὸ τὴν ὑφαίρεσιν ἐσωτερικῶς.

Τέταρτον παράδειγμα. Ἔμπορός τις ἠγόρασεν ἀπὸ τεχνίτην διὰ 3859$^{\gamma\rho\cdot}$, 25$^{\varepsilon\kappa\cdot}$ ἓν εἶδος ὑφάσματος· ἀλλὰ μὴ δυνάμενος νὰ πληρώσῃ ἀμέσως, τοῦ γράφει γραμμάτιον πληρωτέον ὕστερον ἀπὸ 18 μῆνας. Ζητεῖται ποῖον ἄθροισμα πρέπει νὰ φερθῇ ἐπὶ τοῦ γραμματίου, ὄντος τοῦ τόκου $\frac{3}{4}$ τὰ 100 τὸν κάθε μῆνα.

Ἀνάλυσις. Ἀμέσως ἐννοοῦμεν, ὅτι τὸ γραμμάτιον πρέπει νὰ σύγκηται ἀπὸ τὸ ἄθροισμα χρεωστούμενον εἰς τὴν στιγμὴν τῆς ἀγορᾶς, αὐξανόμενον ἀπὸ τὸν τόκον του διὰ 18 μῆνας.

Τούτου τεθέντος, ἐπειδὴ $\frac{3}{4}$ ἐκφράζει τὸν τόκον

τῶν 100φρ. τὸν μῆνα, ἕπεται, ὅτι $\frac{3}{4}\times 18$ ἢ 13,50 ἐκφράζει τὸν τόκον διὰ τοὺς 18 μῆνας.

Λοιπὸν διὰ νὰ προσδιορίσωμεν τὸν τόκον τῶν 3859,25, ἀρκεῖ νὰ συστήσωμεν τὴν ἀναλογίαν 100: 13,50: ; 3859,25 : X.

Ὅθεν $X=\frac{3859,25\times 13,50}{100}=520,99875$, ἢ 521φρ.

Προσθέτοντες τοῦτον τὸν τόκον εἰς τὰς 3859,25, λαμβάνομεν 4380,25 διὰ τὸ ὅλον τοῦ γραμματίου.

Ἡ βεβαίωσις ταύτης τῆς ἐργασίας ἐκτελεῖται κατὰ τὴν ὑφαίρεσιν ἐσωτερικῶς. Συσταίνομεν δὲ τὴν ἀναλογίαν.

113150 : 100 :: 4380,25 : X.

Καὶ ὁ τέταρτος ὅρος ταύτης τῆς ἀναλογίας ἐκφράζων τὴν παροῦσαν τιμὴν τοῦ γραμματίου τῶν 4380φρ., 25ἑκ. εἶναι ἴσος μὲ 3859φρ., 25ἑκ.

Θέλομεν θέσει εἰς τὸ τέλος τοῦ ὀγδόου κεφαλαίου τὰς συνθέτους μεθόδους τοῦ τόκου καὶ τῆς ὑφαιρέσεως.

Περὶ τῆς μεθόδου τῆς ἑταιρείας.

§. 232. Αὕτη ἡ νέα μέθοδος ἔχει σκοπὸν νὰ μερίσῃ εἰς πολλοὺς συντρόφους μιᾶς πραγματείας τὸ κέρδος ἢ τὸν χαμὸν, τὸ ὁποῖον πορίζεται ἀπὸ τὴν ἑταιρείαν των.

Ἐν γένει ἐσυμφώνησαν μεταξύ των οἱ ἔμποροι, καὶ τοῦτο εἶναι εἰς τὸν αὐτὸν καιρὸν σύμφωνον μὲ τὸν ὀρθὸν λόγον καὶ μὲ τὴν δικαιοσύνην, νὰ ἦναι τὸ μέρος ἑκάστου ἀνάλογον μὲ τὴν καταβολήν του, ὅταν οἱ

χρόνοι ἦναι ἴσοι, ἢ μὲ τὸ γινόμενον τῆς καταβολῆς ἐπὶ τὸν χρόνον, καθ' ὃν μένει εἰς τὸ ἐμπόριον, ὅταν οἱ χρόνοι ἦναι ἄνισοι.

Τὸ ζήτημα θεωρούμενον γενικώτερον εἶναι, ὁ μερισμὸς δοθέντος τινὸς ἀριθμοῦ, (ὅςτις εἶναι ἢ κέρδος ἢ χαμὸς) εἰς μέρη κατ' εὐθεῖαν ἀνάλογα μὲ ἄλλους δεδομένους ἀριθμούς. Ἔστω λοιπὸν A ὁ μεριστέος ἀριθμὸς, μ, ν, π, κ . . . . οἱ ἀριθμοὶ ἀναλόγως τῶν ὁποίων τὸ A πρέπει νὰ μερισθῇ, καὶ χ, χ', χ'', χ''' . . . . τὰ διάφορα μέρη.

Ἔχομεν ἐξαιτίας τῆς ἐκφράσεως τὴν σειρὰν τῶν ἴσων λόγων,

$$\mu:\chi::\nu:\chi'::\pi:\chi''::\kappa:\chi''' \ldots,$$

ὅθεν κάμνοντες (ἀρ. 214) τὸ ἄθροισμα τῶν ἡγουμένων, καὶ τὸ τῶν ἑπομένων, συνάγομεν,

$$\mu+\nu+\pi+\kappa.+\ldots:\chi+\chi'+\chi''+\chi'''+\ldots::\mu:\chi$$

ἢ, ἐπειδὴ $\chi+\chi'+\chi''+\chi'''+$ . . . . ἢ τὸ ἄθροισμα τῶν μερῶν εἶναι ἴσον μὲ A, διὰ τοῦτο

$$\mu+\nu+\pi+\kappa+\ldots\ldots:A::\mu:\chi$$
$$::\nu:\chi'$$
$$::\pi:\chi''$$
$$::\kappa:\chi'''.$$

Τοῦτο μᾶς φανερόνει, ὅτι διὰ νὰ προσδιορίσωμεν ἕκαστον τῶν μερῶν, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν μεριστέον ἀριθμὸν A ἀμοιβαίως ἐπὶ ἕκαστον τῶν ἀριθμῶν μ, ν, π, κ . . . , καὶ νὰ διαιρέσωμεν τὸ γινόμενον τοῦ ἀθροίσματος $\mu+\nu+\pi+\kappa$ . . . τούτων τῶν ἰδίων ἀριθμῶν.

Ἂς κάμωμεν μερικὰς ἐφαρμογάς.

§. 233. **Πρῶτον παράδειγμα.** Τρεῖς ἄνθρωποι ἡνώθησαν εἰς ἐμπορικὴν τινὰ ὑπόθεσιν. Ὁ μὲν πρῶτος κατέβαλε 15000^φρ.^, ὁ δεύτερος 22540^φρ.^, καὶ ὁ τρίτος 25600. Ὕστερον ἀπὸ ἕνα χρόνον ἐκέρ-

δησαν 12000φρ. Ζητεῖται πόσον ἀνήκει εἰς ἕκαστον τῶν συντρόφων;

Ἀνάλυσις. Ἕπεται ἐκ τῶν προηγουμένων παρατηρήσεων (καὶ τὸ ὁποῖον εἶναι ἀφ' ἑαυτοῦ φανερὸν), ὅτι ἡ ὁλικὴ καταβολὴ, ἢ τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν καταβολῶν, εἶναι εἰς τὸ ὁλικὸν κέρδος, ὡς πᾶσα μία καταβολὴ εἶναι εἰς τὸ ἀνταποκρινόμενον κέρδος εἰς αὐτήν.

Λοιπὸν κάθε μερικὸν κέρδος εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τοῦ ὅλου κέρδους καὶ τῆς μερικῆς καταβολῆς, ἀφ' οὗ διαιρεθῇ διὰ τῆς ὁλικῆς καταβολῆς.

Τούτου τεθέντος, κάμνοντες κατὰ πρῶτον τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν τεθέντων, συνάγομεν τὸ ἄθροισμα 63140φρ.

Οὕτω συνάγομεν διαδοχικῶς διὰ τὰς ἐκφράσεις τῶν τριῶν κερδῶν.

$$1^{\text{ον}}\ \text{κέρδος}\quad x=\frac{12000\times15000}{63140}=1850{,}81.$$

$$2^{\text{ον}}\qquad x'=\frac{12000\times22540}{63140}=4283{,}81.$$

$$3^{\text{ον}}\qquad x''=\frac{12000\times25600}{63140}=\frac{4856{,}38}{12000{,}00}$$

Αὐτὴν τὴν πρᾶξιν βεβαιόνομεν προσέτι κάμνοντες τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν κερδῶν, καὶ ἐὰν ἡ πρᾶξις ἦναι ἀκριβὴς, τὸ ἄθροισμα πρέπει νὰ ἦναι ἴσον μὲ τὸ ὅλον κέρδος 12000φρ.

Δεύτερον παράδειγμα. Εἷς ἄρχισε μίαν ἐπιχείρησιν μὲ ἄθροισμά τι ἀπὸ 25000φρ. Ἔπειτα ἀπὸ 5 μῆνας θέλων νὰ ἐκτείνῃ τὴν ἐπιχείρησίν του ἔλαβεν ἕνα σύντροφον, ὅστις ἔθεσε 40000. Ἔπειτα ἀπὸ 6 μῆνας ἔλαβεν ἕνα δεύτερον, ὅστις τοῦ ἐδάνεισεν

ἄλλο ἄθροισμα 6000γρ. Ἔπειτα ἀπὸ 2 χρόνους ἐκέρδησεν 80000γρ. Περιπλέον ἐσυμφωνήθη νὰ λάβῃ ἐκεῖνος, ὅςτις ἐδιεύθυνε τὰς ὑποθέσεις τοῦ ἐμπορίου, 5 τὰ 100 ἀπὸ τὸ ὅλον κέρδος, ἐκτὸς τοῦ μέρους, τὸ ὁποῖον τοῦ ἀνήκει ἀναλόγως μὲ τὴν ποσότητα, τὴν ὁποίαν κατέβαλε. Ζητεῖται τὸ μέρος ἑκάστου τῶν τριῶν συντρόφων.

Ἀνάλυσις. Ἐπειδὴ ὁ πρῶτος πρέπει διὰ πληρωμὴν τοῦ ἔργου του νὰ λάβῃ πρῶτον 5 τὰ $\frac{0}{0}$ ἀπὸ τὸ ὅλον κέρδος, διὰ τοῦτο θέλει πάρει τὰ $\frac{5}{100}$ ἢ $\frac{1}{20}$ ἀπὸ τὰς 80000γρ., τουτέστι 4000.

Λοιπὸν μένουσι 76000γρ. νὰ μερισθῶσιν εἰς τοὺς τρεῖς συντρόφους ἀναλόγως μὲ τὴν καταβολήν των, ἢ καλήτερα μὲ τὰ γινόμενα τῶν καταβολῶν των ἐπὶ τοὺς χρόνους, εἰς τοὺς ὁποίους ἐτέθησαν εἰς τὴν ἐπιχείρησιν, ἐπειδὴ οἱ χρόνοι εἶναι διαφορετικοί.

Τῷ ὄντι. 1ον. Τὰ 25000γρ. τοῦ πρώτου, μὲ τὸ νὰ ἐτέθησαν διὰ 24 μῆνας, ἄγονται εἰς 2500×24 ἢ 60000γρ., ὡς νὰ ἤθελαν βαλθῇ 1 μόνον μῆνα.

2ον. Τὰ 40000γρ. τοῦ πρώτου συντρόφου, τὰ ὁποῖα ἐστάθησαν 24 — 5 μῆνας ἢ 19μην. εἰς τὴν εταιρείαν, διὰ τοῦτο γίνονται 40000γρ.×19 ἢ 760000γρ. ὡς νὰ ἐτέθησαν διὰ 1 μῆνα.

3ον. Καὶ τέλος πάντων τὰ 60000γρ. τοῦ δευτέρου συντρόφου του, θεμένα εἰς τὴν εταιρείαν 24 — 5 — 6 ἢ 13μην. ἰσοδυναμοῦν μὲ 60000×13 ἢ 780000, ὡς νὰ ἐτέθησαν διὰ 1 μόνον μῆνα.

Λοιπὸν τὸ ζήτημα τρέπεται εἰς τὸ νὰ διαιρέσωμεν 76000γρ. ἀναλόγως μὲ τοὺς τρεῖς ἀριθμοὺς 600000, 760000 καὶ 780000; ἤ, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ αὐτό, ανα-

λόγως, μὲ τοὺς τρεῖς ἀριθμοὺς 60, 76 καὶ 78. Τούτου τεθέντος, εὑρίσκομεν κατὰ πρῶτον τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν τελευταίων ἀριθμῶν, 214. Οὕτως θέλομεν λάβει διαδοχικῶς τὰ τρία μέρη.

$$1^{ον}\text{ μέρος} \ldots \frac{76000\times60}{124} = 21308{,}41$$

ἢ προσθέτοντες τὰ 4000φρ., τὰ ὁποῖα ἀνήκουν εἰς αὐτὸν, ὡς βραβεῖον τῆς δουλεύσεώς του, συνάγομεν 25308,41

$$2^{ον} \ldots \frac{76000\times76}{214} = \frac{5776000}{214} = 26990{,}65$$

$$3^{ον} \ldots \frac{76000\times78}{214} = \frac{5928000}{214} = 27700{,}94$$

βεβαιότης . . . 80000φρ.,00.

§. 234. Ἡ μέθοδος τῆς ἑταιρείας εἶναι μία τῶν συνηθεστέρων ἐργασιῶν εἰς τοὺς πεπολιτευμένους ἀνθρώπους.

Αἱ συνεισφοραὶ, τὰς ὁποίας οἱ ὑπήκοοι ἑνὸς βασιλείου πληρόνουσιν εἰς τὴν κυβέρνησιν, λαμβάνονται διὰ τῶν ἀληθινῶν κανόνων τῆς ἑταιρείας.

Καλεῖται συνεισφορὰ, ἡ ποσότης, τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ πληρόνῃ ἕκαστος σχετικῶς μὲ τὸ εἰσόδημα, τὸ ὁποῖον νομίζουν, ὅτι ἔχει. Τοῦτο εἶναι ἀληθινὴ ζημία δι' αὐτὸν, ἀλλὰ ζημία, εἰς τὴν ὁποίαν αὐτοθελήτως ὑποτάττεται, διὰ νὰ βοηθήσῃ τὴν κυβέρνησιν εἰς τὰ πράγματά της, καὶ εἰς τὰς δυνάμεις της, διὰ τὴν ὠφέλειαν καὶ εὐτυχίαν ὅλων.

Τὸ περὶ τῶν συνεισφόρων ἀριθμοῦ τινὸς ἀνθρώπων ἑνὸς βασιλείου, τῆς Γαλλίας φερ' εἰπεῖν, ζήτημα, ἐκ πρώτης ὄψεως φαίνεται πολὺ περιπεπλεγμένον·

ἀλλ' ἀπὸ τὰς ἀκολούθους παρατηρήσεις καταλαμβάνομεν πόσον ἡ λύσις εἶναι ἁπλουστάτη.

Ἄς ὑποθέσωμεν πρὸς ἀκριβῆ τούτου κατάληψιν, ὅτι ὁ λόγος εἶναι μόνον περὶ τῶν εἰς τοὺς ἀγροὺς διορισμένων συνεισφορῶν, τῶν ὁποίων ἡ τιμὴ εἶναι Α. Πῶς θέλει ληφθῇ αὕτη ἡ ποσότης;

Σχόλιον. Ἀρχίζει ὁ ὑπουργὸς τοῦ ταμείου νὰ διαμοιράζῃ τὸ ἄθροισμα Α εἰς ὅλας τὰς ἐπαρχίας, αἱ ὁποῖαι συγκροτοῦν τὸ βασίλειον, ἀναλόγως μὲ τὰ νομιζόμενα εἰσοδήματα αὐτῶν.

Ἔστω Β τὸ ἄθροισμα, τὸ ὁποῖον μία τις ἐπαρχία μέλλει νὰ πληρώσῃ εἰς τὸ μερίδιόν της.

Ἐπειδὴ αὕτη ἡ ἐπαρχία διαιρεῖται εἰς τρεῖς ἢ τέσσαρας περιοχὰς, τῶν ὁποίων τὰ εἰσοδήματα εἶναι γνωστὰ, μερίζεται παρὰ τῆς τοπικῆς κυβερνήσεως τὸ ἄθροισμα Β εἰς ὅλας τὰς περιοχὰς ἀναλόγως μὲ τὰ εἰσοδήματά των.

Ἔστω Γ τὸ ἄθροισμα, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ πληρώσῃ περιοχή τις εἰς τὸ μερίδιόν της.

Αὕτη ἡ περιοχὴ ὑποδιαιρεῖται εἰς πολλὰς κοινότητας, καὶ ἀπὸ τὴν τοπικὴν Κυβέρνησιν αὐτῆς γίνεται ἡ διαίρεσις τοῦ ἀθροίσματος Γ εἰς ὅλας τὰς κοινότητας ἀναλόγως μὲ τὰ νομιζόμενα εἰσοδήματά των.

Ἔστω Δ τὸ μερίδιον, τὸ ὁποῖον πληράνει μία κοινότης.

Τέλος πάντων αὕτη ἡ κοινότης σύγκειται ἀπὸ ἀριθμὸν τινὰ κτημάτων, εἴτε οἰκιῶν, εἴτε γαιῶν, εἴτε λειμώνων, εἴτε ξύλων, τῶν ὁποίων τὰ εἰσοδήματα ἐκτιμῶνται, καὶ μερίζεται ἡ συνεισφορὰ Δ εἰς τοὺς κτηματικοὺς ἀνολόγως μὲ τὰ νομιζόμενα εἰσοδήματά των.

Ἀφ' οὗ μίαν φορὰν συστηθῇ ὁ κατάλογος τῶν συνεισφορῶν ὅλων τῶν κτηματικῶν, ἕκαστος αὐτῶν

δίδει τὸ μέρος εἰς τὰς χεῖρας τοῦ συνακτοῦ τῆς κοινότητος. Οὗτος τὰ παραδίδει εἰς τὸν συνακτὴν τῆς περιοχῆς, καὶ οὗτος πάλιν εἰς τὸν γενικὸν τῆς ἐπαρχίας συνακτήν· καὶ τέλος πάντων ὅλοι οἱ συνακταὶ τῶν ἐπαρχιῶν ἐγχειρίζουσι τὰς ποσότητας εἰς τὸ ταμεῖον: ἡ δὲ Κυβέρνησις λαμβάνει οὕτω τὸ γενικὸν ἄθροισμα τῶν συνεισφορῶν.

§. 235. Ἰδοὺ καὶ ἄλλα ζητήματα, τὰ ὁποῖα προσκολλῶνται εἰς τὴν μέθοδον τῆς ἑταιρείας.

Τρίτον παράδειγμα. Νὰ μερίσωμεν ἄθροισμάτι 36000^{φρ}· εἰς τέσσαρας ἀνθρώπους, εἰς τρόπον, ὥστε ὁ δεύτερος νὰ λάβῃ δύο φοραῖς τόσον, ὅσον ὁ πρῶτος, καὶ ὁ τρίτος τόσον μόνος του, ὅσον ὁμοῦ καὶ οἱ δύο πρῶτοι, καὶ ὁ τέταρτος νὰ λάβῃ τρεῖς φοραῖς τόσον, ὅσον ὁ τρίτος.

Ὅσον ὀλίγον καὶ ἂν σκεφθῶμεν περὶ τῆς φύσεως τούτου τοῦ ζητήματος, βλέπομεν, ὅτι ἐὰν τὸ μέρος τοῦ πρώτου ληφθῇ ὡς μονὰς, ἢ σημειωθῇ μὲ 1., τὸ τοῦ δευτέρου θέλει εἶναι 2, καὶ τὸ τοῦτρίτου 2+1 ἢ 3· τέλος πάντων ἐκεῖνο τοῦ τετάρτου 3×3 ἢ 9. Λοιπὸν τὸ ζήτημα ἄγεται εἰς τὸ νὰ μερίσωμεν 36000 εἰς τέσσαρα μέρη, τὰ ὁποῖα νὰ ἦναι πρὸς ἄλληλα, ὡς οἱ ἀριθμοὶ, 1, 2, 3 καὶ 9, καὶ εἰσάγεται ἑπομένως εἰς τὸ γενικὸν ζήτημα τοῦ ἀριθ. 232.

Ἀθροίζοντες πρῶτον τοὺς τέσσαρας ἀριθμοὺς 1, 2, 3, 9, λαμβάνομεν 15.

Οὕτως ἐξάγομεν διαδοχικῶς τὰ τέσσαρα μέρη.

$\overline{1}^{ov.}$ μέρος . . . . . . $\frac{1\times36000}{15} = 2400$

$\overline{2}^{ov.}$ . . . . $\frac{2\times36000}{15} = 4800$

$\overline{3}^{ov.}$ . . . . $\frac{3\times36000}{15} = 7200$

$\overline{4}^{ov.}$ . . . . $\frac{9\times36000}{15} = \frac{21600}{36000}.$

Κάποτε οἱ ἀριθμοὶ, ἀναλόγως τῶν ὁποίων πρέπει νὰ μερίσωμεν δεδομένον τι ἄθροισμα, εἶναι κλάσματα ἢ κλασματικοὶ ἀριθμοί.

Πλὴν μὲ εὐκολίαν δυνάμεθα νὰ φέρωμεν ταύτην τὴν περίστασιν εἰς ἐκείνην, εἰς τὴν ὁποίαν οἱ ἀριθμοὶ εἶναι ἀκέραιοι, ἀνάγοντες τὰ κλάσματα ταῦτα εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστήν.

Οὕτως διὰ νὰ διαιρέσωμεν δεδομένον τι ἄθροισμα α, κατὰ μέρη ἀνάλογα εἰς τὰ κλάσματα $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, ἀνάγομεν ταῦτα τὰ κλάσματα κατὰ πρῶτον εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν, καὶ τρέπομεν εἰς $\frac{8}{12}$, $\frac{9}{12}$, $\frac{10}{12}$. Τώρα, ἐπειδὴ κλάσματα ἔχοντα τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν εἶναι μεταξύ τῶν (ἀρ. 220), ὡς οἱ ἀριθμηταίτων, μερίζομεν εὐθὺς τὸ ἄθροισμα α, εἰς μέρη ἀνάλογα μὲ τοὺς δεδομένους ἀριθμοὺς, 8, 9, καὶ 10, ἡ ὁποία πρᾶξις διαδοχικῶς δίδει

$\frac{8\alpha}{27}$, $\frac{9\alpha}{27}$, $\frac{10\alpha}{27}$, τὰ τρία ζητούμενα μέρη.

Τέταρτον παράδειγμα. Ἀποθνήσκων τὶς ἄφησε τέσσαρας κληρονόμους, καὶ ἔκαμε ταύτην τὴν περίεργον διαθήκην· ὁ πρῶτος κληρονόμος νὰ λάβῃ τὸ 6^τον^., ὁ δεύτερος τὰ $\frac{2}{5}$, ὁ τρίτος τὰ $\frac{4}{9}$, καὶ ὁ τέταρτος τὸ τρίτον ὅλων τῶν ὑπαρχόντων.

Ζητεῖται τί ἀνήκει εἰς ἕκαστον, τῆς κληρονομίας συμποσουμένης εἰς 40000^φρ^·

Λύσις. Ἐὰν τὸ ἄθροισμα τῶν τεσσάρων κλασμάτων, $\frac{1}{6}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{4}{9}$ καὶ $\frac{1}{3}$ ἦτον ἴσα μὲ 1, τότε αἱ συνθῆκαι τῆς διαθήκης εὐκόλως ἤθελαν πληρωθῇ· ἐπειδὴ ἀρκοῦσε τότε νὰ λάβωμεν διαδοχικῶς τὸ 6^τον^. τῶν 40000, τὰ $\frac{2}{5}$ τῶν 40000 κ. τ. λ. καὶ ἠθέλαμεν ἔχει τὰ τέσσαρα μέρη.

Ἀλλ' ἀνάγοντες τὰ κλάσματα εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν, εὑρίσκομεν $\frac{15}{90}$, $\frac{36}{90}$, $\frac{40}{90}$, $\frac{30}{90}$, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα εἶναι ἴσον μὲ $\frac{121}{90}$, ἢ 1 $\frac{31}{90}$, ἐξαγόμενον μεῖζον τῆς μονάδος, ἐκ τοῦ ὁποίου βλέπομεν, ὅτι ἡ κληρονομία ἤθελεν ἀποῤῥοφηθῆ ὅλη ἀπὸ τοὺς τρεῖς πρώτους κληρονόμους, ἐὰν ἤθελεν ἐκτελεσθῆ ἡ πρᾶξις κατὰ τὴν κυριολεξίαν τῆς διαθήκης.

Πλὴν ἐὰν σκεφθῶμεν περὶ τῆς ἐκφράσεως, βλέπομεν, ὅτι ὁ σκοπὸς τοῦ διατιθεμένου ἦτον νὰ διαιρέσῃ τὴν οὐσίαν του εἰς τοὺς τέσσαρας κληρονόμους εἰς τρόπον, ὥστε τὰ μέρη αὐτῶν νὰ ἦναι ἀναμεταξύ των ὡς οἱ ἀριθμοὶ $\frac{1}{6}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{1}{3}$.

Οὕτως θέλομεν πληρώσει τὸν σκοπὸν τοῦτον διαιροῦντες τὰς 40000 εἰς μέρη ἀνάλογα μὲ τὰ τέσσαρα κλάσματα, καὶ ἐπομένως μὲ τοὺς τέσσαρας ἀριθμοὺς 15, 36, 40, καὶ 30. τοῦ δὲ ἀθροίσματος τῶν ἀριθμῶν τούτων ὄντος 121, λαμβάνομεν διαδοχικῶς τὰ μέρη ταῦτα.

$\overline{1}^{ον}$, μέρος. . . . . $\dfrac{15\times40000}{121} =$ 4958γρ., 68

$\overline{2}^{ον}$. . . . . . $\dfrac{36\times40000}{121} =$ 11900, 82

$\overline{3}^{ον}$. . . . . . $\dfrac{40\times40000}{121} =$ 13223, 14

$\overline{4}^{ον}$. . . . . . $\dfrac{30\times40000}{121} =$ 9917, 36

40000, 00

Πέμπτον παράδειγμα. Ἔγεινεν Ἱππασία τις ἀπὸ 1200 ἵππους, οἱ ὁποῖοι μέλλουν νὰ διανεμηθῶσιν εἰς τρία τάγματα ἱππέων ς ἀναλόγως μὲ τὸν ἀριθμὸν τῶν στρατιωτῶν ἑκάστου τάγματος· ὁ ἀριθμὸς τοῦ πρώτου τάγματος εἶναι εἰς ἐκεῖνον τοῦ δευτέρου, καθὼς 11 πρὸς 8· τοῦ δὲ πρώτου εἶναι πρὸς τὸν τρίτον καθὼς 9 πρὸς 7. Ζητεῖται πόσους ἵππους θέλει ἔχει ἕκαστον τάγμα;

Ἕπεται προφανῶς ἐκ τῆς ἐκφράσεως ὅτι, ὁ ἀριθμὸς τῶν ἵππων τοῦ δευτέρου τάγματος, πρέπει νὰ ἦναι τὰ $\frac{8}{11}$ ἐκείνων τοῦ πρώτου.

Παρομοίως ὁ ἀριθμὸς τῶν ἵππων τοῦ τρίτου εἶναι τὰ $\frac{7}{9}$ εἰς ἐκεῖνον τοῦ πρώτου. Λοιπὸν οἱ τρεῖς ζητούμενοι ἀριθμοὶ εἶναι μεταξύ των, ὡς οἱ ἀριθμοὶ 1,

$\frac{8}{11}$, $\frac{7}{9}$, ἢ, ἀναγομένων τῶν ἀκεραίων καὶ τῶν κλασμάτων εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν, ὡς οἱ τρεῖς ἀριθμοὶ 99, 72, 77.

Οὕτως λαμβάνομεν

διὰ τὸ $\overline{1}^{ον.}$ τάγμα . . . . $\frac{99\times1200}{248}=479\frac{1}{31}$

διὰ τὸ $\overline{2}^{ον.}$ . . . . $\frac{72\times1200}{248}=348\frac{12}{31}$

διὰ τὸ $\overline{3}^{ον.}$ . . . . $\frac{77\times1200}{248}=372\frac{12}{31}$

2000,0

Σ. Κ. Ἡ πρόσθεσις τῶν κλασμάτων δίδει 1, τουτέστιν ἀμελουμένων τῶν κλασμάτων, πρέπει νὰ δοθῇ εἷς ἵππος περισσότερον εἰς τὸ δεύτερον τάγμα, ἐπειδὴ ἔχει μικρότερον ἀριθμόν. Ὑπάρχουσιν ἄλλαι δύο μέθοδοι, αἵτινες χωρὶς νὰ ἐξαρτῶνται ἀκριβῶς ἀπὸ τὴν μέθοδον τῶν τριῶν, εἶναι ὅμως ὠφέλιμοι νὰ τὰς γνωρίσωμεν, ὡς συνηθεστάτας εἰς τοὺς τραπεζίτας, καὶ εἰς πολλοὺς κλάδους τοῦ ἐμπορίου. Αὗται εἶναι ἡ Συνεζευγμένη μέθοδος, καὶ ἡ τῆς μίξεως.

Περὶ τῆς Συνεζευγμένης Μεθόδου.

§. 236. Αὕτη ἡ μέθοδος ἔχει σκοπὸν νὰ προσδιορίσῃ τὸν λόγον τῶν νομισμάτων δύο τόπων, γνωστῶν ἤδη ὄντων τῶν λόγων, τοὺς ὁποίους αὐτὰ ἔχουσιν μὲ ἐκεῖνα ἄλλων τόπων. Καλεῖται δὲ Συνεζευγμένη μέθοδος, ἐπειδὴ συνίσταται εἰς τὸ νὰ συζεύξῃ καὶ νὰ ἑνώσῃ πολλοὺς δεδομένους λόγους εἰς ἕνα μόνον διὰ μέσου τοῦ πολλαπλασιασμοῦ· τὸ ὁποῖον δίδει ἀρχὴν (ἀρ. 215) εἰς σύνθετόν τινα λόγον.

Οὕτως θέλομεν πληρώσει τὸν σκοπὸν τοῦτον διαιροῦντες τὰς 40000 εἰς μέρη ἀνάλογα μὲ τὰ τέσσαρα κλάσματα, καὶ ἑπομένως μὲ τοὺς τέσσαρας ἀριθμοὺς 15, 36, 40, καὶ 30. τοῦ δὲ ἀθροίσματος τῶν ἀριθμῶν τούτων ὄντος 121, λαμβάνομεν διαδοχικῶς τὰ μέρη ταῦτα.

1ον, μέρος.	$\frac{15\times40000}{121}$	= 4958γρ·,	68
2ον.	$\frac{36\times40000}{121}$	= 11900,	82
3ον.	$\frac{40\times40000}{121}$	= 13223,	14
4ον.	$\frac{30\times40000}{121}$	= 9917,	36
		40000,	00

Πέμπτον παράδειγμα. Ἐγεινεν Ἱππασία τις ἀπὸ 1200 ἵππους, οἱ ὁποῖοι μέλλουν νὰ διανεμηθῶσιν εἰς τρία τάγματα ἱππέων ἀναλόγως μὲ τὸν ἀριθμὸν τῶν στρατιωτῶν ἑκάστου τάγματος· ὁ ἀριθμὸς τοῦ πρώτου τάγματος εἶναι εἰς ἐκεῖνον τοῦ δευτέρου, καθὼς 11 πρὸς 8· τοῦ δὲ πρώτου εἶναι πρὸς τὸν τρίτον καθὼς 9 πρὸς 7. Ζητεῖται πόσους ἵππους θέλει ἔχει ἕκαστον τάγμα;

Ἕπεται προφανῶς ἐκ τῆς ἐκφράσεως ὅτι, ὁ ἀριθμὸς τῶν ἵππων τοῦ δευτέρου τάγματος, πρέπει νὰ ἦναι τὰ $\frac{8}{11}$ ἐκείνων τοῦ πρώτου.

Παρομοίως ὁ ἀριθμὸς τῶν ἵππων τοῦ τρίτου εἶναι τὰ $\frac{7}{9}$ εἰς ἐκεῖνον τοῦ πρώτου. Λοιπὸν οἱ τρεῖς ζητούμενοι ἀριθμοὶ εἶναι μεταξύ των, ὡς οἱ ἀριθμοὶ 1,

$\frac{8}{11}$, $\frac{7}{9}$, ἤ, ἀναγομένων τῶν ἀκεραίων καὶ τῶν κλασμάτων εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν, ὡς οἱ τρεῖς ἀριθμοὶ 99, 72, 77.

Οὕτως λαμβάνομεν

διὰ τὸ $\overline{1}^{ον}$ τάγμα . . . . $\frac{99 \times 1200}{248} = 479\frac{1}{31}$

διὰ τὸ $\overline{2}^{ον}$ . . . . $\frac{72 \times 1200}{248} = 348\frac{12}{31}$

διὰ τὸ $\overline{3}^{ον}$ . . . . $\frac{77 \times 1200}{248} = 372\frac{12}{31}$

2000,0

Σ. Κ. Ἡ πρόσθεσις τῶν κλασμάτων δίδει 1, τουτέστιν ἀμελουμένων τῶν κλασμάτων, πρέπει νὰ δοθῇ εἷς ἵππος περισσότερον εἰς τὸ δεύτερον τάγμα, ἐπειδὴ ἔχει μικρότερον ἀριθμόν. Ὑπάρχουσιν ἄλλαι δύο μέθοδοι, αἵτινες χωρὶς νὰ ἐξαρτῶνται ἀκριβῶς ἀπὸ τὴν μέθοδον τῶν τριῶν, εἶναι ὅμως ὠφέλιμοι νὰ τὰς γνωρίσωμεν, ὡς συνηθεστάτας εἰς τοὺς τραπεζίτας, καὶ εἰς πολλοὺς κλάδους τοῦ ἐμπορίου. Αὗται εἶναι ἡ Συνεζευγμένη μέθοδος, καὶ ἡ τῆς μίξεως.

Περὶ τῆς Συνεζευγμένης Μεθόδου.

§. 236. Αὕτη ἡ μέθοδος ἔχει σκοπὸν νὰ προσδιορίσῃ τὸν λόγον τῶν νομισμάτων δύο τόπων, γνωστῶν ἤδη ὄντων τῶν λόγων, τοὺς ὁποίους αὐτὰ ἔχουσιν μὲ ἐκεῖνα ἄλλων τόπων. Καλεῖται δὲ Συνεζευγμένη μέθοδος, ἐπειδὴ συνίσταται εἰς τὸ νὰ συζεύξῃ καὶ νὰ ἑνώσῃ πολλοὺς δεδομένους λόγους εἰς ἕνα μόνον διὰ μέσου τοῦ πολλαπλασιασμοῦ· τὰ ὁποῖον δίδει ἀρχὴν (ἀρ. 215) εἰς σύνθετόν τινα λόγον.

Τὰ δύο ἀκόλουθα παραδείγματα θέλουν δώσει καλὴν ἰδέαν ταύτης τῆς μεθόδου, καὶ τοῦ τρόπου τοῦ ἐκτελεῖν αὐτήν.

Πρῶτον παράδειγμα.

	ἰσοδυναμοῦσι
48 φράγκα	μὲ 52 σχελίγγια τῆς Ἀγγλίας.
15 σχελ. τῆς Ἀγ. . . .	6 φλορίνια τῆς Γερμανίας.
50 φλ. τῆς Γερμ. . . .	7 δουκάτα τῆς Ἀμβούργης.
14 δουκ. τῆς Ἀμβ. . . .	40 ῥούβλια τῆς Ῥωσσίας.

Ζητεῖται, 2500 φράγκα, πόσα ῥούβλια τῆς Ῥωσσίας κάμνουσι;

Σ. Κ. Εἰδοποιοῦμεν τοὺς ἀναγνώστας, ὅτι οὗτοι οἱ ἀριθμοὶ, οἵτινες ἐκφράζουσι τοὺς λόγους διαφόρων νομισμάτων, ἐλήφθησαν σχεδὸν κατὰ ἀρέσκειαν, ἐπειδὴ δὲν ἔχομεν ὑπ' ὄψιν τὸν πίνακα τούτων τῶν λόγων, οἵτινες ὑπόκεινται εἰς μεταβολὰς, κατὰ τὰς ἀλλαγὰς μιᾶς πόλεως μὲ ἄλλην.

Λύσις. Ἄς σημειώσωμεν α, β, γ, δ, ε τὰς ἐσωτερικὰς τιμὰς τῶν πέντε νομισμάτων, τὰ ὁποῖα περιέχονται εἰς τὴν ἔκφρασιν, καὶ διὰ χ τὸν ἀριθμὸν τῶν ῥουβλίων, τὰ ὁποῖα σχηματίζουσι τὰ 2500 φράγκα, καὶ ἔχομεν κατὰ τὴν ἔκφρασιν τὰς ἀκολούθους ἰσότητας.

$$48\alpha = 52\beta,$$
$$15\beta = 6\gamma,$$
$$50\gamma = 7\delta,$$
$$14\delta = 40\varepsilon,$$
$$\chi\times\varepsilon = 2500\alpha.$$

Ὅθεν πολλαπλασιάζοντες ταύτας τὰς ἰσότητας μέλος ἐπὶ μέλος, καὶ ἐξαλείφοντες τοὺς κοινοὺς παράγοντας α, β, γ, δ, ε, συνάγομεν,

$$48\times15\times50\times14\times\chi = 52\times6\times7\times40\times2500$$

ῥούβ.

Λοιπὸν $\chi = \frac{52\times6\times7\times40\times2500}{48\times15\times50\times14} = 483\frac{1}{3}$.

Ἕπεται ἐκ τῆς παρατηρήσεως, ὅτι δὲν πρέπει νὰ ἐκτελέσωμεν τὰς πράξεις εἰς τὸν ἀριθμητὴν καὶ εἰς τὸν παρονομαστὴν, εἰμὴ ἀφ' οὗ ἐξαλείψωμεν τοὺς κοινοὺς παράγοντας τῶν ὅρων.

Εἰς τὴν πρᾶξιν, ἰδοὺ τίνι τρόπῳ ἐκτελοῦνται αὗται αἱ ἁπλότητες.

1 . . .	2 . . .	12 . . .	$48\alpha=$	52β . . .	13
		8	$15\beta=$	6γ . . .	1
		1 . . .	$50\gamma=$	7δ . . .	1
	1 . . .	2 . . .	$14\delta=$	40ε . . .	1
			$\chi\times\varepsilon=$	2500α . . .	100

Λοιπὸν $3\chi=13\times100$, ὅπου $\chi=433\frac{1}{3}$.

Ἀφ' οὗ θέσωμεν τὰς πέντε ἰσότητας τὴν μίαν ὑπὸ τὴν ἄλλην, ὡς ἀνωτέρω ἐπράξαμεν, ἐξαλείφομεν κατὰ πρῶτον τοὺς κοινοὺς παράγοντας α, β, γ, δ, ε, ἔπειτα τὸν παράγοντα 6; ὡς κοινὸν εἰς 12 καὶ 6 καὶ συνάγομεν 2 καὶ 1, μετὰ ταῦτα ἐξαλείφομεν τὸν κοινὸν παράγοντα 4 ἀπὸ τὸ 28 καὶ 32, καὶ γράφομεν τὰ πηλίκα 12 καὶ 13 εἰς τὸ πλευρὸν τῶν τοιούτων ἀριθμῶν.

Ἐξακολουθοῦμεν οὕτως, ἕως νὰ ἐξαλείψωμεν ὅλους τοὺς κοινοὺς παράγοντας ἀπὸ τὰ πρῶτα καὶ δεύτερα μέλη τῶν τοιούτων ἰσοτήτων, καὶ ἐκτελουμένης πάσης ἀναγωγῆς, φθάνομεν εἰς τὸ ἐξαγόμενον

$3\chi=1300$, ὅπου $\chi=\frac{1300}{3}=433\frac{1}{3}$.

Αὗται αἱ πράξεις ἀπαιτοῦσι μερικὴν ἕξιν, ἀλλὰ δὲν εἶναι δύσκολοι, πρέπει μόνον νὰ προσέχωμεν νὰ

διαγράφωμεν τοὺς ἀριθμοὺς, τοὺς ὁποίους διαιροῦμεν δι' ἑνὸς παράγοντος, καὶ νὰ ἀντεισάγωμεν τὸ πηλίκον.

Δεύτερον παράδειγμα.

Ἔμπορός τις Γάλλος θέλει νὰ στείλῃ εἰς τὸ Λονδίνον ἄθροισμά τι ἀπὸ 1200 λίβρας στερλίνας. Παρακαλεῖ λοιπὸν ἕνα τραπεζίτην τοῦ Παρισίου νὰ ἐπιφορτισθῇ ταύτην τὴν ὑπόθεσιν, πληρόνων εἰς αὐτὸν ἓν διὰ τὰ 100 ἐπὶ τοῦ ἀθροίσματος. Ζητεῖται εἰς φράγκα, τὸ ἄθροισμα, τὸ ὁποῖον μέλλει νὰ πληρώσῃ εἰς τὸν τραπεζίτην.

Ἠξεύρομεν δὲ ὅτι

26 λίβραι στερλίναι ἰσοδυναμοῦν μὲ 150 ῥούβλια.
75 ῥούβλια . . . . 30 δουκάτα τῆς Ἀμβούργης.
20 δουκάτα τῆς Ἀμβούργης . . 42 πιάστρα τῆς Ἰσπανίας.
12 πιάστρα τῆς Ἰσπανίας . . . 65 φράγκα.

Σημειόνοντες διὰ α, β, γ, δ, ε τὰς ἐσωτερικὰς τιμὰς τῶν νομισμάτων, καὶ διὰ χ τὴν τιμὴν τῶν 1200 λιβρῶν στερλινῶν εἰς φράγκα, ἔχομεν τὰς ἀκολούθους ἰσότητας.

1 . . . . 13 . . .	26α =	150β . . .	1
1 . . .	75β =	30γ . . .	3
1 . . .	20γ =	42δ . . .	21
1 . . .	12δ =	65ε . . .	5
	χ×ε =	1200α . . .	100

Ὅθεν ἐξάγομεν, ἐκτελοῦντες τὰς ἀναγωγὰς, ὡς ἀνωτέρω ἐδείξαμεν,

καὶ προσθέτοντες . . . χ=31500φρ.
1 διὰ τὰ 100 . . . . . = 315

31815

Λοιπὸν ὁ ἔμπορος πρέπει νὰ δώσῃ εἰς τὸν τραπεζίτην ἄθροισμα ἀπὸ 30815^φρ. διότι ἐπεφορτίσθη νὰ πληρώσῃ 1200 λίβρας στερλίνας εἰς Λονδίνον.

§. 237. Ἡ συνεζευγμένη μέθοδος δύναται ἀκόμη νὰ θεωρηθῇ ὡς μερικὴ περίστασις τῆς μεθόδου τῶν κλασμάτων, τὴν ὁποίαν ἐκθέσαμεν εἰς ἀριθμὸν 60.

Ἂς ἐπαναλάβωμεν τὸ πρῶτον τῶν δύο παραδειγμάτων τοῦ ἀνωτέρω ἀριθμοῦ.

Τὸ νὰ λέγωμεν, ὅτι 48 φράγκα ἰσοδυναμοῦν μὲ 52 σχελίγγια τῆς Ἀγγλίας εἶναι τὸ αὐτὸ, ὡς νὰ εἴπωμεν, ὅτι ἓν φράγκον ἰσοδυναμεῖ μὲ $\frac{52}{48}$ τοῦ Ἀγγλικοῦ σχελιγγίου· παρομοίως, ἐπειδὴ 15 σχελίγγια ἰσοδυναμοῦν μὲ 6 φλορίνια τῆς Γερμανίας, ἕπεται ὅτι ἓν σχελίγγιον ἰσοδυναμεῖ μὲ $\frac{6}{15}$ τοῦ φλορινίου τῆς Γερμανίας· καὶ διὰ τοῦτο 1 φράγκον ἰσοδυναμεῖ μὲ $\frac{52}{48}$ τῶν $\frac{6}{15}$ τοῦ φλορινίου τῆς Γερμανίας· παρομοίως, ἐπειδὴ 50 φλορίνια ἰσοδυναμοῦν μὲ 7 δουκάτα τῆς Ἀμβούργης, ἕπεται ὅτι 1 φλορίνιον ἰσοδυναμεῖ μὲ $\frac{7}{50}$ τοῦ δουκάτου τῆς Ἀμβούργης, καὶ διὰ τοῦτο 1 φράγκον ἰσοδυναμεῖ μὲ $\frac{52}{48}$ τῶν $\frac{6}{15}$ τῶν $\frac{7}{50}$ δουκάτων τῆς Ἀμβούργης.

Ἐξακολουθοῦντες τούτους τοὺς συλλογισμοὺς, φθάνομεν τέλος πάντων νὰ δείξωμεν ὅτι

2500^φρ. = 250 φοραῖς τὰ $\frac{52}{48}$ τῶν $\frac{6}{15}$ τῶν $\frac{7}{50}$ τῶν $\frac{40}{14}$

τοῦ ῥοβλίου. Λοιπὸν (ἀρ. 62) $2500^{\text{ϕρ}} = \frac{52\times6\times7\times40\times2500}{48\times15\times50\times14}$ τοῦ ῥουβλίου· ἐξαγόμενον, τὸ τὸ ὁποῖον καὶ ἀνωτέρω εὑρήκαμεν.

Περὶ τῆς μεθόδου τῆς μίξεως.

§. 238. Τὰ ζητήματα, ὅσα ἀνήκουσιν εἰς ταύτην τὴν μέθοδον, εἶναι δύο εἰδῶν.

Ἢ ἔχομεν σκοπὸν νὰ εὕρωμεν τὴν μέσην τιμὴν πολλῶν διαφόρων πραγμάτων, τῶν ὁποίων ὁ ἀριθμὸς καὶ ἡ μερικὴ τιμὴ ἑκάστου εἴδους εἶναι γνωστά,

Ἢ ζητοῦμεν νὰ γνωρίσωμεν τὰς ποσότητας κάθε εἴδους πραγμάτων, τὰ ὁποῖα μέλλουσι νὰ εἰσέλθουν εἰς μίξιν τινὰ, γνωρίζοντες ἤδη τὴν τιμὴν ἑκάστου εἴδους, καὶ τὴν ὅλην τιμὴν τοῦ μίγματος.

Θέλομεν θεωρήσει ἐνταῦθα μόνον τὴν πρώτην περίστασιν· τῆς δευτέρας δὲ ἡ θεωρία ἀνήκει εἰς τὴν Ἄλγεβραν.

Πρῶτον παράδειγμα. Οἰνοπώλης τις ἔμιξεν οἴνους διαφόρων ποιοτήτων, τουτέστι 250 λίτρα ἀπὸ 13 σολδία τὸ λίτρον, 180 λίτρα ἀπὸ $15^{\text{σολ.}}$, καὶ 200 ἀπὸ $16^{\text{σολ.}}$, καὶ ζητεῖ τὴν τιμὴν τοῦ λίτρου τοῦ μίγματος.

Παρατηροῦμεν κατὰ πρῶτον, ὅτι 250 λίτρα ἀπὸ $12^{\text{σολ.}}$ δίδουσι διὰ τὴν τιμὴν τῶν 250 λίτρων

	σολ.
250×12 ἢ	3000
Παρομοίως 18 λίτρα ἀπὸ $15^{\text{σολ.}}$ χάμνουσιν 180×15 ἢ	2700
Τέλος πάντων 200 λίτ. ἀπὸ $16^{\text{σολ.}}$ χάμνουσι 200×16 ἢ	3200
Ὅθεν συνάγομεν διὰ τὴν ὅλην τιμὴν τῶν τριῶν ποσοτήτων τῶν μεμιγμένων οἴνων $8900^{\text{σολ.}}$	8900

Ἐὰν τώρα κάμωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν ἀριθμῶν 250, 180 καὶ 200, τὸ ὁποῖον δίδει 630, τὸ ζήτημα ἄγεται εἰς τὸ ἀκόλουθον.

250
180
200
630

630 λίτρα οἴνου ἀξίζουσι 8900 σολδία, πόσον θέλει ἀξίζει τὸ λίτρον;

Διὰ νὰ εὕρωμεν ταύτην τὴν τιμὴν, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν 8900 διὰ 630, καὶ τὸ πηλίκον 14$^{\sigma o \lambda.}$ 1$^{\delta \eta \nu.}$, ἐκφράζει τὴν ζητουμένην τιμήν.

Κανὼν Γενικός. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν τιμὴν τῆς μονάδος τοῦ μίγματος, πρέπει· 1$^{o\nu.}$ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὴν τιμὴν τῆς μονάδος ἑκάστου εἴδους πραγμάτων, τὰ ὁποῖα θέλομεν νὰ μίξωμεν, ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν μονάδων τούτου τοῦ εἴδους, καὶ νὰ προσθέσωμεν τὰ γινόμενα. 2$^{o\nu.}$ Νὰ κάμωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν τῶν μονάδων τῶν διαφόρων εἰδῶν τῶν πραγμάτων. 3$^{o\nu.}$ Νὰ διαιρέσωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν γινομένων, ἢ τὴν ὅλην τιμὴν διὰ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀριθμῶν τῶν μονάδων.

Δεύτερον παράδειγμα. Θέλομεν νὰ χωνεύσωμεν ὁμοῦ 23 χιλιόγραμμα ἀργύρου πρὸς 825 χιλιοστημόρια καθαρότητος, καὶ 14 χιλιόγραμμα πρὸς 910, καὶ 19 πρὸς 945, καὶ Ζητεῖται ὁ βαθμὸς τῆς καθαρότητος τῶν τριῶν ὄγκων.

Σ. Κ. Διὰ νὰ ἐννοήσωμεν ταύτην τὴν ἔκφρασιν, πρέπει νὰ ἠξεύρωμεν, ὅτι οἱ χρυσοχόοι ἀνακατόνουν πάντοτε τὸ χρυσίον καὶ τὸ ἀργύριον μὲ ἄλλα μέταλλα, καθὼς μὲ τὸν χαλκόν.

Ὅθεν τότε λέγεται, ὅτι ἕνας ὄγκος ἐκ χρυσοῦ καὶ ἀργύρου ἔχει τοιοῦτον βαθμὸν καθαρότητος, ὅταν ἐπὶ ἑνὸς προσδιορισμένου βάρους, π. χ. ἑνὸς χιλιο-

γράμμου περιέχῃ τοιοῦτον βάρος χρυσοῦ, ἢ ἀργύρου καθαροῦ.

Οὕτως εἷς ὄγκος ἔχει $\frac{9}{10}$ καθαρότητος, ἢ εἶναι εἰς βαθμὸν τῶν $\frac{9}{10}$, ὅταν ἐπὶ ἑνὸς χιλιογράμμου τοῦ τοιούτου ὄγκου εὑρίσκονται $\frac{9}{10}$ τοῦ χιλιογράμμου ἀπὸ χρυσὸν ἢ ἄργυρον καθαρόν· (τοιοῦτον βαθμὸν ἔχουν τὰ παρόντα νομίσματα).

Παρομοίως ὄγκος τις εἶναι πρὸς 825 χιλιοστημόρια καθαρότητος, ὁπόταν ἐπὶ ἑνὸς χιλιογράμμου περιέχῃ $\frac{825}{1000}$ χρυσοῦ ἢ ἀργύρου.

Τούτου τεθέντος, συνάγομεν ἐκ τῆς ἐκφράσεως, ὅτι·

	χιλ.	χιλιοστ.		χιλιοστ.
1ον.	23	πρὸς 825 . . χάμνουν	23×825 ἢ	18975
2ον.	14	πρὸς 910	14×910 ἢ	12740
3ον.	$\frac{19}{56}$	πρὸς 845	19×845 ἢ	15055
				47770.

Λοιπὸν 56 χιλιόγραμμα ἑνωμένα ὁμοῦ περιέχουσι 47,770χιλιόγρ. ἀργύρου καθαροῦ. Ὅθεν ὁ βαθμὸς τῆς καθαρότητος τοῦ νέου ὄγκου ἐκφράζεται διὰ $\frac{47,770}{56}$, ἢ 0,853, τουτέστιν ὅτι ὁ προκύπτων ὄγκος ἀπὸ τὴν μίξιν τῶν τριῶν πρώτων εἶναι πρὸς 853 χιλιοστημόρια καθαρότητος.

Τρίτον παράδειγμα. Ἐμεταχειρίσθη τις εἰς ἔργον τι 500 ἐργάτας, ἀπὸ τοὺς ὁποίους 160 λαμβάνουσι 2φρ. τὴν ἡμέραν, οἱ 200 1φρ., 75ἑκ., καὶ

οἱ 140 ἀπὸ 1φρ., 50ἑκ. Ζητεῖται πόσον λαμβάνει, ἕνας μὲ τὸν ἄλλον, ἕκαστος ἐργάτης τὴν κάθε ἡμέραν;

160ἐργ.	ἀπὸ 2φρ. ἀποτελοῦν	320
200	ἀπὸ 1φρ., 75ἑκ.	350
140	ἀπὸ 1φρ., 50ἑκ.	210
500		880

Λοιπὸν ἐπειδὴ διὰ 500 ἐργάτας ἐξοδεύονται 880φρ., διὰ ἕνα μόνον ἐργάτην ἐξοδεύονται $\frac{880}{500}$ ἤ 1φρ., 76ἑκ. . . .

§. 239. Ὁ προσδιορισμὸς τῶν μέσων τιμῶν πολλῶν πραγμάτων διαφόρων τιμῶν, εἶναι μερικὴ περίστασις τῆς μεθόδου τῆς μίξεως τοῦ πρώτου εἴδους.

Καλεῖται μέση τιμὴ πολλῶν πραγμάτων, τῶν ὁποίων αἱ μερικαὶ τιμαὶ εἶναι ἤδη γνωσταί, τὸ ἄθροισμα τῶν τιμῶν τῶν πραγμάτων διαιρεθὲν διὰ τοῦ ἀριθμοῦ των.

Οὕτως ὅταν ἔχωμεν μόνον δύο πράγματα, η μέση τιμὴ εἶναι τὸ ἡμιάθροισμα τῶν τιμῶν τῶν πραγμάτων, ἢ μὲ ἄλλας λέξεις (ἀρ. 206) ὁ διαφορικὸς μέσος μεταξὺ τῶν τιμῶν τῶν δύο πραγμάτων.

Τέταρτον παράδειγμα. Ἐμετρήθη εἰς τέσσαρας διαφορετικὰς θέσεις τὸ μῆκος ἑνὸς περιφράγματος· εὑρέθη εἰς τὴν πρώτην φορὰν 250μετ., 439· τὴν δευτέραν 250μετ., 695· τὴν τρίτην 249μετ., 75· τέλος πάντων τὴν τετάρτην 251μετ., 158. Ζητεῖται τὸ μῆκος τοῦ περιφράγματος.

Ἐπειδὴ εἰς τὰς τέσσαρας πράξεις τὰ συναγόμενα μέτρα δὲν εἶναι σύμφωνα, εἶναι φανερὸν, ὅτι τὸ μόνον μέσον νὰ ἀποκριθῶμεν εἰς τὸ ζήτημα τοῦτο εἶναι νὰ συστήσωμεν τὸ μέσον μέτρον μεταξὺ ὅλων τῶν μέτρων.

Εὑρίσκομεν κατὰ πρῶτον τὸ ἄθροισμα τῶν τεσσάρων μέτρων 1002,042, καὶ διαιροῦντες διὰ 4 εὑρίσκομεν 250,5105 · τὸ μέσον μέτρον.	250,439 250,695 249,750 251,158 1002,042

„Μερικὰ ἄλλα Ζητήματα, τὰ ὁποῖα δύνανται νὰ λυθῶσι μὲ μόνην τὴν βοήθειαν συλλογισμοῦ.

§. 240. Εἰς ὅλα τὰ ἀνωτέρω ζητήματα, τὰ μέσα διὰ τῶν ὁποίων ἐφθάναμεν εἰς τὴν λύσιν, ἦτον στερεὰ καὶ γενικὰ, τουτέστιν ἱκανὰ νὰ ἐφαρμοσθῶσιν εἰς ὅλα τὰ ζητήματα τοῦ ἰδίου εἴδους. Ἀλλὰ δυνάμεθα νὰ προβάλλωμεν ἄπειρα ἄλλα, τὰ ὁποῖα ἔχουν σχέσιν εἰς ἕν μέρος τι μὲ αὐτὰ ἢ δὲν ἔχουν κάμμίαν. Εἰς ταύτην τὴν περίστασιν ἡ ἄλγεβρα μόνη παῤῥησιάζει ὀρθὰς καὶ εὐθείας μεθόδους λύσεως. Καὶ διὰ νὰ γυμνασθῇ ὁ νοῦς τῶν ἀρχαρίων, θέλομεν μεταχειρισθῆ μόνον τὸν συλλογισμόν. Καὶ τοῦτο καλεῖται ἐπιλύειν ἀριθμητικόν τι πρόβλημα.

Ἄς ἐνθυμηθῶμεν (ἀρ. 200) ὅτι νὰ λύσωμεν, ἢ νὰ ἀναλύσωμεν ἓν πρόβλημα, πρέπει νὰ συλλογισθῶμεν ἐπὶ τῆς ἐκφράσεώς του, καὶ νὰ ζητήσωμεν νὰ ἀνακαλύψωμεν εἰς τὰς σχέσεις αἱ ὁποῖαι ὑπάρχουν μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν τῶν εἰς αὐτὴν περιεχομένων, τὴν σειρὰν τῶν πράξεων, αἱ ὁποῖαι πρέπει νὰ ἐκτελεσθῶσιν ἐπὶ τῶν γνωστῶν ἀριθμῶν, διὰ νὰ προσδιορίσωμεν τὰς τιμὰς τῶν ἀγνώστων ἀριθμῶν.

Πρῶτον πρόβλημα. Ζητεῖται εἷς ἀριθμὸς τοῦ ὁποίου τὸ ἥμισυ, τὸ τρίτον, τὸ τέταρτον καὶ τὰ $\frac{2}{7}$ ἑνωμένα σχηματίζουσιν ἓν ἄθροισμα ἀπὸ 575.

Διὰ νὰ λύσωμεν ταύτην τὴν ὑπόθεσιν, παρατηροῦμεν, ὅτι νὰ λάβωμεν διαδοχικῶς τὸ ἥμισυ, τὸ τριτημόριον, τεταρτημόριον καὶ τὰ $\frac{2}{7}$ ἑνὸς ἀριθμοῦ, καὶ μετὰ ταῦτα νὰ ἑνώσωμεν ὅλα ταῦτα τὰ μέρη, ἄλλο δὲν εἶναι, εἰμὴ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τοῦτον τὸν ἀριθμὸν ἐπὶ τὸ ἄθροισμα τῶν κλασμάτων $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{2}{7}$, τουτέστιν ἐπὶ $\frac{115}{84}$ (ὅταν τὰ ἄξωμεν εἰς τοὺς αὐτοὺς παρονομαστάς). Ἐπειδὴ δὲ τὸ γινόμενον τοῦ ζητουμένου ἀριθμοῦ ἐπὶ $\frac{115}{84}$ πρέπει νὰ ἦναι ἴσον μὲ 575, ἕπεται, κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῆς διαιρέσεως, ὅτι οὗτος ὁ ἀριθμὸς εἶναι ἴσος μὲ τὸ πηλίκον τῶν 575 διαιρουμένων διὰ $\frac{115}{84}$; καὶ ἐπομένως (ἀρ. 59) μὲ $575\times\frac{84}{115}$.

Καὶ ἐκτελοῦντες τὸν δεικνυόμενον ὑπολογισμὸν εὑρίσκομεν τέλος πάντων 420 διὰ τὸν ζητούμενον ἀριθμόν.

Βάσανος	420
τὸ ἥμισυ	= 210
τὸ τριτημόριον	= 140
τὸ τεταρτημόριον	= 105
τὸ $\overline{7}^{ον}$	= 60
τὸ $\overline{7}^{ον}$	= 60
ὅλον	575.

Δεύτερον πρόβλημα. Ζητοῦνται τρεῖς ἀριθμοί, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα νὰ ἦναι ἴσον μὲ 96, καὶ τοιοῦτοι ὥστε ὁ δεύτερος νὰ ὑπερβαίνῃ τὸν

πρῶτον κατὰ 2, ὁ τρίτος νὰ ὑπερβαίνῃ τὸ ἄθροισμα τῶν ἄλλων δύο κατὰ 4 . . .

Εἶναι κατὰ πρῶτον φανερὸν, ὅτι ἐὰν ἐλαττώσωμεν τὸν δεύτερον ἀριθμὸν κατὰ 2, εὑρίσκομεν τὸν πρῶτον, καὶ ἐὰν ὀλιγοστεύσωμεν τὸν τρίτον κατὰ 2+4 ἢ κατὰ 6 μονάδας, εὑρίσκομεν τὸ διπλοῦν τοῦ πρώτου. Οὕτως τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν ἀριθμῶν, ὕστερον ἀπὸ τὰς δύο ἐλαττώσεις, θέλει εἶναι τὸ τριπλοῦν τοῦ πρώτου ἀριθμοῦ.

Πρὸς τούτοις, ἐὰν ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὰ 96 τὸ ἄθροισμα 2+6 μένει 88· λοιπὸν βλέπομεν, ὅτι τὸ τετραπλοῦν τοῦ πρώτου ἀριθμοῦ εἶναι ἴσον μὲ 88.

Λοιπὸν ὁ πρῶτος ἀριθμὸς ἔχει τιμὴν $\frac{88}{4}$ . . . ἢ 22

καὶ διὰ τοῦτο ὁ δεύτερος εἶναι ἴσος μὲ 22+2 ἢ 24

καὶ ὁ τρίτος μὲ . . . . 46+4 ἢ 50

Βάσανος 96

Τρίτον παράδειγμα. Νὰ εὕρωμεν δύο ἀριθμοὺς τοιούτους, ὥστε ἐὰν προσθέσωμεν 21 εἰς τὸν πρῶτον, τὸ προκύπτον ἄθροισμα νὰ ἦναι πενταπλάσιον τοῦ δευτέρου· καὶ ἐὰν προσθέσωμεν 21 εἰς τὸν δεύτερον, τὸ προκύπτον ἄθροισμα νὰ ἦναι τριπλοῦν τοῦ ἀριθμοῦ.

Ἕπεται κατὰ πρῶτον ἐκ ταύτης τῆς ἐκφράσεως, ὅτι ἡ διαφορὰ μεταξὺ τοῦ πενταπλασίου τοῦ δευτέρου καὶ τοῦ πρώτου εἶναι ἴση μὲ τὴν διαφορὰν τοῦ τριπλασίου τοῦ πρώτου καὶ τοῦ δευτέρου. Ὑπάρχει λοιπὸν ἰσοδιαφορὰ μεταξὺ τοῦ πενταπλασίου τοῦ δευτέρου ἀριθμοῦ, τοῦ πρώτου ἀριθμοῦ, τοῦ τριπλασίου τοῦ πρώτου, καὶ τοῦ δευτέρου· καὶ ἐπειδὴ εἰς κάθε ἰσοδιαφορὰν τὸ ἄθροισμα τῶν ἄκρων εἶναι ἴσον μὲ τὸ τῶν μέσων (ἀρ. 204), ἕπεται, ὅτι τὸ ἑξαπλάσιον τοῦ δευτέρου ἀριθμοῦ εἶναι ἴσον μὲ τὸ τετρα-

πλάσιον τοῦ πρώτου. Ἤδη λοιπὸν ὁ δεύτερος ἀριθμὸς εἶναι ἴσος μὲ $\frac{4}{6}$ ἢ $\frac{2}{3}$ τοῦ πρώτου. Οὗτος δὲ ὁ δεύτερος αὐξανόμενος ἀπὸ 21, δίδει τὸ τριπλάσιον τοῦ πρώτου, ἢ, τὸ ὁποῖον δηλοῖ τὸ αὐτὸ, 21 εἶναι ἴσον μὲ τὸ τριπλάσιον τοῦ πρώτου, ἐλαττούμενον κατὰ τὸν δεύτερον, ἢ κατὰ τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ πρώτου, τουτέστιν ἴσον μὲ $3-\frac{2}{3}$, ἢ μὲ $\frac{7}{3}$ τοῦ πρώτου.

Λοιπὸν τελευταῖον ὁ πρῶτος ἔχει τιμὴν $21\times\frac{3}{7}$ ἢ 9· ὁ δὲ δεύτερος, ὅςτις εἶναι τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ πρώτου, εἶναι ἴσος μὲ $9\times\frac{2}{3}$ ἢ 6.

Τῷ ὄντι· 1ον. 9+21 δίδει 30, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ πενταπλάσιον τοῦ 6. 2ον. 6+21 δίδει 27, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ τριπλάσιον τοῦ 9. Λοιπὸν οἱ δύο ἀριθμοὶ 9 καὶ 6 εἶναι οἱ ζητούμενοι.

Τέταρτον πρόβλημα. Ἐμεταχειρίσθη τις 3 ἐργάτας, διὰ νὰ κάμουν ἓν ἔργον, τὸ ὁποῖον ὁ μὲν πρῶτος ἠμποροῦσε νὰ τὸ κάμῃ μόνος του 12 ἡμέρας ἐργαζόμενος ἀπὸ 10 ὥρας κάθε ἡμέραν· ὁ δεύτερος εἰς 15 ἡμέρας ἀπὸ 6 ὥρας καθ' ἡμέραν, καὶ ὁ τρίτος εἰς 9 ἡμέρας ἀπὸ 8 ὥρας καθ' ἡμέραν. Ζητεῖται 1ον. εἰς πόσας ἡμέρας οἱ τρεῖς ἐργάται ὁμοῦ ἐργαζόμενοι θέλουν κάμει αὐτὸ τὸ ἔργον· 2ον. πόσον ἕκαστος θέλει κάμει· 3ον. πόσον θέλει κερδήσει, γνωστοῦ ὄντος, ὅτι διὰ τὸ ὅλον ἔργον ἐπληρώθησαν 108 φράγκα.

Λύσις. Παρατηροῦμεν κατὰ πρῶτον, ὅτι ὁ πρῶτος ἐργάτης ἤθελε κάμει τὸ ἔργον μόνος του εἰς 12×10 ἢ $120^{ὥρ.}$ Λοιπὸν εἰς μίαν ὥραν ἤθελε κάμει $\frac{1}{120}$ τοῦ ἔργου.

Ὁ δεύτερος ἤθελε τὸ ἐκτελέσει εἰς 15×6, ἢ $90^{ὥρ.}$ Λοιπὸν εἰς μίαν ὥραν ἤθελε κάμει $\frac{1}{90}$. Ὁ τρίτος ἤθελε κάμει εἰς 9×8, ἢ $72^{ὥρ.}$ Λοιπὸν εἰς μίαν ὥραν ἤθελε κάμει $\frac{1}{72}$.

Οἱ τρεῖς ἐργάται, ἐργαζόμενοι ὁμοῦ θέλουν κάμει λοιπὸν εἰς $1^{ὥρ.}$, $\frac{1}{120}+\frac{1}{90}+\frac{1}{72}$ ἢ $\frac{12}{360}$ ἢ $\frac{1}{30}$ τοῦ ἔργου.

Τώρα, ἐὰν εἰς $1^{ὥρ.}$ κάμνουν $\frac{1}{30}$ τοῦ ἔργου, εἶναι φανερὸν, ὅτι, ἐὰν ἐργασθῶσι 30 ὥρας, ἐκτελοῦσιν ὅλον τὸ ἔργον.

Πάλιν, ἐπειδὴ εἰς μίαν ὥραν ὁ πρῶτος ἔκαμε $\frac{1}{120}$, εἰς 30 ὥρας θέλει κάμει $\frac{1}{120} \times 30$ ἢ $\frac{1}{4} = \frac{3}{12}$. Παρομοίως ὁ δεύτερος θέλει κάμει εἰς 30 ὥρας $\frac{1}{90} \times 30$ ἢ $\frac{1}{3} = \frac{4}{12}$. Τέλος πάντων ὁ τρίτος εἰς 30 ὥρας θέλει κάμει $\frac{1}{72} \times 30$ ἢ $\frac{5}{12}$.

Μένει τώρα νὰ γνωρίσωμεν τί ἀνήκει νὰ λάβῃ ἕκαστος τῶν ἐργατῶν, κατὰ λόγον τῆς ἐργασίας, τὴν ὁποίαν ἔκαμε· καὶ διὰ τοῦτο ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν τὸ

108 εἰς μέρη ἀνάλογα μεταξὺ τῶν κλασμάτων $\frac{3}{12}$, $\frac{4}{12}$, $\frac{5}{12}$, ἢ μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν 3, 4 καὶ 5· καὶ οὕτω συνάγομεν (ἀρ. 235) 27, 36, 45 διὰ τὰ τρία ζητούμενα κέρδη.

Τὰ ἐπιλυθεύτα διάφορα ζητήματα εἶναι ἐξ ἐκείνων, τὰ ὁποῖα πολλοὶ συγγραφεῖς λύουσι διὰ τῆς μεθόδου τῆς καλουμένης ψευδοῦς ὑποθέσεως ἁπλῆς ἢ διπλῆς.

Ἐγὼ ἀπεσιώπησα τὸν μέθοδον ταύτην, ἐπειδὴ ἐν γένει δὲν εὐχαριστεῖ τὸ πνεῦμα, καὶ ἡ ἀκριβής της ἀπόδειξις ἐπιστηρίζεται εἰς μερικὰς ἀρχὰς τῆς ἀλγέβρας, ἀρχὰς, αἱ ὁποῖαι ἐφαρμόζονται μὲ περισσοτέραν εὐκολίαν εἰς τὴν ἄμεσον λύσιν τῶν αὐτῶν τούτων ζητημάτων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Η′.

Θεωρία τῶν Προόδων καὶ τῶν Λογαρίθμων.

Ἤθελ' εἶναι πλήρης ἡ πραγματεία αὕτη τῆς ἀριθμητικῆς, ἐὰν περιέκλειε τοὐλάχιστον τὰς πρώτας γνώσεις τῆς θεωρίας τῶν λογαρίθμων. Ἡ ὡραία αὕτη ἀνακάλυψις, ὀφειλομένη εἰς τὸν Νέπερον ἄρχοντα Σκῶτον, εἶναι ἡ ἀξιολογωτέρα ἀφ' ὅσας ἔγειναν εἰς τὴν Μαθηματικὴν, ἐπειδὴ μὲ τὴν συνδρομὴν πίνακός τινος λογαρίθμων ἐκτελοῦμεν τάχιστα τοὺς πλέον συμπεπλεγμένους ἀριθμητικοὺς ὑπολογισμούς.

Ἀλλὰ πρὶν ἀναπτύξωμεν τῆς θεωρίας ταύτης τὰς ἀρχὰς, πρέπει ἀφεύκτως νὰ γνωστοποιήσωμεν τὰς ἀρχικὰς ἰδιότητας δύο σειρῶν ἀριθμητικῶν, τὰς ὁποίας ἠμποροῦμεν νὰ θεωρῶμεν ὡς ἔκτασιν τῶν ἰσοδιαφορῶν καὶ ἀναλογιῶν. Αὗται εἶναι αἱ Πρόοδοι κατὰ διαφορὰν, καὶ αἱ Πρόοδοι κατὰ πηλίκον.

§. α^ος. Περὶ τῶν Προόδων.

§. 241. Πρόοδος κατὰ διαφορὰν (ἄλλοτε πρόοδος ἀριθμητικὴ) καλεῖται σειράτις ἀριθμῶν, ἕκαστος τῶν ὁποίων ὑπερέχει τὸν πρὸ ἑαυτοῦ ἢ εἶναι κατώτερος ἀπ' αὐτὸν κατ' ἀριθμὸν τινὰ σταθερὸν, ὁ ὁποῖος ὀνομάζεται ὁ λόγος ἢ ἡ διαφορὰ τῆς Προόδου.

Οὕτως ἔστωσαν αἱ δύο σειραί.

÷ 2 . 5 . 8 . 11 . 14 . 17 . 20 . 23 . 26 . 29 . . . .
÷ 60 . 55 . 50 . 45 . 40 . 35 . 30 . 25 . 20 . . . .

Εἰς τὴν πρώτην ἕκαστος ὅρος ὑπερβαίνει τὸν πρὸ ἑαυτοῦ κατὰ τὸν σταθερὸν ἀριθμὸν 3. Τῷ ὄντι 5 — 2 = 3, 8 — 5 = 3 . . . . Τὸ 3 λέγεται ὁ λόγος ἢ ἡ διαφορὰ τῆς προόδου.

Εἰς τὴν δευτέραν ἕκαστος ὅρος εἶναι κατώτερος ἀπὸ τὸν πρὸ ἑαυτοῦ κατὰ τὸν σταθερὸν ἀριθμὸν 5. οὕτως 60 — 55 = 5, 55 — 50 = 5, 50 — 45 = 5 . . . . Τὸ 5 εἶναι λοιπὸν ὁ λόγος τῆς προόδου.

Ἡ πρώτη καλεῖται πρόοδος αὔξουσα· ἐπειδὴ οἱ ὅροι πηγαίνουν αὐξαίνοντες, καὶ ἡ δευτέρα πρόοδος φθίνουσα· ἐπειδὴ οἱ ὅροι πηγαίνουν φθίνοντες ἤγουν ὀλιγοστεύοντες.

Διὰ νὰ ἐκφράσωμεν, ὅτι οἱ ἀριθμοὶ εἶναι εἰς πρόοδον κατὰ διαφορὰν θέτομεν ἐμπρόστων τὸ σημεῖον ÷ καὶ στιγμὴν μεταξὺ τῶν διαφόρων ὅρων.

Ἡ γραφὴ αὕτη προέρχεται ἐκ τοῦ ὅτι ἡ κατὰ διαφορὰν πρόοδος κατὰ τὸν ὁρισμόν της εἶναι σειρὰ συνεχῶν ἰσοδιαφορῶν (ὅρ. ἀριθμ. 206).

Ἡ πρόοδος ἐκφράζεται ἄλλως, οὕτως (θεωρουμένης τῆς πρώτης τῶν δύο προηγουμένων προόδων) 2 εἶναι πρὸς 5, ὡς 5 πρὸς 8, ὡς 8 πρὸς 11, ὡς 11 πρὸς 14.

Σ. Κ. Εὐκόλως βλέπομεν, ὅτι εἰς τὴν σειρὰν τῆς ἰσοδιαφορᾶς,

2 . 5 : 5 . 8 : 8 . 11 : 11 . 14 : 14 . 17 .

ἕκαστος ὅρος τῆς προτεθείσης προόδου εἶναι ἐν ταὐτῷ ἑπόμενος καὶ ἡγούμενος, ἐξαιρουμένου τοῦ πρώτου, ὅςτις εἶναι ἡγούμενος; καὶ τοῦ τελευταίου, ὅςτις εἶναι ἑπόμενος.

§. 242. Πρώτη Ἰδιότης. Ἐκτίμησις ἑνὸς ὅρου βαθμοῦ ὁποιουδήποτε διὰ μέσου τοῦ πρώτου ὅρου.

Προκύπτει ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς κατὰ διαφορὰν προόδου, ὅτι εἰς τὴν αὔξουσαν προόδον.

Ὁ δεύτερος ὅρος εἶναι ἴσος μὲ τὸν πρῶτον πλέον ὁ λόγος (ἢ σὺν τῷ λόγῳ).

Ὁ τρίτος εἶναι ἴσος μὲ τὸν δεύτερον πλέον ὁ λόγος, ἢ εἶναι ἴσος μὲ τὸν πρῶτον πλέον δὶς ὁ λόγος.

Ὁ τέταρτος εἶναι ἴσος μὲ τὸν τρίτον πλέον ὁ λόγος, ἢ μὲ τὸν πρῶτον πλέον τρὶς ὁ λόγος.

Ἐν γένει ὅρος τις ὁποιουδήποτε βαθμοῦ εἶναι ἴσος μὲ τὸν πρῶτον, πλέον τοσάκις ὁ λόγος, ὅσοι ὅροι εἶναι πρὸ ἐκείνου, τὸν ὁποῖον θεωροῦμεν.

Διὰ νὰ καταλάβωμεν καλὰ αὐτὴν τὴν ἰδιότητα, καὶ νὰ παραστήσωμεν αὐτὴν μὲ συντομωτέραν ἔκφρασιν, ἂς θεωρήσωμεν τὴν σειρὰν τῶν ἀριθμῶν

÷ α . β . γ . δ . ε . ζ . η . . . . ι . κ . λ

τοὺς ὁποίους ὑποθέτομεν, ὅτι σχηματίζουν αὔξουσαν

πρόοδον, καὶ ἂς σημειώσωμεν διὰ ρ τὸν τῆς προόδου λόγον.

Ἔχομεν προφανῶς κατὰ τὴν φύσιν τῆς προόδου,

$$\beta = \alpha + \rho$$
$$\gamma = \beta + \rho = \alpha + \rho + \rho = \alpha + 2\rho.$$
$$\delta = \gamma + \rho = \alpha + 2\rho + \rho = \alpha + 3\rho.$$
$$\varepsilon = \delta + \rho = \alpha + 3\rho + \rho = \alpha + 4\rho.$$

Λοιπὸν, ἐὰν ν παριστάνῃ τὸν βαθμὸν ὅρου τινὸς λ, εἰς τὴν ὁποίαν περίστασιν ν — 1 ἐκφράζει τὸν τῶν προηγουμένων ὅρων ἀριθμὸν, ἔχομεν προφανῶς,

$$\lambda = \alpha + (\nu - 1)\rho \;\ldots\ldots\; (1)$$

ἔκφρασιν, ἥτις εἰς τὴν συνήθη γλῶσσαν μεταφραζομένη ἐπανέρχεται εἰς τὴν ἀνωτέρω ἔκφρασιν.

Ἐὰν ἡ πρόοδος ἦτον φθίνουσα, ἠθέλαμεν ἔχει ἐξ ἐναντίας,

$$\beta = \alpha - \rho$$
$$\gamma = \beta - \rho = \alpha - \rho - \rho = \alpha - 2\rho$$
$$\delta = \gamma - \rho = \alpha - 2\rho - \rho = \alpha - 3\rho$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

καὶ ἐπομένως

$$\lambda = \alpha - (\nu - 1)\rho \;\ldots\ldots\; (2).$$

Οἱ δύο τύποι (1) καὶ (2) συντείνουν εἰς τὸ νὰ προσδιορίσωμεν ὅρον τινὰ ὁποιονδήποτε τῆς σειρᾶς, χωρὶς νὰ ὑποχρεονόμεθα νὰ λογαριάζωμεν τοὺς προηγουμένους· ἐπειδὴ ἀρκεῖ νὰ γνωρίσωμεν τὸν πρῶτον ὅρον, τὸν λόγον καὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν ὅρων τῶν ἐμπεριλαμβανομένων μεταξὺ τοῦ πρώτου καὶ ἐκείνου, τὸν ὁποῖον θέλομεν νὰ σχηματίσωμεν.

Ἔστω π. χ. ἡ πρόοδος ÷ 2 . 5 . 8 . 11 . . . . . τῆς ὁποίας ζητεῖται ὁ εἰκοστὸς ὅρος.

Ἔχομεν ἐδῶ $\alpha = 2$, $\rho = 3$ καὶ $\nu = 20$. Λοιπὸν ὁ τύπος (1) γίνεται $\lambda = 2 + 19 \times 3 = 59$.

Εὑρίσκομεν προσέτι διὰ τὸν $\overline{60}^{ov.}$ ὅρον,

$$\lambda = 2 + 59 \times 3 = 179.$$

Ἔστω ἀκόμη ἡ πρόοδος $\div 80 . 74 . 68 . 62 . . .$, τῆς ὁποίας ζητεῖται ὁ $12^{ος.}$ ὅρος.

Ἔχομεν καὶ ἐδῶ $\alpha = 80$, $\rho = 6$, $\nu = 12$. Λοιπὸν ὁ τύπος (2) δίδει $\lambda = 80 - 11 \times 6 = 14$.

§. 243. Συνέπεια τῆς προηγουμένης ἰδιότητος. Οἱ αὐτοὶ οὗτοι τύποι ὁδηγοῦν εἰς τὴν ἐπίλυσιν ἀξιολογωτάτου τινὸς ζητήματος, τοῦ ὁποίου σκοπὸς εἶναι τὸ νὰ ἐμβάλλωμεν μεταξὺ δύο δοθέντων ἀριθμῶν, τόσους Διαφορικοὺς, ἢ Ἀριθμητικῶς ἀναλόγους μέσους, ὅσους θέλομεν, τουτέστιν ἄλλους ἀριθμοὺς σχηματίζοντας μετὰ τῶν δύο δοθέντων πρόοδον κατὰ διαφοράν.

Πρόκειται λόγου χάριν νὰ ἐμβάλλωμεν μεταξὺ 3 καὶ 57, ὀκτὼ ἀριθμητικῶς ἀναλόγους μέσους, εἴτε διαφορικούς.

Ἐπειδὴ ἡ, τὴν ὁποίαν θέλομεν νὰ σχηματίσωμεν πρόοδος πρέπει, ἐμπεριλαμβανομένων τῶν δύο δοθέντων ἀριθμῶν, νὰ συνθέτεται ἀπὸ 8+2 ἢ 10 ὅρους, ἕπεται (ἀριθ. 242) ὅτι ὁ τελευταῖος ὅρος 57 εἶναι ἴσος μὲ τὸν πρῶτον 3, πλέον 9 φοραῖς ὁ λόγος. Λοιπὸν ἐὰν ἀπὸ 57 ἀφαιρεθῇ 3, ἡ διαφορὰ 54 θέλει εἶναι ἴση μὲ 9 φοραῖς τὸν λόγον, καὶ ἑπομένως τὸ $\overline{9}^{ov.}$ τοῦ 54, ἢ 6 θέλ' εἶναι ἡ ἔκφρασις τοῦ λόγου τῆς προόδου.

Ἀφ' οὗ ἐγνωρίσαμεν τὸν λόγον, εὐκόλως ἐξάγομεν τὴν πρόοδον, οὖσαν

$$\div 3 . 9 . 15 . 21 . 27 . 33 . 39 . 45 . 51 . 57.$$

Ἔστωσαν ἐν γένει α καὶ λ οἱ δύο ἀριθμοὶ, μεταξὺ τῶν ὁποίων θέλομεν νὰ ἐμβάλωμεν ἀριθμὸν τινὰ μ

ἀπὸ μέσους διαφορικούς. Ἐὰν σημειώσωμεν διὰ ν τὸν ὅλον ἀριθμὸν τῶν ὅρων, ἔχομεν $\nu = \mu + 2$· ὅθεν $\nu - 1 = \mu + 1$, καὶ οἱ δύο τύποι τοῦ ἀριθμοῦ 242 γίνονται

$$\lambda = \alpha + (\mu + 1)\,\rho, \quad \lambda = \alpha - (\mu + 1)\,\rho.$$

Ἀφαιροῦντες ἀπὸ τὰ δύο μέλη τὴν ποσότητα α, καὶ διαιροῦντες διὰ $\mu + 1$, ἔχομεν $\rho = \frac{\lambda - \alpha}{\mu + 1}$ ἢ $\rho = \frac{\alpha - \lambda}{\mu + 1}$.

(διὰ τὴν τελευταίαν ἔπρεπε νὰ ἀφαιρέσωμεν λ ἀπὸ τὰ δύο μέλη, καὶ νὰ προσθέσωμεν $(\mu + 1)\,\rho$, ἔπειτα νὰ διαιρέσωμεν διὰ $\mu + 1$).

Ἐντεῦθεν βλέπομεν, ὅτι διὰ νὰ ἐμβάλλωμεν μεταξὺ δύο δοθέντων ἀριθμῶν τόσους διαφορικοὺς μέσους, ὅσους θέλομεν, πρέπει νὰ ἀφαιρῶμεν τὸν μικρότερον ἀριθμὸν ἀπὸ τὸν μεγαλήτερον, καὶ νὰ διαιρῶμεν τὴν διαφορὰν διὰ τοῦ ὁλικοῦ ἀριθμοῦ τῶν ὅρων, τοὺς ὁποίους ἐμβάλλομεν πλέον ἕνα.

Τὸ οὕτω λαμβανόμενον ἀποτέλεσμα ἐκφράζει τὸν λόγον τῆς προόδου, ἥτις ἠμπορεῖ προσέτι νὰ ἦναι αὔξουσα ἢ φθίνουσα.

Προκείσθω ὡς δεύτερον παράδειγμα νὰ ἐμβάλωμεν μεταξὺ 2 καὶ 29, 35 διαφορικοὺς μέσους.

Ἐδῶ ἔχομεν $\alpha = 2$, $\lambda = 29$, $\mu = 35$. Λοιπὸν $\rho = \frac{29 - 2}{36} = \frac{3}{4}$· ἡ δὲ ζητουμένη πρόοδος εἶναι.

$$\div\, 2 \,.\, 2\tfrac{3}{4} \,.\, 3\tfrac{1}{2} \,.\, 5 \,.\, 5\tfrac{3}{4} \,\ldots\ldots\ldots\, 29.$$

Ὁ $\overline{20}^{\text{ος}}$ ὅρος ταύτης τῆς προόδου, ἢ ὁ $\overline{19}^{\text{ος}}$ διαφορικὸς μέσος ἔχει τιμὴν (ἀρ. 242), $\lambda = 2+19 \times \frac{3}{4} = 16\frac{1}{4}$.

Ὁ $\overline{37}^{\text{ος}}$ ἢ ὁ τελευταῖος ὅρος τῆς προόδου εἶναι $\chi = 2+36 \times \frac{3}{4} = 29$, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ ἦναι.

§. 244. Παρατήρησις. Ἐὰν μεταξὺ ὅλων τῶν ὅρων μιᾶς προόδου κατὰ διαφορὰν, θεωρουμένων ἀνὰ δύο, ἐμβάλωμεν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν διαφορικῶν μέσων, ὅλαι αἱ οὕτω σχηματιζόμεναι μερικαὶ πρόοδοι, ἀποτελοῦν μίαν μόνην καὶ τὴν αὐτὴν πρόοδον.

Τῷ ὄντι ἔστω ἡ πρόοδος $\div \alpha . \beta . \gamma . \delta . \varepsilon . \zeta \ldots$ καὶ ἔστω μ ὁ ἀριθμὸς τῶν μέσων, τοὺς ὁποίους θέλομεν νὰ ἐμβάλωμεν μεταξὺ α καὶ β, ἔπειτα μεταξὺ β καὶ γ, ἔπειτα γ καὶ δ . . . . ὁ λόγος κάθε μερικῆς προόδου θέλει εἶναι κατὰ τὰ εἰρημένα ἐκφρασμένος διὰ $\frac{\beta-\alpha}{\mu+1}, \frac{\gamma-\beta}{\mu+1}, \frac{\delta-\gamma}{\mu+1} \ldots\ldots$ Ἐπειδὴ δὲ ὅλαι αὗται αἱ ποσότητες εἶναι ἴσαι· διότι α, β, γ . . . . ὄντων εἰς πρόοδον ἔχομεν . . . . $\beta-\alpha = \gamma-\beta = \delta-\gamma \ldots$ ὁ λόγος εἶναι ὁ αὐτὸς εἰς ὅλας ταύτας τὰς μερικὰς προόδους, καὶ ἐπειδὴ προσέτι ὁ τελευταῖος ὅρος τῆς πρώτης σχηματίζει τὸν πρῶτον ὅρον τῆς δευτέρας καὶ οὕτως ἐφεξῆς, συμπεραίνομεν, ὅτι ὅλαι αὗται αἱ μερικαὶ πρόοδοι συγκροτοῦν μονοειδῆ τινα πρόοδον.

Ἐφαρμογή. Προκείσθω νὰ ἐμβάλωμεν 10 διαφορικοὺς μέσους μεταξὺ ὅλων τῶν τῆς προόδου ὅρων

$$\div 1 . 3 . 5 . 7 . 9 . 11 \ldots\ldots$$

Ὁ λόγος εἶν' ἐδῶ $\frac{3-1}{11}$, $\frac{5-3}{11}$, $\frac{7-5}{11}$ ἢ $\frac{2}{11}$

Ἔχομεν λοιπόν

$\div 1 . 1\frac{2}{11} . 1\frac{4}{11} . 1\frac{6}{11} \ldots . 2\frac{9}{11} . 3 . 3\frac{2}{11} . 3\frac{4}{11} \ldots$

$4\frac{9}{11} . 5 . 5\frac{2}{11}$ πρόοδον φανεράν.

Θέλομεν μεταχειρισθῆ εὐθὺς αὐτὴν τὴν ἀξιολογωτάτην παρατήρησιν.

§. 245. Δευτέρα ἰδιότης. Εἰς ὅλην τὴν κατὰ διαφορὰν πρόοδον τὸ ἄθροισμα δύο ὁποιωνδήποτε ὅρων ληφθέντων εἰς ἴσην διάστασιν ἀπὸ τὰ δύο ἄκρα, τουτέστι τοῦ πρώτου καὶ τελευταίου, εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄκρων.

Οὕτως εἰς τὴν πρόοδον

$\div 1 . 4 . 7 . 10 . 13 . 16 . 19 . 22 . 25 . 28 . 31 . 34 . 37.$

ἔχομεν $1+37=4+34=7+31=10+28 \ldots \ldots$

Διὰ νὰ δώσωμεν λόγον αὐτῆς τῆς προτάσεως μὲ γενικόν τινα τρόπον, ἂς καλέσωμεν α καὶ λ τοὺς δύο ἄκρους ὅρους, χ τὸν ὅρον ὁ ὁποῖος κρατεῖ τὴν π$^{\text{ην}}$ τάξιν, τουτέστι ὁ ὁποῖος ἔχει $\overline{\pi-1}^{\text{ους}}$ πρὸ αὐτοῦ καὶ 9 τὸν ὅρον, ὅς τις ἔχει $\overline{\pi-1}^{\text{ους}}$ μετ' αὐτόν.

Τούτου τεθέντος, ἔχομεν ἐξ ἀρχῆς, κατὰ τὸν τύπον τοῦ ἀριθμ. 242.

$$\chi=\alpha+(\pi-1)\rho.$$

Κατὰ τὸ παρὸν, ἐὰν θεωρήσωμεν μόνον τὸ μέρος τῆς προόδου, τὸ περιεχόμενον μεταξὺ τοῦ ὅρου 9, καὶ τοῦ ὅρου λ, ὁ ὁλικὸς ἀριθμὸς τῶν ὅρων αὐτῆς τῆς μερικῆς προόδου εἶναι π, καὶ ἔχομεν ἀκόμη $\lambda=9+(\pi-1)\rho$.

Ὅθεν βλέπομεν, ὅτι λ ὑπερβαίνει 9 κατὰ τὴν αὐτὴν ποσότητα, κατὰ τὴν ὁποίαν χ ὑπερβαίνει α. Λοιπὸν οἱ τέσσαρες ἀριθμοὶ α, χ, 9, λ σχηματίζουν μεταξύ των ἰσοδιαφοράν. Εἰς ὅλην δὲ τὴν ἰσοδιαφορὰν τὸ ἄθροισμα τῶν δύο μέσων εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄκρων (204).

Οὕτως ἔχομεν $\chi+9=\alpha+\lambda$· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Σ. Κ. Ὅταν ἡ πρόοδος συγκροτῆται ἀπὸ περιττὸν ἀριθμὸν ὅρων, ὁ ἐν τῷ μέσῳ σχηματίζει μὲ τοὺς δύο ἄκρους συνεχῆ ἰσοδιαφορὰν, καὶ ἑπομένως (ἀριθ. 206) εἶναι ἴσος μὲ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν δύο ἄκρων.

Οὕτως εἰς τὴν εἰρημένην πρόοδον $\div 1.4.7....$ ἥτις περικλείει 13 ὅρους, ὁ $\overline{17}^{ος}$, ἢ 19 εἶναι ἴσος μὲ $\frac{1+37}{2}$, τὸ ὁποῖον εἶναι πρόδηλον.

§. 246. Συνέπεια. Ἡ ἰδιότης αὕτη μᾶς δίδει μέσον ἁπλούστατον τοῦ νὰ λαμβάνωμεν τὴν ἔκφρασιν τοῦ ἀθροίσματος ὅλων τῶν ὅρων προόδου τινὸς κατὰ διαφοράν.

Ἔστω τῷ ὄντι ἡ πρόοδος ...

$\div \alpha.\beta.\gamma.\varsigma \; ...... \; \iota.\kappa.\lambda.$

καὶ ἂς σημειώσωμεν διὰ σ τὸ ἄγνωστον ἄθροισμα ὅλων τῶν ὅρων της, ὄντος ν τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ὅρων· ἂς ἐννοήσωμεν δὲ γεγραμμένην τὴν αὐτὴν πρόοδον ὑφ' ἑαυτὴν κατ' ἀντίστροφον τάξιν· ὡς .... $\div \lambda.\kappa.\iota. \; .... \; \gamma.\beta.\alpha.$ Κατὰ

πρῶτον βλέπομεν, ὅτι τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν δύο τούτων προόδων εἶναι ἴσον μὲ 28.

Ἀπὸ ἄλλο μέρος συγκρίνοντες ἀνὰ δύο τοὺς ἐμπεριλαμβανομένους ὅρους εἰς τὴν αὐτὴν κάθετον στήλην, ἔχομεν κατὰ τὴν προηγουμένην ἰδιότητα $\alpha+\lambda=\beta+\kappa=\gamma+\iota$ . . . . . Λοιπὸν 2σ εἶναι ἴσον μὲ τὸ μερικὸν ἄθροισμα $\alpha+\lambda$ τοσάκις λαμβανόμενον, ὅσοι ὅροι εἶναι εἰς τὴν πρώτην πρόοδον, καὶ ἑπομένως.

$$2\sigma=(\alpha+\lambda)\,\nu.$$

Ὅθεν διαιροῦντες διὰ 2 . . . . ἔχομεν·

$$\sigma=\frac{(\alpha+\lambda)\,\nu}{2}$$

δηλαδὴ τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων τῆς κατὰ διαφορὰν προόδου εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄκρων, πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ τὸ ἥμισυ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ὅρων.

Ἐφαρμογαί. 1ον· Ζητεῖται τὸ ἄθροισμα τῶν 25 πρώτων ὅρων τῆς προόδου· $\div 2\,.\,7\,.\,12\,.\,17\ldots$

Πρέπει πρῶτον νὰ ἀναζητήσωμεν τὴν ἔκφρασιν τοῦ 25ου· ὅρου· ἀλλ' ὄντος ἐνταῦθα τοῦ λόγου 5, ἔχομεν (ἀριθμ. 242) $\lambda=2+24\times5=122$. Λοιπὸν $\sigma=\frac{(2+122)25}{2}=\frac{124\times25}{2}=1550.$

2ον· Ζητεῖται τὸ ἄθροισμα τῶν 100 πρώτων ὅρων τῆς προόδου

$$\div 1\,.\,3\,.\,5\,.\,7\,.\,9\,\ldots$$

Εὑρίσκομεν πρῶτον διὰ τὸν 100ον· ὅρον.

$$\lambda=1+99\times2=199$$

Λοιπὸν $\sigma=\frac{(1+199)100}{2}=10000$· ἢ τὸ τετράγωνον τοῦ 100.

Γενικῶς ὁ $\nu^{\text{ος}}$ ὅρος αὐτῆς τῆς προόδου ἐπειδὴ εἶναι

$$\lambda = 1 + (\nu - 1)2 = 2\nu - 1$$

εὑρίσκομεν ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ὅρων

$$\sigma = \frac{(1 + 2\nu - 1)\nu}{2} = \nu^2,$$ ἢ τὸ τετράγωνον τοῦ ν.

Οὕτως τὸ ἄθροισμα τῶν 15 πρώτων ὅρων εἶναι ἴσον 15×15 ἢ 125.

§. 247. Πρόοδος δὲ κατὰ πηλίκον ἢ γεωμετρικὴ ὀνομάζεται σειρὰ ὅρων, καθεῖς τῶν ὁποίων εἶναι ἴσος μὲ τὸν πρὸ ἑαυτοῦ πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ σταθεράν τινα ἀριθμὸν, ὁ ὁποῖος ἀκόμη λέγεται λόγος τῆς προόδου.

Η πρόοδος λέγεται αὔξουσα ἢ φθίνουσα, καθ' ὅσον ὁ λόγος, ἢ ὁ σταθερὸς ἀριθμὸς, ὁ ὁποῖος ἐκφράζει τὴν σχέσιν ἑνὸς ὅρου μὲ τὸν πρὸ αὐτοῦ, εἶναι μεγαλήτερος ἢ μικρότερος τῆς μονάδος.

Ἡ κατὰ πηλίκον πρόοδος γράφεται τιθεμένων δύο στιγμῶν μεταξὺ τῶν διαφόρων ὅρων, καὶ ἐμπρός των τὸ σημεῖον $\div\!\!:$, ἐπειδὴ κατὰ τὸν ὁρισμὸν δυνάμεθα νὰ θεωρῶμεν τοὺς ἀριθμοὺς, ὡς σχηματίζοντας σειρὰν συνεχῶν ἀναλογιῶν.

Π. χ. ἔστωσαν αἱ δύο σειραὶ τῶν ἀριθμῶν,

$$\div\!\!:\ 2 : 6 : 18 : 54 : 162 : 486 : 1458.$$

$$\div\!\!:\ 12 : 6 : 3 : \frac{3}{2} : \frac{3}{4} : \frac{3}{8} : \frac{3}{16}.$$

Εἰς τὴν πρώτην ἕκαστος ὅρος εἶναι ἴσος μὲ τὸν πρὸ αὐτοῦ πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ 3. Οὕτως λοιπὸν αὕτη εἶναι πρόοδος κατὰ πηλίκον, ἔχουσα λόγον 3.

Εἰς τὴν δευτέραν ἕκαστος ὅρος εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ πρὸ ἑαυτοῦ, ἢ εἶναι ἴσος μὲ τὸν πρὸ ἑαυτοῦ

πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ τὸ κλάσμα $\frac{1}{2}$. Λοιπὸν αὕτη εἶναι πρόοδος κατὰ πηλίκον, ἔχουσα λόγον $\frac{1}{2}$.

Ἐκφράζομεν προσέτι τὰς προόδους ταύτας, κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, ὡς καὶ τὰς κατὰ διαφορὰν προόδους, δηλαδὴ,

2 πρὸς 6, πρὸς 18, πρὸς 54, πρὸς 162 . . . . .

καὶ 12 πρὸς 6, πρὸς 3, πρὸς $\frac{3}{2}$, πρὸς $\frac{3}{4}$ . . . . .

Ἐὰν θεωρηθῶσιν ὡς συνεχεῖς σειραὶ, προκύπτει, ὅτι πᾶς ἕνας ὅρος τῆς προόδου εἶναι ἐν ταυτῷ ἑπόμενος καὶ ἡγούμενος, κατ' ἐξαίρεσιν τοῦ πρώτου, ὅς τις εἶναι ἡγούμενος, καὶ τοῦ τελευταίου, ὅς τις εἶναι ἑπόμενος.

Αἱ κατὰ πηλίκον πρόοδοι ἔχουν ἰδιότητας ἀναλόγους μὲ τὰς προόδους κατὰ διαφοράν.

§. 248. Πρώτη ἰδιότης. Ἐκτίμησις ὅρου τινὸς τάξεως ὁποιασδήποτε εἴς τινα κατὰ πηλίκον Πρόοδον.

Ἔστω ἡ πρόοδος κατὰ πηλίκον γενική,

$$\div\div \alpha : \beta : \gamma : \delta : \varepsilon : \zeta : \eta : \vartheta : \ldots$$

καὶ σημειωθήτω διὰ κ ὁ λόγος, ὅς τις ἠμπορεῖ προσέτι νὰ ἦναι $>$ ἢ <1, θέλομεν ἔχει προφανῶς τὰς ἀκολούθους ἰσότητας·

$$\beta = \alpha\kappa$$
$$\gamma = \beta\kappa = \alpha\kappa \times \kappa = \alpha\kappa^2$$
$$\delta = \gamma\kappa = \alpha\kappa^2 \times \kappa = \alpha\kappa^3$$
$$\varepsilon = \delta\kappa = \alpha\kappa^3 \times \kappa = \alpha\kappa^4$$

— — — — —

— — — — —

Ὅθεν βλέπομεν, ὅτι ἐν γένει ὅρος τις ὁποιουδήποτε βαθμοῦ εἶναι ἴσος μὲ τὸν πρῶτον ὅρον πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ μίαν δύναμιν τοῦ λόγου, ἔχουσαν βαθμὸν δεικνυόμενον διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ὅρων, οἱ ὁποῖοι προηγοῦνται ἐκείνου, τὸν ὁποῖον θεωροῦμεν.

Οὕτω σημειόνοντες διὰ ν τὸν ἀριθμὸν τῶν περιεχομένων ὅρων, μεταξὺ τοῦ πρώτου καὶ τοῦ ὅρου λ, λαμβάνομεν τὸν τύπον,

$$\lambda = \alpha \times \varkappa^{\nu-1}.$$

δι' οὗ εὐκόλως εὑρίσκομεν τὴν τιμὴν ἑνὸς ὅρου χωρὶς νὰ σχηματίζωμεν τοὺς προηγουμένους.

Ἐφαρμογαί. $\overline{1}^{\eta}$. Ζητεῖται ἡ τιμὴ τοῦ $\overline{12}^{ου}$. ὅρου τῆς προόδου ∵ 2 : 6 : 18 : . . . . . Ὁ τύπος γίνεται $\lambda = 2\times\overline{3}^{11}$.

Κατὰ πρῶτον ἡ 4ⁿ· δύναμις τοῦ 3 εἶναι $3\times3\times3\times3=81$. Πολλαπλασιάζοντες 81 ἐπὶ 81 λαμβάνομεν 6561 ποσότητα, ἥτις εἶναι ἡ 8ⁿ· δύναμις. Πολλαπλασιάζοντες δὲ 6561 ἐπὶ 27 ἢ ἐπὶ τὴν 3ⁿ δύναμιν τοῦ 3, εὑρίσκομεν 177147 ποσότητα, ἥτις εἶναι ἡ 11ⁿ· δύναμις.

Λοιπὸν τέλος πάντων $\lambda = 2\times177147 = 354294$.

$\overline{2}^{\alpha}$. Ζητεῖται ὁ 10ος. ὅρος τῆς προόδου,

$$\div\!\div\ 12 : 6 : 3 : \frac{3}{2} : \ldots\ldots$$

Ἐνταῦθα εὑρίσκομεν $\lambda = 12\times\left(\frac{1}{2}\right)^{9}$.

Ἀλλ' ὁ κύβος τοῦ 2 εἶναι 8, ὁ δὲ κύβος τοῦ 8, ὅς τις εἶναι φανερὰ ἡ 9ⁿ· δύναμις τοῦ 2, εἶναι ἴσος μὲ 512· λοιπὸν $\lambda = 12\times\frac{1}{512} = \frac{3}{128}$.

Σ. Κ. Ἐὰν ἡ τάξις τοῦ ὅρου ἦτον ὀλίγον τι μακρὰν, ὁ ὑπολογισμὸς ἤθελε γένῃ μὲ πολὺν κόπον·

ἀλλ' ἠθέλαμεν φθάσει ἐπίσης εἰς τὴν ἔκφρασιν τούτου τοῦ ὅρου διὰ διαδοχικῶν πολλαπλασιασμῶν. Πάντοτε δὲ ἠμποροῦμεν νὰ κρίνωμεν ἀπὸ τὸ πρῶτον παράδειγμα, πόσον ταχέως αἱ δυνάμεις ἑνὸς ἀριθμοῦ αὐξάνουν τιμὴν, ὅταν ὁ βαθμὸς τῆς δυνάμεως ἦναι ὀλίγον τι μεγάλος· ἐπειδὴ εἰς τὴν πρόοδον $\div 2:6:18:$ . . . λαμβάνομεν τὴν τιμὴν μόνον τοῦ ὅρου τοῦ 12^ου^· 354294.

§. 249. Συνέπεια τῆς προηγουμένης ἰδιότητος. Νὰ ἐμβάλωμεν μεταξὺ δύο δοθέντων ἀριθμῶν α καὶ λ ἀριθμόν τινὰ μ μέσων ἀναλογικῶν, δηλαδὴ ἀριθμῶν σχηματιζόντων μὲ τοὺς δύο πρώτους πρόοδον κατὰ πηλίκον.

Ἐπίλυσις. Εἶναι φανερὸν, ὅτι διὰ νὰ σχηματίσωμεν τὴν πρόοδον, ἀρκεῖ νὰ λάβωμεν τὸν λόγον. Ἀλλ' ἐκ τοῦ τύπου $\lambda = \alpha\kappa^{\nu-1}$ ἐξάγομεν, διαιροῦντες τοὺς δύο ἀριθμοὺς διὰ α,

$$\frac{\lambda}{\alpha} = \kappa^{\nu-1}, \text{ ὅθεν } \sqrt[\nu-1]{\frac{\lambda}{\alpha}}$$

Καὶ ἐπειδὴ ν ἐκφράζει τὸν ὅλον ἀριθμὸν τῶν ὅρων, ἔχομεν ἀναγκαίως $\nu = \mu + 2$, καὶ ἑπομένως $\nu - 1 = \mu + 1$. Λοιπὸν τέλος πάντων . . . .

$$\delta = \sqrt[\mu+1]{\frac{\lambda}{\alpha}}.$$

Ὅθεν βλέπομεν, ὅτι διὰ νὰ λάβωμεν τὸν λόγον, πρέπει κατὰ πρῶτον νὰ διαιρέσωμεν τὸν δεύτερον δοθέντα ἀριθμὸν διὰ τοῦ πρώτου, ἔπειτα νὰ ἐξάξωμεν ἀπὸ τὸ πηλίκον ῥίζαν βαθμοῦ δεικνυομένου ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν τῶν ἐμβαλλομένων ὅρων πλέον ἕνα.

Γνωρίζοντες δὲ τὸν τῆς προόδου λόγον, εὐκόλως λαμβάνομεν τοὺς διαφόρους ὅρους· ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν διαδοχικῶς τὸν πρῶτον ὅρον α ἐπὶ τὴν $1^{ην}$, $2^{αν}$, $3^{ην}$, ... δύναμιν τοῦ x ἢ τοῦ $\sqrt[\mu+1]{\frac{\lambda}{\alpha}}$ . . . . . .

Οὕτω π. χ. ὁ $4^{ος}$ ἀναλογικὸς μέσος, ὅς τις εἶναι ὁ $5^{ος}$ τῆς προόδου ἤθελεν ἔχει τιμὴν,

$\alpha \times \left(\sqrt[\mu+1]{\frac{\lambda}{\alpha}}\right)^4$, καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

Σ. x. δὲν γνωρίζομεν ἀκόμη καμμίαν μέθοδον τοῦ νὰ ἐξάγωμεν ῥίζαν βαθμοῦ ἀνωτέρου τοῦ $3^{ου}$· Ἀλλ' ὁ ἀρχικὸς σκοπός μας εἶναι νὰ δώσωμεν εἰς τὰς προόδους κατὰ πηλίκον, τύπους ἀναλόγους μὲ τοὺς δοθέντας· εἰς τὰς προόδους κατὰ διαφοράν. Πλὴν θέλομεν δώσει εὐθὺς ὁρμοδιώτατόν τι μέσον νὰ ἐκτελῶμεν τὰς ἐργασίας ταύτας.

§. 250. Δεικνύεται, ὡς καὶ διὰ τὰς προόδους κατὰ διαφορὰν, ὅτι ἐὰν μεταξὺ ὅλων τῶν ὅρων τῆς προόδου κατὰ πηλίκον, θεωρουμένων ἀνὰ δύο, ἐμβάλωμεν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν τῶν ἀναλογικῶν μέσων, αἱ οὕτω σχηματιζόμεναι μερικαὶ πρόοδοι συγκροτοῦν μονοειδῆ τινα πρόοδον.

Ἔστω $\div\div$ α : β : γ : δ : . . . . . ἡ προτεθεῖσα πρόοδος.

Ὁ λόγος διὰ τὴν πρώτην μερικὴν πρόοδον ἤθελεν εἶναι $\sqrt[\mu+1]{\frac{\beta}{\alpha}}$, διὰ τὴν δευτέραν $\sqrt[\mu+1]{\frac{\gamma}{\beta}}$ . . . .

Ἀλλ' ἔχομεν, κατὰ τὴν ὑπόθεσιν, $\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\gamma}{\beta}=\frac{\delta}{\gamma}$ . . .

Λοιπὸν οἱ ἀριθμοὶ $\sqrt[\mu+1]{\frac{\beta}{\alpha}}, \sqrt[\mu+1]{\frac{\gamma}{\beta}}$ . . . . εἶναι ἴσοι· κ. τ. λ.

§. 251. Δευτέρα ἰδιότης. Εἰς πᾶσαν κατὰ πηλίκον πρόοδον τὸ γινόμενον δύο τινῶν ὅρων εἰς ἴσην διάστασιν ἀπὸ τὰ δύο ἄκρα εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων.

Ἔστωσαν τῷ ὄντι χ καὶ ψ δύο ὅροι, τῶν ὁποίων ὁ μὲν ἔχει π — 1 ὅρους πρὸ ἑαυτοῦ, καὶ ὁ ἄλλος π — 1 μεθ' ἑαυτόν.

Ὁ ὅρος χ εἶναι ἴσος μὲ τὸν πρῶτον α πολλαπλασιαζόμενον μὲ $\varkappa^{\pi-1}$, καὶ ἔχομεν $\chi=\alpha\times\varkappa^{\pi-1}$.

Ὁ τελευταῖος ὅρος λ εἶναι ἴσος μὲ τὸν ὅρον χ πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ $\varkappa^{\pi-1}$, καὶ ἔχομεν $\lambda=\psi\times\varkappa^{\pi-1}$. Ὅθεν δῆλον, ὅτι οἱ ὅροι α, χ, ψ καὶ λ σχηματίζουν τὴν ἀναλογίαν $\alpha:\chi::\psi:\lambda$. Λοιπὸν (ἀριθμ. 208) $\chi\times\psi=\alpha\times\lambda$· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

§. 252. Ἂς σημειώσωμεν τέλος πάντων μὲ π τὸ γινόμενον ὅλων τῶν ὅρων τῆς προόδου,

$\div\ \alpha:\beta:\gamma:\delta:\ldots\ldots\iota:\varkappa:\lambda$. .

Πολλαπλασιαζομένων μεταξύ των, ὥστε νὰ ἔχωμεν

$\pi=\alpha\beta\gamma\delta\ldots\ldots\iota\varkappa\lambda$

$\pi=\lambda\varkappa\iota\ldots\ldots\gamma\beta\alpha$

$\pi^2=\alpha\beta\gamma\delta\ldots\ldots\iota\varkappa\lambda\times\lambda\varkappa\iota\ldots\times\gamma\beta\alpha$.

ἢ ἀκόμη, ἀντιστρεφομένης τῆς τάξεως τῶν παραγόντων,

$\pi^2=\alpha\lambda\times\beta\varkappa\times\gamma\iota\times\ldots\iota\gamma\times\varkappa\beta\times\lambda\alpha$.

Ἀλλ' εἴδομεν, ὅτι $\alpha\lambda=\beta\varkappa=\gamma\iota$ . . ., καὶ ὁ ἀριθ-

μὸς τῶν γινομένων εἶναι ἴσος μὲ ν ἀριθμὸν τῶν ὅρων τῆς προτεθείσης προόδου.

Οὕτω $\pi^2 = (\alpha\lambda)^\nu$.

Καὶ ἑπομένως $\pi = \sqrt[2]{(\alpha\lambda)^\nu}$.

Ἐκ τοῦ ὁποίου δείχνεται, ὅτι τὸ γινόμενον ὅλων τῶν ὅρων τῆς κατὰ πηλίκον προόδου εἶναι ἴσον μὲ τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τῆς ν δυνάμεως τοῦ γινομένου τῶν δύο ἄκρων.

Ὁ τύπος οὗτος ἀνταποκρίνεται πρὸς ἐκεῖνον, ὅς τις δίδει τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων τῆς κατὰ διαφορὰν προόδου, δηλαδὴ $\sigma = \frac{(\alpha+\lambda)\nu}{2}$.

Ἐδῶ δὲν θέλομεν ἐκθέσει ὁλότελα τὸν τρόπον τοῦ νὰ λαμβάνωμεν τὴν ἔκφρασιν τοῦ ἀθροίσματος τῶν ὅρων προόδου τινὸς κατὰ πηλίκον· ἐπειδὴ εἶναι δι' ὅλου ἀνωφελὲς εἰς τὸν ὁποῖον ἐπροβάλαμεν σκοπὸν, καὶ ὁ ὁποῖος προσέτι ὑποθέτει γνώσεις τινὰς Ἀλγεβραϊκὰς, περὶ τῶν ὁποίων τίποτ' ἀκόμη δὲν ὡμιλήσαμεν.

§. 253. Ἀνταπόκρισις μεταξὺ εἰς τὰς ἰδιότητας τῶν δύο εἰδῶν τῶν προόδων.

Ἄς πλησιάσωμεν τώρα τὰ ληφθέντα ἐκ τῆς μιᾶς καὶ τῆς ἄλλης ἐξαγόμενα.

Πρόοδ. κατὰ διαφ. . . . . . . Πρόοδ. κατὰ πηλ.

$\lambda = \alpha + (\nu - 1)\rho$ (ἀρ. 242) . $\lambda = \alpha \times \kappa^{\nu-1}$ (ἀρ. 248)

$\rho = \frac{\lambda - \alpha}{\mu + 1}$ . . . (ἀρ. 243) . $\kappa = \sqrt[\mu+1]{\frac{\lambda}{\alpha}}$ (ἀρ. 249)

$\sigma = \frac{(\alpha + \lambda)\nu}{2}$ . . (ἀρ. 246) . $\pi = \sqrt[2]{(\alpha\lambda)^\nu}$ (ἀρ. 252)

Οἱ τύποι οὗτοι μᾶς δείχνουν, ὅτι αἱ ἐργασίαι, αἱ ὁποῖαι ἐκτελοῦνται ἐπὶ τῶν στοιχείων τῆς κατὰ πηλίκον προόδου, ἀνταποκρίνονται εἰς τὰς βαθμοῦ μικροτέρου ἐργασίας, αἱ ὁποῖαι ἐκτελοῦνται ἐπὶ τῶν ἀναλόγων στοιχείων τῆς κατὰ διαφορὰν προόδου.

Οὕτως ὁ πολλαπλασιασμὸς ἀνταποκρίνεται εἰς πρόσθεσιν· ἡ διαίρεσις εἰς ἀφαίρεσιν.

Ὁ σχηματισμὸς τῶν δυνάμεων εἰς ἁπλοῦν πολλαπλασιασμόν· ἡ ἐξαγωγὴ τῶν ῥιζῶν, εἰς διαίρεσιν.

Ἐκ τούτων τῶν θεωριῶν ἀναμφιβόλως ὁδηγούμενος ὁ ἔνδοξος τῶν Λογαρίθμων ἐφευρετὴς ἐσύντεμε τοὺς ἀριθμητικοὺς ὑπολογισμοὺς, ἀρχόμενος ἀπὸ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, κάμνων νὰ ἐξαρτῶνται αἱ ἐπὶ τῶν ὅρων τῆς κατὰ πηλίκον προόδου ἐκτελούμεναι ἐργασίαι, ἀπὸ ἐργασίας ἐπὶ τῶν ὅρων τῆς κατὰ διαφορὰν προόδου ἐκτελουμένας. Ἀλλ' ἐπειδὴ εἰς στοιχειῶδες σύγγραμμα εἶναι ἀδύνατον νὰ περιγράφωμεν λεπτομερῶς τὴν ἀξιόλογον ταύτην ἀνακάλυψιν, θέλομεν γνωστοποιήσει μόνον τὰ οὐσιωδέστερα ἐξαγόμενα.

§. βον. Περὶ τῶν Λογαρίθμων.

§. 254. Ἂς θεωρήσωμεν μίαν τινὰ πρόοδον κατὰ πηλίκον ἔχουσαν πάντοτε τὸν πρῶτον ὅρων ἴσον μὲ 1, καὶ μίαν τινὰ πρόοδον κατὰ διαφορὰν ἔχουσαν τὸν πρῶτον ὅρον ἴσον μὲ 0.

Παραδείγματος χάριν,

÷÷ 1 : 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128 :
. ÷ 0 : 3 : 6 : 9 : 12 : 15 : 18 . 21
÷÷ 256 : 512 : 1024 : 2048 : 4096 : 8192 .
.. 24 . 27 . 30 . 33 . 36 . 39 .
: 4096 : 8192 : 16384 : 32768 . . . . . (A).
. 36 . 39 . 42 . 45 . . . . . (B).

Οἱ ὅροι τῆς κατὰ διαφορὰν προόδου λέγονται Λογάριθμοι τῶν ὅρων, οἱ ὁποῖοι κρατοῦν τὸν πρῶτον βαθμὸν εἰς τὴν κατὰ πηλίκον πρόοδον.

Ἐν γένει, Λογάριθμοι ἐννοοῦνται οἱ ἀριθμοὶ τῆς κατὰ διαφορὰν προόδου, οἱ ὁποῖοι ἀνταποκρίνονται ὅρος πρὸς ὅρον, εἰς τοὺς ἀριθμοὺς τῆς κατὰ πηλίκον προόδου, καὶ Λογάριθμος ἑνὸς ἀριθμοῦ ἐν μέρει εἶναι ὁ ὅρος τῆς κατὰ διαφορὰν προόδου, ὁ κρατῶν τὴν αὐτὴν θέσιν, τὴν ὁποίαν κρατεῖ εἰς τὴν κατὰ πηλίκον πρόοδον ὁ τὸν ὁποῖον θεωροῦμεν ἀριθμός.

Θέλομεν ἴδει εὐθὺς κατωτέρω διὰ ποῖον λόγον ὑποθέτεται, ὅτι αἱ δύο πρόοδοι ἀρχίζουν ἀπὸ 1, καὶ ἀπὸ 0.

§. 255. Πρώτη Ἰδιότης. Ἄς ληφθῶσι κατὰ τύχην οἱ δύο ὅροι α καὶ β τῆς προόδου (Α), τῶν ὁποίων πρόκειται νὰ λάβωμεν τὸ γινόμενον.

Πρὸς τοῦτο ἄς θεωρήσωμεν τὸν πρῶτον ὅρον 1 τῆς προόδου (Α), τοὺς δύο ὅρους α, β καὶ ἕνα τέταρτον γ, οὕτως, ὥστε νὰ ἦναι τόσοι ὅροι μεταξὺ β καὶ γ, ὅσοι εἶνα μεταξὺ α καὶ 1. Ἄς ὑποθέσωμεν δὲ, ὅτι ἡ πρόοδος (Α) ἐστάθη εἰς τὸν ὅρον γ.

Ἄς θεωρήσωμεν παρομοίως εἰς τὴν πρόοδον (Β) τοὺς τέσσαρας ὅρους, οἱ ὁποῖοι ἀνταποκρίνονται εἰς τοὺς ἀριθμοὺς 1, α, β, γ, δηλαδὴ τοὺς λογαρίθμους των, τοὺς ὁποίους σημειόνομεν διὰ συντομίαν μὲ 0, λογ. α, λογ. β, λογ. γ, (ἡ γραφὴ λογ. σημειόνει λογάριθμον τοῦ).

Τούτου τεθέντος προκύπτει πρῶτον ἐκ τῆς ἰδιότητος τοῦ ἀριθμοῦ 251, ὅτι οἱ τέσσαρες ἀριθμοὶ 1; α, β, γ, σχηματίζουν ἀναλογίαν; ἐπειδὴ α, β εἶναι δύο ὅροι, τοὺς ὁποίους ἐλάβαμεν εἰς ἴσην διάστασιν ἀπὸ τὰ ἄκρα εἰς μίαν πρόοδον, ἡ ὁποία ἐστάθη εἰς γ.

Οὕτως ἔχομεν $1 \times \gamma$ ἢ $\gamma = \alpha \times \beta$.

Ἀπ' ἄλλο μέρος, οἱ τέσσαρες ὅροι 0, λογ. α, λογ. β, λογ. γ. σχηματίζουν παρομοίως ἰσοδιαφορὰν (ἀριθμ. 245).

Οὕτως ἔχομεν 0+λογ. γ ἢ λογ. γ=λογ. α+λογ. β.

Λοιπὸν βάλλοντες ἀντὶ τοῦ γ τὴν τιμήν του αβ, ἔχομεν

$$\lambda o\gamma.\ (\alpha\times\beta)=\lambda o\gamma.\ \alpha+\lambda o\gamma.\ \beta.$$

Ὅθεν βλέπομεν ὅτι ὁ λογάριθμος τοῦ γινομένου δύο ἀριθμῶν τῆς προόδου (Α) εἶναι ἴσος μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν λογαρίθμων τῶν δύο τούτων ἀριθμῶν.

Κατὰ τοῦτο λοιπὸν διὰ νὰ λάβωμεν τὸ γινόμενον δύο τινῶν ἀριθμῶν τῆς προόδου (Α), ἀρκεῖ νὰ λάβωμεν τοὺς λογαρίθμους των εἰς τὴν πρόοδον (Β), νὰ τοὺς προσθέσωμεν, καὶ νὰ ζητήσωμεν ἔπειτα εἰς ποῖον ἀριθμὸν ἀνταποκρίνεται τοῦτο τὸ ἄθροισμα. Ὁ δ' ἀνταποκρινόμενος ἀριθμὸς εἶναι τὸ ζητούμενον γινόμενον.

Οὕτως ἔστωσαν οἱ δύο ἀριθμοὶ 64 καὶ 256, τῶν ὁποίων πρέπει νὰ λάβωμνν τὸ γινόμενον.

Λαμβάνω τοὺς λογαρίθμους των 18 καὶ 24 εἰς τὴν πρόοδον (Β), τοὺς προσθέτω, καὶ ἔχω 42. Ἔπειτα ζητῶ εἰς ποῖον ἀριθμὸν ἀνταποκρίνεται τὸ 42, καὶ εὑρίσκω 16384, τὸ ζητούμενον γινόμενον.

Εὑρίσκω παρομοίως ὅτι 12+27 ἢ 39, ἄθροισμα τῶν λογαρίθμων τοῦ 16 καὶ 512 ἀνταποκρίνεται εἰς 8192, γινόμενον τῶν δύο ἀριθμῶν 16, καὶ 512.

§. 256. Συνέπεια. Ἔστωσαν α, β, γ, δ . . . . πολλοὶ ἀριθμοὶ τῆς προόδου (Α). Ἐκ τῶν εἰρημένων προκύπτει, ὅτι λογ. αβγ=λογ. αβ+λογ. γ=λογ. α+λογ. β+λογ. γ.

Λογ. $\alpha\beta\gamma\delta$ = λογ. $\alpha\beta\gamma$ + λογ. δ = λογ. α + λογ. β + λογ. γ + λογ. δ, καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

Λοιπὸν ἐν γένει, ὁ λογάριθμος τοῦ γινομένου ἀριθμοῦ τινὸς παραγόντων εἶναι ἴσος μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν λογαρίθμων ὅλων τῶν παραγόντων.

Οὕτω διὰ νὰ λάβωμεν τὸ γινόμενον πολλῶν ἀριθμῶν τῆς προόδου (Α), ἀρκεῖ νὰ προσθέσωμεν τοὺς λογαρίθμους των λαμβανομένους εἰς τὴν πρόοδον (Β), καὶ νὰ προσδιορίσωμεν εἰς ποῖον ἀριθμὸν ἀνταποκρίνεται τὸ ἄθροισμα· ὁ δὲ ἀνταποκρινόμενος ἀριθμὸς εἶναι τὸ ζητούμενον γινόμενον.

§. 257. Παρατήρησις. Αἱ δύο ἰσότητες $\gamma=\alpha\times\beta$, καὶ λογ. γ = λογ. α + λογ. β, ἀπὸ τὰς ὁποίας ἐκβάλαμεν τὴν προηγουμένην ἰδιότητα, ὑποθέτουν προφανῶς, ὅτι ὁ πρῶτος ὅρος τῆς προόδου (Α) εἶναι ἴσος μὲ 1, καὶ ὅτι ὁ πρῶτος ὅρος τῆς πρόοδου (Β) εἶναι ἴσος μὲ 0.

Ἂς ἴδωμεν τί ἤθελεν ἀκολουθήσει, ἂν ὁ πρῶτος ὅρος ἦτον ἀριθμός τις x διὰ τὴν πρώτην πρόοδον, καὶ λογ. x. διὰ τὴν δευτέραν.

Ἠθέλαμεν ἔχει κατὰ τὰ εἰρημένα (ἀριθμ. 255).

1ον. Διὰ τὴν πρόοδον (Α) . . . . . $x\times\gamma=\alpha\times\beta$.

ὅθεν . . . . $\gamma=\dfrac{\alpha\times\beta}{x}$.

2ον. Διὰ τὴν πρόοδον (Β) . . .

λογ. x + λογ. γ = λογ. α + λογ. β,

ὅθεν . . . . . λογ. γ = λογ. α + λογ. β — λογ. x.

Δηλαδὴ τὸ ἄθροισμα τῶν λογαρίθμων δύο ἀριθμῶν α καὶ β τῆς προόδου (Α) ἐλαττωθὲν ἀπὸ τὸν πρῶτον ὅρον τῆς προόδου (Β), εἶναι ἴσον μὲ τὸν λογάριθμον τοῦ πηλίκου τῆς διαιρέσεως τοῦ γινομένου

τῶν δύο ἀριθμῶν α καὶ β διὰ τοῦ πρώτου ὅρου τῆς προόδου (A).

Οὕτω διὰ νὰ μεταχειριζώμεθα τὴν ἰδιότητα ταύτην, πρέπει

1ον. Νὰ κάμνωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν λογαρίθμων.

2ον. Νὰ ἀφαιρῶμεν ἀπὸ τὸ ἄθροισμα τοῦτο τὸν πρῶτον ὅρον τῆς προόδου (B), καὶ νὰ ζητῶμεν εἰς ποῖον ἀριθμὸν τῆς προόδου (A), ἀνταποκρίνεται ἡ διαφορά.

3ον. Νὰ πολλαπλασιάζωμεν τὸν ἀνταποκρινόμενον ἀριθμὸν ἐπὶ τὸν πρῶτον ὅρον τῆς προόδου (A), καὶ οὕτω θέλομεν λάβει τὸ ζητούμενον γινόμενον.

Ὁδηγούμεθα λοιπὸν εἰς τὸ νὰ κάμωμεν πρόσθεσιν, ἀφαίρεσιν, καὶ πολλαπλασιασμὸν διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐξαγόμενον ἀπὸ ἕνα πολλαπλασιασμόν.

Ὅταν ὅμως ὑποθέτωνται οἱ πρῶτοι ὅροι ἴσοι μὲ 1 καὶ 0, ἡ ἀφαίρεσις καὶ ὁ πολλαπλασιασμὸς γίνονται ἄφαντα. Εἶναι λοιπὸν ἡ ὑπόθεσις αὕτη ἀναπόφευκτος· (ὅρα ἀριθμ. 254).

§. 258. Δευτέρα ἰδιότης. Ἐπειδὴ εἰς τὴν διαίρεσιν ὁ διαιρετέος θεωρεῖται ὡς γινόμενον, τοῦ ὁποίου ὁ διαιρέτης καὶ τὸ πηλίκον εἶναι οἱ δύο παράγοντες, ἕπεται ὅτι ὁ λογάριθμος τοῦ διαιρετέου εἶναι ἴσος μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν λογαρίθμων τοῦ διαιρέτου καὶ τοῦ πηλίκου. Οὕτως ἀφαιροῦντες τὸν λογάριθμον τοῦ διαιρέτου ἀπ' ἐκεῖνον τοῦ διαιρετέου λαμβάνομεν τὸν λογάριθμον τοῦ πηλίκου.

Λοιπὸν ὁ λογάριθμος τοῦ πηλίκου τῆς διαιρέσεως δύο ἀριθμῶν τῆς προόδου (A), εἶναι ἴσος μὲ τὴν διαφορὰν μεταξὺ τοῦ λογαρίθμου τοῦ διαιρετέου, καὶ ἐκείνου τοῦ διαιρέτου.

Κατὰ τοῦτο λοιπὸν, διὰ νὰ ἐκτελέσωμεν διαίρεσιν δύο ἀριθμῶν ἀνηκόντων εἰς τὴν πρόοδον (Α), ἀρκεῖ νὰ λάβωμεν εἰς τὴν πρόοδον (Β) τοὺς λογαρίθμους τοῦ διαιρετέου καὶ τοῦ διαιρέτου, νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸν δεύτερον ἀπὸ τὸν πρῶτον, καὶ νὰ προσδιορίσωμεν εἰς ποῖον ἀριθμὸν τῆς προόδου (Α) ἀνταποκρίνεται αὕτη ἡ διαφορά. Οὕτω λαμβάνεται τὸ ζητούμενον πηλίκον.

Ἂς διαιρεθῇ 16384 διὰ 256.

Λαμβάνω εἰς τὴν πρόοδον (Β) τοὺς λογαρίθμους 42 καὶ 24 τῶν δύο ἀριθμῶν. Ἀφαιρῶ 24 ἀπὸ 42, καὶ ἔχω 18. Ζητῶ τὸν εἰς 18 ἀνταποκρινόμενον ἀριθμὸν, καὶ εὑρίσκω 64 τὸ ζητούμενον πηλίκον.

Ἡ δὲ τὴν διαίρεσιν ἀποβλέπουσα ἰδιότης ἐκφράζεται οὕτω μ' ἕνα σύντομον τρόπον,

$$\text{λογ.}\ \frac{α}{β} = \text{λογ.}\ α - \text{λογ.}\ β.$$

§. 259. Τρίτη ἰδιότης. Ἐπειδὴ δύναμίς τις βαθμοῦ ὁποιουδήποτε ἀριθμοῦ τινὸς εἶναι (ἀριθ. 111) τὸ γινόμενον τόσων ἴσων μὲ τοῦτον τὸν ἀριθμὸν παραγόντων, ὅσας μονάδας ἔχει τῆς δυνάμεως ὁ ἐκθέτης, ἕπεται φανερὰ (ἀριθμ. 256) ὅτι ὁ λογάριθμος δυνάμεώς τινος βαθμοῦ ὁποιουδήποτε ἑνός τινος ἀριθμοῦ τῆς προόδου (Α), εἶναι ἴσος μὲ τὸν λογάριθμον τοῦ ἀριθμοῦ πολλαπλασιαζομένου ἐπὶ τὸν τῆς δυνάμεως ἐκθέτην.

Οὕτως· $\text{λογ.}\ α^5$, ἢ $\text{λογ.}\ α \times α \times α \times α \times α =$
$5\ \text{λογ.}\ α$,

$$\text{λογ.}\ α^7 = 7\ \text{λογ.}\ α,$$

καὶ ἐν γένει $\text{λογ.}\ α^μ = μ.\ \text{λογ.}\ α$.

Λοιπὸν διὰ νὰ λάβωμεν τὸ ἐξαγόμενον ἑνὸς σχηματισμοῦ δυνάμεως ἀριθμοῦ τινος τῆς προόδου (Α), ἀρκεῖ νὰ λάβωμεν εἰς τὴν πρόοδον (Β) τὸν λογάριθμον τούτου τοῦ ἀριθμοῦ, νὰ τὸν πολλαπλασιάσωμεν

ἐπὶ τὸν τῆς δυνάμεως ἐκθέτην, καὶ νὰ προσδιορίσωμεν, εἰς ποῖον ἀριθμὸν τῆς προόδου (Α) ἀνταποκρίνεται τοῦτο τὸ γινόμενον· ὁ δὲ ἀνταποκρινόμενος ἀριθμὸς θέλει εἶναι ἡ ζητουμένη δύναμις.

Π. χ. Ὑψωθήτω 32 εἰς τὴν $3^{ην}$ δύναμιν.

Λαμβάνω 15 λογάριθμον τοῦ 32, τὸν πολλαπλασιάζω ἐπὶ 3 ἐκθέτην τῆς δυνάμεως, ταὶ ἔχω 45. Ζητῶ εἰς ποῖον ἀριθμὸν ἀνταποκρίνεται 45, καὶ εὑρίσκω 32768, τὴν $3^{ην}$ δύναμιν τοῦ 32.

§. 260. Τετάρτη καὶ τελευταία ἰδιότης. Ἠξεύρομεν, ὅτι δύο ἀριθμοὶ ἐκφρασμένοι ὁ ἕνας διὰ $α$, καὶ ὁ ἄλλος διὰ $α^μ$, συνδέονται μεταξύ των οὕτως, ὥστε ἐπειδὴ ὁ δεύτερος εἶναι ἡ $μ^η$ δύναμις τοῦ πρώτου, κατ' ἀντίστροφον λόγον καὶ ὁ πρῶτος εἶναι ἡ $μ^η$ ῥίζα τοῦ δευτέρου.

Ἀλλ' ἐδείχθη ὅτι λογ. $α^μ$ = μ. λογ. $α$,

Λοιπὸν διαιροῦντες διὰ μ, ἔχομεν λογ. $α$ = $\frac{λογ.\ α^μ}{μ}$.

Δηλαδὴ ὁ λογάριθμος τῆς $μ^{ης}$ ῥίζης ἑνὸς ἀριθμοῦ εἶναι ἴσος μὲ τὸν λογάριθμον τοῦ ἀριθμοῦ, διαιρεθέντος διὰ τοῦ δείκτου τῆς ἐξαχθησομένης ῥίζης· ἢ λογ. $\sqrt[μ]{β} = \frac{λογ.\ β.}{μ}$

Οὕτω διὰ νὰ ἐξάξωμεν τὴν $μ^{ην}$ ῥίζαν ἀριθμοῦ τινος τῆς προόδου (Α), ἀρκεῖ νὰ λάβωμεν τὸν λογάριθμόν του εἰς τὴν πρόοδον (Β), νὰ τὸν διαιρέσωμεν διὰ μ, καὶ ἔπειτα νὰ ζητήσωμεν εἰς ποῖον ἀριθμὸν ἀνταποκρίνεται τὸ πηλίκον τοῦτο· ὁ δὲ ἀνταποκρινόμενος ἀριθμὸς εἶναι ἡ ζητουμένη ῥίζα.

Ἃς ἐξαχθῇ ἡ $3^η$ ῥίζα τοῦ 32768.

Λαμβάνω 45 λογάριθμον τοῦ 32798, καὶ τὸν διαιρῶ διὰ 3, δείκτου τῆς ῥίζης, εὑρίσκω 15, τὸ ὁποῖον ἔχει ἀνταποκρινόμενον ἀριθμὸν 32. Λοιπὸν 32 εἶναι ἡ ζητουμένη ῥίζα.

Ἄς ἐξαχθῇ ἀκόμη ἡ 5^{η} ῥίζα τοῦ 32768.

Λαμβάνω 45 λογάριθμον τοῦ 32768, τὸν διαιρῶ διὰ 5, δείκτου τῆς ἐξαχθησομένης ῥίζης, καὶ ἔχω 9. Ὁ δὲ ἀνταποκρινόμενος εἰς 9 ἀριθμὸς εἰς τὴν πρόοδον (A) εἶναι 8. Λοιπὸν 8 εἶναι ἡ 5^{η} ῥίζα τοῦ 32768.

„Κατασκευὴ τῶν πινάκων τῶν Λογαρίθμων."

§. 261. Αἱ προηγούμεναι θεωρίαι ἀρκοῦν διὰ νὰ καταλάβωμεν τὴν ὠφέλειαν πίνακός τινος λογαρίθμων, δηλαδὴ πίνακος ἔχοντος ἀφ' ἑνὸς μὲν μέρους σειρὰν ἀριθμῶν εἰς πρόοδον κατὰ πηλίκον, ἀπὸ τοῦ ἄλλου δὲ τοὺς λογαρίθμους των, ἢ τοὺς ἀριθμοὺς εἰς πρόοδον κατὰ διαφοράν.

Ἐπειδὴ δὲ εἴδομεν, ὅτι ὅλαι αἱ ἐργασίαι ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν ὁποιασδήποτε φύσεως ἄγονται πάντοτε εἰς ἐργασίας ἐπὶ ἀριθμῶν ἀκεραίων, ἕπεται ὅτι διὰ τὴν ἁπλότητα τῶν ὑπολογισμῶν, ἀρκεῖ νὰ περιέχῃ ὁ πίναξ τοὺς λογαρίθμους τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν. Ἰδοὺ τώρα πῶς σχηματίζεται τοιοῦτος πίναξ.

Μεταξὺ τῶν ἀπειραρίθμων συστημάτων δύο προόδων τῆς μὲν κατὰ πηλίκον, τῆς δὲ κατὰ διαφορὰν, ἐκλέξαμεν τὴν δεκαπλῆν πρόοδον. ∷ 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : 100000 : 1000000 . . . . , καὶ τὴν φυσικὴν τῶν ἀριθμῶν σειράν,

÷ 0 . 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . . . . . .

Τούτου τεθέντος, ἂς ἐννοήσωμεν, ὅτι ἐβάλαμεν μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν 1 καὶ 10, 10 καὶ 100,

100 καὶ 1000 (ἀριθμ. 250) τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ἀναλογικῶν μέσων, ἀλλ' ἀρκετὰ μεγάλον, ὥστε νὰ ἤμεθα βέβαιοι ὅτι 2, 3, 4 . . . . 9 | 11, 12, 13, ... 99 | 101, 102, ... 999, περιέχονται μεταξὺ τῶν ἀναλογικῶν τούτων μέσων, ἢ τοὐλάχιστον δὲν διαφέρουν ἀπό τινας αὐτῶν, εἰμὴ κατὰ ποσότητα τόσον μικρὰν, ὥστε χωρὶς ἐπαισθητὸν ἁμάρτημα νὰ ἐπέχωσι τὸν τόπον των.

Ἂς ἐννοήσωμεν ἔπειτα, ὅτι μεταξὺ τῶν ὅρων 0, καὶ 1, 1 καὶ 2, 2 καὶ 3, 3 καὶ 4 τῆς προόδου κατὰ διαφορὰν, ἐβάλαμεν τόσους διαφορικοὺς μέσους, ὅσους καὶ ἀναλογικούς. Εἶναι φανερὸν κατὰ τὰ προειρημένα, ὅτι οἱ ὅροι τῆς νέας προόδου κατὰ διαφορὰν θέλουν εἶναι οἱ λογάριθμοι τῆς νέας προόδου κατὰ πηλίκον.

Κατὰ τὸ παρὸν ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι εἰς τὸν ἀπέραντον ἀριθμὸν τῶν ὅρων τῶν δύο προόδων λογαριάζομεν μόνον τοὺς ἀκεραίους ἀριθμοὺς 1, 2, 3, 4 . . . . 9, 10, 11, 12 . . . . ἀνήκοντας εἰς τὴν πρόοδον κατὰ πηλίκον, ὡς καὶ τοὺς λογαριθμους, οἱ ὁποῖοι τοὺς ἀνταποκρίνονται οὕτω. Θέλομεν λάβει ἕνα πίνακα, περικλείοντα.

Ἀφ' ἑνὸς μὲν μέρους τοὺς κατὰ διαδοχὴν ἀκεραίους ἀριθμοὺς, οἱ ὁποῖοι τῷ ὄντι δὲν θέλουν κάμει πλέον μεταξύ των πρόοδον κατὰ πηλίκον, ἀλλὰ θέλουν θεωρεῖσθαι ἐπίσης ὡς ὅροι προόδου τινὸς τούτου τοῦ εἴδους.

Ἀπ' ἄλλου δὲ, τοὺς λογαρίθμους των, οἱ ὁποῖοι δὲν θέλουν εἶναι εἰς πρόοδον κατὰ διαφορὰν, ἀλλὰ θέλουν εἶναι ἐπίσης ὅροι ἀναλογίας τινὸς τούτου τοῦ εἴδους, κρατοῦντες τὴν αὐτὴν τάξιν, τὴν ὁποίαν κρατοῦν εἰς τὴν πρόοδον κατὰ πηλίκον· οἱ ἀριθμοὶ, τῶν ὁποίων τοὺς λογαρίθμους παρασταίνουν οὗτοι οἱ ὅροι.

Οὕτω λοιπὸν αἱ ἀποβλέπουσαι τὰς διαφόρους ἀριθμικὰς ἐργασίας ἰδιότητας ἐφαρμόζονται εἰς ὅλους τοὺς ἀριθμοὺς τούτου τοῦ πίνακος, καὶ εἰς τοὺς λογαρίθμους των.

Σ. Κ. Κατ' ἀρχὰς φαίνεται δύσκολον νὰ καταλάβωμεν πῶς ἐμβάλλεται μεταξὺ δύο δοθέντων ἀριθμῶν 1 καὶ 10 π. χ. μέγας ἀριθμὸς ἀναλογικῶν μέσων· ἐπειδὴ διὰ νὰ ἐμβάλωμεν δύο μόνον, πρέπει (ἀρ. 249) κατὰ τὸν τύπον $x = \sqrt[\mu+1]{\frac{\lambda}{\alpha}}$, ὁ ὁποῖος δίδει τὴν ἔκφρασιν τοῦ λόγου, νὰ ἐξάξωμεν μετὰ πολλοτάτας προσεγγίσεις τὴν $3^{\eta\nu}$ ῥίζαν τοῦ $\frac{10}{1}$ ἢ τοῦ 10, ἐργασία τὴν ὁποίαν ἠξεύρομεν ἤδη πόσον εἶναι πολύπονος.

Τί δὲ ἠθέλαμεν κάμει, ἐὰν ἔπρεπε νὰ ἐμβάλωμεν 10,000,000, ὡς δείχνουν αἱ πραγματεῖαι τῆς ἀριθμητικῆς; Ἀλλ' ὁ σκοπός μας ἦτον νὰ δείξωμεν τὴν ὕπαρξιν λογαριθμικοῦ τινὸς πίνακος. Πλὴν εἰς τὰ ὑψηλότερα μέρη τῆς Μαθηματικῆς εὑρίσκονται μέθοδοι πολὺ πλέον τούτων συντομώτεραι.

§. 262. Ἀλλ' ἰδοὺ στοιχειώδης τις μέθοδος ὁπωσοῦν πλέον εὐκατάληπτος, ὡς ὑποθέτουσα διαδοχικὰς ἐξαγωγὰς τετραγωνικῶν ῥιζῶν.

Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι θέλομεν νὰ προσδιορίσωμεν τὸν λογάριθμον τοῦ τοῦ 5 μερικῶς.

Ἐπειδὴ 5 περιλαμβάνεται μεταξὺ 1 καὶ 10, ἃς ἐμβάλομεν μόνον ἕνα μέσον ἀναλογικὸν μεταξὺ 1 καὶ 10· (ἔχομεν ἀρ. 210· $1 : \chi :: \chi : 10$, ὅθεν $\chi = \sqrt{10} = 3,1622776 \ldots$)· ἔπειτα ἕνα διαφορι-

κὸν μέσον μεταξὺ 0 καὶ 1 · (ἔχομεν ἀριθ. 206. $\div$ 0 : ψ : ψ : 1 · ὅθεν $\psi = \frac{1}{2} = 0{,}5$.)

Τούτου τεθέντος, $\frac{1}{2}$ ἢ 0,5 εἶναι φανερὰ ὁ λογάριθμος τοῦ $\sqrt{10}$, ἐξαγόμενον σύμφωνον προσέτι μὲ τὴν ἰδιότητα τοῦ ἀρ. 260, ἐπειδὴ ἔχομεν

$$\text{λογ.}\ \sqrt{10} = \frac{\text{λογ.}\ 10}{2} = \frac{1}{2}.$$

Κατὰ τὸ παρὸν, ἐπειδὴ 5 εἶναι μεγαλήτερον παρὰ 3,162 .... καὶ μικρότερον παρὰ 10, ἂς ἐμβάλωμεν νέον ἀναλογικὸν μέσον μεταξὺ 3,1622 .... καὶ 10. ἔπειτα μέσον διαφορικὸν μεταξὺ $\frac{1}{2}$ καὶ 1 · ὅθεν

3,1622... : χ :: χ : 10 · ὅθεν $\chi = \sqrt{31{,}622776} = 5{,}623$ .... καὶ $\frac{1}{2}$. ψ : ψ . 1, ὅθεν $\psi = \frac{3}{4} = 0{,}75$.

Ὁ διαφορικὸς μέσος εἶναι προσέτι ὁ λογάριθμος τοῦ νέου ἀναλογικοῦ μέσου.

Ἐπειδὴ ἀκόμη ὁ ἀριθμὸς 5 περιέχεται μεταξὺ 3,162 ... καὶ 5,623 . ; λαμβάνομεν ἀναλογικὸν τινὰ μέσον μεταξὺ 3,162 .... καὶ 5,623 .... ἔπειτα μέσον διαφορικὸν μεταξὺ 0,5 καὶ 0,75.

Ἤδη, εἶναι φανερὸν ὅτι ἀκολουθοῦντες νὰ ἐμβάλλωμεν ἀναλογικοὺς μέσους, θέλομεν φθάσει εἰς τὸ νὰ προσδιορίσωμεν δύο, οἱ ὁποῖοι θέλουν διαφέρει ὁ εἷς ἀπὸ τὸν ἄλλον καθ' ὅσον μικρὰν ποσότητα θέλομεν, καὶ οἱ ὁποῖοι θέλουν περιλαμβάνει τὸν ἀριθμὸν 5. Ἠμπορεῖ λοιπὸν χωρὶς σφάλμα νὰ ἐπέχῃ τὸν

τόπον τοῦ 5, ἀναλογικός τις μέσος, καὶ ὁ εἰς αὐτὸν ἀνταποκρινόμενος διαφορικὰς θέλ' εἶναι ὁ ζητούμενος λογάριθμος. Μὲ παρομοίας πράξεις λαμβάνονται καὶ οἱ λογάριθμοι τοῦ 2, 3, 7.

Ἂς παρατηρήσωμεν προσέτι, ὅτι ἀρκεῖ ὑπολογιζόμενοι οὕτως τὸν λογάριθμον ἑκάστου ἀκεραίου ἀριθμοῦ νὰ προσδιορίσωμεν κατ' εὐθεῖαν τοὺς λογαρίθμους τῶν πρώτων ἀριθμῶν. Οἱ δὲ λογάριθμοι τῶν πολλαπλῶν ἀριθμῶν λαμβάνονται διὰ τῶν λογαρίθμων τῶν πρώτων ἀριθμῶν, κατὰ τὰς ἰδιότητας ἐν ἀρ. 256 καὶ 259.

Π. χ. Ἔχομεν λογ. $15 =$ λογ. $5 \times 3 =$ λογ. $5 +$ λογ. 3. Λογ. $36 =$ λογ. $2^2 \times 3^2 = 2$ λογ. $2 + 2$ λογ. 3, καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

„Διάταξις καὶ χρῆσις τῶν κοινῶν Πινάκων.“

§. 263. Καλοῦνται κοινοὶ Λογάριθμοι ἐκεῖνοι, οἵτινες σχηματίζονται κατὰ τὸ σύστημα τῶν δύο προόδων,

$$\left\{\begin{array}{l} \div\!\div 1 : 10 : 100 : 1000 \;\ldots\ldots \\ \div\; 0 \,.\; 1 \,.\; 2 \,.\; 3 \;\ldots\ldots \end{array}\right\}$$ ἐπειδὴ οὗτος εἶναι ὁ κοινότερος πίναξ.

Ὀνομάζονται ἀκόμη λογάριθμοι τοῦ Βριγγίου τοῦ πρώτου τῶν πινάκων ἐφευρετοῦ.

Καλεῖται δὲ βάσις τοῦ κοινοῦ συστήματος, ὁ λόγος τῆς κατὰ πηλίκον προόδου, ἡ 10.

Προκύπτει ἐκ τῆς θεωρίας τῶν δύο προόδων,

1ον. ὅτι ὁ λογάριθμος τῆς βάσεως ἡ 10 εἶναι ἴσος μὲ 1.

2ον. ὅτι ὁ λογάριθμος τῆς μονάδος εἶναι 0.

Ἡ τελευταία ἰδιότης εἶναι ἀληθὴς εἰς ὅλον τὸ λογαριθμικὸν σύστημα, ἐπειδὴ προείδομεν, ὅτι αἱ δύο

πρόοδοι πρέπει νὰ ἀρχίζωσιν ἀπὸ 1 καὶ ἀπὸ 0.

Ἀλλ' ἡ πρώτη ὑποθέτει τὴν κατὰ διαφορὰν πρόοδον, ὡς τὴν φυσικὴν σειρὰν τῶν ἀριθμῶν, τὸ ὁποῖον δὲν εἶναι ἀναπόφευκτον εἰς τὴν ὕπαρξιν τῶν ἰδιοτήτων τοῦ λογαριθμικοῦ συστήματος.

Ὅταν ἦν' ὁποιαδήποτε ἡ κατὰ διαφορὰν πρόοδος, ἠμποροῦμεν νὰ εἴπωμεν μόνον, ὅτι ὁ λόγος τῆς προόδου κατὰ πηλίκον, ἢ ἡ βάσις τοῦ συστήματος ἔχει λογάριθμον τὸν λόγον τῆς προόδου κατὰ διαφοράν.

§. 264. Γνωρίζομεν ἀκόμη κατὰ τὰς δύο εἰρημένας προόδους, ὅτι οἱ λογάριθμοι ὅλων τῶν ἀκεραίων ἢ κλασματικῶν ἀριθμῶν τῶν μεταξὺ 1 καὶ 10 περιεχομένων, εἶναι μικρότεροι τῆς μονάδος· ὅτι ἐκεῖνοι τῶν μεταξὺ 10 καὶ 100 περιεχομένων ἀριθμῶν, συνθέτονται ἀπὸ μονάδα καὶ ἕν τι κλάσμα· ὅτι ἐκεῖνοι τῶν μεταξὺ 100 καὶ 1000 περιεχομένων ἀριθμῶν συνθέτονται ἀπὸ δύο μονάδας καὶ ἕν τι κλάσμα, καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

Εἰς τοὺς τοῦ Βριγγίου πίνακας τὰ κλάσματα ταῦτα ἐξετιμήθησαν εἰς δεκαδικά.

Ὡσαύτως οἱ λογάριθμοι τῶν ἀπὸ ἓν μόνον ψηφίον συνισταμένων ἀριθμῶν παρασταίνονται ἀπὸ δεκαδικὸν κύριον κλάσμα, οἱ δὲ τῶν ἀπὸ δύο ψηφία ἀριθμῶν ἔχουν 1 ἀκέραιον μέρος, ἀκολουθούμενον προσέτι ἀπὸ δεκαδικὸν κλάσμα.

Οἱ λογάριθμοι τῶν ἀπὸ τρία ψηφία ἀριθμῶν ἔχουν 2 ἀκέραιον μέρος.

Ἐν γένει τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ λογαρίθμου ἑνὸς ἀριθμοῦ περικλείει, μεῖον μιᾶς, τόσας μονάδας, ὅσα ψηφία ἔχει ὁ ἀριθμὸς, ἂν ἦναι ἀκέραιος, ἢ τὸ ἀκέραιον αὐτοῦ μέρος, ἂν ἦναι κλασματικός.

Τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ λογαρίθμου ὀνομάζεται χαρακτηριστικόν· ἐπειδὴ διὰ μόνης τῆς θεωρίας αὐτοῦ

κρίνομεν εἰς ποίας τάξεις μονάδων περιλαμβάνεται ὁ ἀνταποκρινόμενος εἰς τὸν προτεθέντα λογάριθμον ἀριθμός.

Οὕτω 2,74056 ἀνταποκρίνεται εἰς ἀριθμὸν ἀπὸ τρία ψηφία· δηλαδὴ εἰς ἀριθμὸν μεταξὺ 100 καὶ 1000 περιεχόμενον. Ὡσαύτως 4,05678 . . . εἶναι ὁ λογάριθμος τοῦ μεταξὺ 10000 καὶ 100000 περιλαμβανομένου ἀριθμοῦ.

§. 265. Γνωρίζοντες τὸν λογάριθμον ὁποιουδήποτε ἀριθμοῦ, λαμβάνομεν εὐκόλως ἐκεῖνον ἑνὸς ἄλλου δεκάκις, ἑκατοντάκις, χιλιάκις . . . μεγαλητέρου. Ἀρκεῖ πρὸς τοῦτο νὰ προσθέσωμεν 1, 2, 3, ... μονάδας εἰς τὸ χαρακτηριστικόν.

Ἔστω τῷ ὄντι α ὁ ἀριθμὸς, τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν τὸν λογάριθμον. Ἔχομεν λοιπὸν (ἀριθ. 255).

$$\text{λογ. } \alpha \times 10 = \text{λογ. } \alpha + \text{λογ. } 10 = \text{λογ. } \alpha + 1$$

$$\text{λογ. } \alpha \times 100 = \text{λογ. } \alpha + \text{λογ. } 100 = \text{λογ. } \alpha + 2$$

. . . .

$$\text{λογ. } \alpha \times 10^{\nu} = \text{λογ. } \alpha + \text{λογ. } 10^{\nu} = \text{λογ. } \alpha + \nu.$$

Ἀντιστρόφως οἱ λογάριθμοι ἑνὸς ἀριθμοῦ ὅταν γνωσθῇ, διὰ νὰ λάβωμεν ἐκεῖνον ἑνὸς ἄλλου δεκάκις, ἑκατοντάκις, χιλιάκις . . . μικροτέρου, ἀρκεῖ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὸ χαρακτηριστικὸν 1, 2, 3, 4 . . . μονάδας.

Τῷ ὄντι ἔχομεν (ἀριθμ. 158)

$$\text{λογ. } \frac{\alpha}{1000} = \text{λογ. } \alpha - \text{λογ. } 1000 = \text{λογ. } \alpha - 3 \text{· καὶ}$$

οὕτω περὶ τῶν ἄλλων.

Ἐντεῦθεν συμπεραίνεται, ὅτι οἱ λογάριθμοι τῶν ἀριθμῶν

4567 | 456,7 | 45,67 | 4,567 |, π. χ. δὲν διαφέρουν ἀλλήλων κατὰ τὸ δεκαδικὸν μέρος, ἀλλὰ μόνον κατὰ τὸ χαρακτηριστικὸν, τὸ ὁποῖον διὰ μὲν τὸν πρῶ-

τον ἀριθμὸν εἶναι 3, διὰ δὲ τὸν δεύτερον, 2, καὶ διὰ τὸν τρίτον 1 καὶ 0 διὰ τὸν τέταρτον.

Ἐν γένει ὁ λογάριθμος δεκαδικοῦ κλάσματος εἶναι ὁ αὐτὸς, ἐκτὸς τοῦ χαρακτηριστικοῦ, μὲ τὸν λογάριθμον τοῦ προτεθέντος ἀριθμοῦ μετὰ τὴν τῆς ὑποστιγμῆς ἀφαίρεσιν· ἀλλ' εἰς τὸ δεκαδικὸν μέρος δὲν εἶναι καμμία διαφορά.

Εἶναι καλὸν νὰ παρατηρήσωμεν, ὅτι ἡ ἰδιότης αὕτη εἶναι ὅλως διόλου ἰδιάζουσα εἰς τὸ σύστημα τῶν λογαρίθμων τοῦ Βριγγίου. Ὅθεν καὶ προτιμητέον τὸ σύστημα τοῦτο παντὸς ἄλλου, ἐπειδὴ τὰ δεκαδικὰ κλάσματα εἶναι ἐκεῖνα, ἐφ' ὧν συχνότερα ἐργαζόμεθα.

§. 286. Ἦτον ἀδύνατον νὰ βαλθῶσιν εἰς τοὺς πίνακας ἄλλοι παρὰ οἱ τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν λογάριθμοι, ἐπειδὴ δύο διαδοχικῶν ἀριθμῶν περιλαμβανόντων μεταξύ των ἀπειρίαν κλασματικῶν ἀριθμῶν, ἤθελεν εἶναι παράλογον νὰ προτιμήσωμεν τούτους ἀπ' ἐκείνους. Ἐκτὸς τούτου οἱ ὑπολογισμοὶ ἐπὶ τῶν κλασματικῶν ἦσαν δυσκολώτατοι, καὶ εἰς ἕν τι ὅριον ἐπίσης πολλὰ μικρὸν ἦτον ἀδύνατον νὰ περιορισθῶσι.

Οὕτως εἶναι πίνακες οἱ ὁποῖοι φθάνουν ἕως εἰς 10000, ἄλλοι εἰς 20000· οἱ πλέον ἐκτεταμένοι εἶναι οἱ τοῦ Καλλέτου, φθάνοντες ἕως εἰς 108000.

Ἤδη αἱ λογαριθμικαὶ ἐφαρμογαὶ ἀπαιτοῦν συχνὰ τὴν ἀναζήτησιν λογαρίθμου ἑνὸς ἀριθμοῦ, εἴτε ὑπερβαίνοντος τὰ τῶν πινάκων ὅρια, εἴτε ὄντος κλασματικοῦ. Πῶς εὑρίσκεται τότε ὁ λογάριθμος οὗτος; Τοῦτο θέλομεν ἀναπτύξει διὰ τῶν ἀκολούθων παραδειγμάτων· (ὑποθέτομεν δὲ εἰς ὅσα λέγομεν, ὅτι κρατοῦμεν εἰς χεῖρας μόνον τοὺς μικροὺς πίνακας τοῦ Βεϋνώδου ἢ τοῦ Λαλάνδου).

§. 267. Ἀριθμοῦ ὁποιουδήποτε δοθέντος νὰ προσδιορίσωμεν τὸν λογάριθμον.

1ον. Ἂς προσδιορίσωμεν τὸν λογάριθμον τοῦ 254329.

Ἐπειδὴ ὁ ἀριθμὸς οὗτος ἔχει ἓξ ψηφία, τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ λογαρίθμου του εἶναι 5 (ἀρ. 264). Οὕτω λοιπὸν τὸ ζήτημα καταντᾷ εἰς τὸ νὰ εὕρωμεν τὸ δεκαδικὸν αὐτοῦ μέρος.

Προκύπτει δὲ ἐκ τοῦ ὅ,τι εἴπαμεν ἀρ. 265, ὅτι τὸ δεκαδικὸν τοῦτο μέρος εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ τὸ τοῦ λογαρίθμου 2543,29.

Ἐκ ταύτης τῆς προπαρασκευῆς, συνισταμένης εἰς τὸ νὰ χωρίσωμεν πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ ἀριθμοῦ ἀρκετὰ ψηφία διὰ νὰ εὑρίσκεται τὸ εἰς τὰ ἀριστερὰ μέρος του εἰς τὸν πίνακα, λαμβάνομεν ἀριθμὸν περιεχόμενον μεταξὺ 2543 καὶ 2544· οὕτως ὁ λογάριθμός του εἶναι ἴσος μὲ ἐκεῖνον τοῦ 2543, πλέον ἓν μέρος τῆς διαφορᾶς, τὸ ὁποῖον ὑπάρχει μεταξὺ λογ. 2544 καὶ λογ. 2543.

Εὑρίσκεται εἰς τὸν πίνακα . . . . λογ. 2543 = 3,40535· εὑρίσκεται ἐπίσης 17, διαφορὰ μεταξὺ λογ. 2544, καὶ λογ. 2543. Αὕτη ἡ διαφορὰ 17 ἐκφράζει τὰς μονάδας τῆς τάξεως τοῦ 5του. δεκαδικοῦ ψηφίου, ἢ τὰ 100000ρια.

Τούτου τεθέντος, διὰ νὰ λάβωμεν τὸ μέρος ταύτης τῆς διαφορᾶς, τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ προσθέσωμεν εἰς λογ. 2543, διὰ νὰ ἐξάξωμεν ἐκείνην τοῦ 2543,29, συσταίνομεν ταύτην τὴν ἀναλογίαν. Ἐὰν διὰ μίαν μονάδα διαφορᾶς μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν 2544 καὶ 2543 ἔχωμεν 17 ἑκατοχιλιοστημόρια διαφορᾶς μεταξὺ τῶν λογαρίθμων των, πόσην διαφορὰν θέλομεν ἔχει μεταξὺ τῶν λογαρίθμων διὰ 0,29, τὸ ὁποῖον εἶναι διαφορὰ μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν 2543,29 καὶ 2543. ἢ

$$1 : 17 :: 0{,}29 : x \cdot \quad \text{ὅθεν}$$

$$x = 17 \times 0{,}29 = 4{,}93.$$

Καὶ ὁ 4^{τος}. ὅρος 4,93 εἶναι ἐκεῖνος, τὸν ὁποῖον πρέπει νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸν λογάριθμον 3,40535, διὰ νὰ ἔχωμεν τὸν ζητούμενον λογάριθμον.

Ἐπειδὴ πρέπει νὰ λογαριάζωμεν μόνον τὸ ἐν ἀριστερᾷ τῆς ὑποστιγμῆς μέρος, εἰς τοῦτον τὸν 4^{τον} ὅρον προσθέτομεν 4 ἢ μᾶλλον 5 (ἐπειδὴ τὸ πρῶτον ψηφίον εἰς τὰ δεξιὰ τῆς ὑποστιγμῆς εἶναι μεγαλήτερον παρὰ 5) εἰς τὸ τελευταῖον ψηφίον τοῦ 3,40535, καὶ λαμβάνομεν

λογ. 2543,29 = 3,40540. Λοιπὸν λογ. 254329 = 5,40540.

Τὰς πράξεις δὲ οὕτω διατάττομεν,

λογ. 254329 = λογ. 2543,29 + 2

λογ. 2543 = 3,40535.

διαφ. τοῦ πίν. . . . 17.

1 : 17 :: 0,29 : χ = 4,93 . . . . = ... 5

Λοιπὸν λογ. 2543,29 = 3,40540

καὶ ἑπομένως . . . . . . λογ. 2543 29 = 5,40540

Ἃς προσδιορισθῇ ἀκόμη ὁ λογάριθμος τοῦ 1784967.

Ἔχομεν ἐξ ἀρχῆς . . . . . .

λογ. 1784967 = λογ. 1784,967 + 3

λογ 1784 = 3,25139.

διαφ. τοῦ πίν. 25

1 : 25 :: 0,967 : χ = 24,175. . . . . . . = 24

Λοιπὸν . . . . λογ. 1784,967 = 3,25163

ἑπομένως. . . . . . . λογ. 1784 967 = 6,21163

Σ. Κ. Διὰ νὰ ἐπιλύσωμεν τὰ δύο προηγούμενα ζητήματα, ἐσυστήσαμεν ἀναλογίαν μεταξὺ τῶν διαφορῶν τῶν ἀριθμῶν καὶ τῶν διαφορῶν τῶν λογαρίθμων των. Δείκνυται ἐν Ἀλγέβρᾳ, ὅτι ἡ ἀναλογία αὕτη δὲν εἶναι ποτὲ ἀκριβὴς, ἀλλὰ πλησιάζει τόσον πλέον

εἰς τὴν ἀκρίβειαν, ὅσον οἱ ἀριθμοὶ, διὰ τοὺς ὁποίους ἐσυστάθη, εἶναι μεγαλήτεροι· καὶ δείχνεται προσέτι ὅτι εἰς τὴν χρῆσιν τῶν μικρῶν πινάκων τὸ πραττόμενον σφάλμα δὲν πίπτει ἐπάνω τοῦ 5$^{\text{του}}$ δεκαδικοῦ ψηφίου τοῦ λογαρίθμου, ἐν ὅσῳ ὁ ἀριθμὸς εἶναι ὑπὲρ τὰ 1000. Ἰδοὺ διατὶ ὅταν ἕνας ἀριθμὸς ὑπερβαίνῃ τὰ ὅρια τῶν πινάκων, πρέπει νὰ χωρίζωμεν, ὅσον ἐμποροῦμεν ὀλιγώτερα ψηφία.

2$^{\text{ον}}$. Ζητεῖται ὁ λογάριθμος τοῦ $37\frac{43}{59}$.

Οὗτος ὁ ἀριθμὸς τρέπεται εἰς $\frac{2226}{59}$. Λοιπὸν (ἀρ. 258).

$$\text{λογ. } 37\frac{43}{59} = \text{λογ. } 2226 - \text{λογ. } 59.$$

Εὑρίσκεται δὲ εἰς τὸν πίνακα

$$\text{λογ. } 2226 = 3{,}34753$$
$$\text{λογ. } 59 = 1{,}77085$$

Ὅθεν γινομένης τῆς ἀφαιρέσεως

$$\text{λογ. } 37\frac{43}{59} = 1{,}57668.$$

Ὁ δὲ λογάριθμος ἑνὸς κλασματικοῦ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ, π. χ. τοῦ 479,2564, εὑρίσκεται, ἀφ' οὗ ὡς εἴδομεν (ἀρ. 265) προσδιορισθῇ ὁ λογάριθμος τοῦ 4792564, ἔπειτα ἀφαιρεθῶσι τέσσαρες μονάδες ἀπὸ τὸ χαρακτηριστικὸν, ἢ ἠμποροῦμεν νὰ εἴπωμεν

$$\text{λογ. } 479{,}2564 = \text{λογ. } 4792{,}564 - 1.$$

λογ. 4792 = 3,68052.

διαφ. πίν. 9

1 : 9 :: 0,564 : x = 5,076 . . . . = 3

ὅθεν . . . . λογ. 4792,564 = 3,68057

λοιπὸν . . . . λογ. 479,2564 = 2,68057.

Ἰδὲ τὸ τέλος τούτου τοῦ κεφαλαίου (ἀρ. 274) περὶ τῶν λογαρίθμων τῶν κυρίων κλασμάτων.

§. 268. Ἀφ' οὗ δοθῇ ὁποιοσδήποτε λογάριθμος, νὰ εὕρωμεν τὸν εἰς αὐτὸν ἀνταποκρινόμενον ἀριθμόν.

Ὅταν μεταχειριζώμεθα τοὺς λογαρίθμους εἰς ἀριθμητικῶν τινῶν ἐργασιῶν ἐκτέλεσιν, καταντῶμεν συνήθως εἰς ἐξαγόμενον ἐκφράζον τὸν λογάριθμον τοῦ ζητουμένου ἀριθμοῦ, καὶ πρέπει διὰ μέσου του πίνακος νὰ προσδιορίσωμεν εἰς ποῖον ἀριθμὸν ἀνταποκρίνεται ὁ λογάριθμος οὗτος.

1ον. Ἂς θεωρήσωμεν τὴν περίστασιν, εἰς τὴν ὁποίαν τὸ χαρακτηριστικὸν εἶναι 3, δηλαδὴ τὸ μεγαλήτερον ἀφ' ὅσα εὑρίσκονται εἰς τοὺς μικροὺς πίνακας.

Εὑρεθήτω ὁ ἀνταποκρινόμενος ἀριθμὸς εἰς τὸν λογάριθμον 3,45936.

Ζητοῦμεν πρῶτον τὸν λογάριθμον τούτου ἀνάμεσα εἰς ἐκείνους τῶν ἀπὸ τέσσαρα ψηφία ἀριθμῶν, καὶ εὑρίσκομεν, ὅτι περιέχεται μεταξὺ 3,45924 καὶ 3,45939, οἱ ὁποῖοι εἶναι οἱ λογάριθμοι τοῦ 2879 καὶ 2880. Λοιπὸν ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς εἶναι ἴσος μὲ 2879 πλέον ἕν τι κλάσμα.

Διὰ νὰ λάβωμεν αὐτὸ τὸ κλάσμα, λαμβάνομεν τὴν διαφορὰν τὴν τοῦ πίνακος 15, καὶ τὴν διαφορὰν 12 μεταξὺ τοῦ δοθέντος λογαρίθμου, καὶ ἐκείνου τοῦ 2879· ἔπειτα συσταίνομεν τὴν ἀναλογίαν

Ἐὰν διὰ 15 ἑκατοχιλιοστημόρια διαφορᾶς μεταξὺ λογ. 2880 καὶ λογ. 2879 ἔχωμεν μίαν μονάδα διαφορᾶς μεταξὺ τούτων τῶν ἀριθμῶν, διὰ 12 ἑκατοχιλιοστημόρια διαφορᾶς μεταξὺ τοῦ δοθέντος λογαρίθμου καὶ ἐκείνου τοῦ 2879 πόση διαφορὰ εἶναι μεταξὺ τῶν εἰς αὐτοὺς ἀνταποκρινομένων ἀριθμῶν;

ἢ 15 : 1 :: 12 : χ· ὅθεν $\chi = \frac{12}{18} = 0,8$·

Προσθέτοντες τὸν $4^{\text{τον}}$ ὅρον εἰς 2879, λαμβάνομεν 2879, 8 τὸν ζητούμενον ἀριθμόν.

Ἰδοὺ ὁ πίναξ τῶν ὑπολογισμῶν.

Ἂς καλέσωμεν Ν τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν, ἔχομεν

λογ. Ν = 3, 45936.

Εὑρίσκομεν δὲ εἰς τὸν πίνακα... λογ. 2879 = 3, 45924

διαφ. 12

διαφ. πίν.... 15

15 : 1 :: 12 : χ = 0, 8

Λοιπὸν Ν = 2879, 8.

Σ. Κ. Συνήθως ἀνάγομεν εἰς δεκαδικὸν κλάσμα τὴν ἔκφρασιν τοῦ $4^{\text{του}}$ ὅρου ταύτης τῆς προτάσεως. Ἀλλὰ τότε μεταχειριζόμενοι τοὺς μικροὺς πίνακας, προάγομεν τὴν ἐργασίαν ἕως εἰς τοὺς 10 ὅρους, ἐπειδὴ εἶναι τὸ μόνον δεκαδικὸν ψηφίον, περὶ οὗ εἴμεθα βέβαιοι. Τοῦτο στηρίζεται εἰς δύο αἰτίας.

Πρῶτον. Ἡ ἀναλογία δὲν εἶναι ποτὲ ἀκριβὴς (ἀρ. 267).

Δεύτερον. Αἱ δύο διαφοραὶ αἱ ὑπ' ἀλλήλων διαιρούμεναι, εἶναι ἀκριβεῖς ἕως εἰς τοὺς 100000 ὅρους. Ὅταν δὲ μεταχειριζώμεθα τοὺς τοῦ Καλλέτου πίνακας, ἠμποροῦμεν νὰ προάξωμεν τὴν ζήτησιν ἕως εἰς τοὺς 100 ὅρους, ἀλλὰ διὰ τοὺς ἐπέκεινα τοῦ 100 ἀριθμοὺς δὲν εἴμεθα βέβαιοι.

$2^{\text{αν}}$. Προσδιορισθήτω ὁ ἀνταποκρινόμενος ἀριθμὸς εἰς τὸν λογάριθμον 1, 56834.

Ἀναζητοῦμεν κατ' ἀρχὰς τὸν λογάριθμον τοῦτον ἀνάμεσα εἰς ἐκείνους τῶν ἀριθμῶν ἐκ δύο ψηφίων. Ἂν κατὰ τύχην εὑρεθῇ, λαμβάνομεν τὸν εἰς τὰ πλευρά του ἀνταποκρινόμενον ἀριθμόν.

Ἀλλὰ μὴ εὑρεθέντος, προσθέτομεν 2 εἰς τὸ χαρακτηρικὸν, καὶ ἔχομεν 3,56834. Ζητοῦντες δὲ κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα, τὸν ἀνταποκρινόμενον εἰς τὸν νέον τοῦτον λογάριθμον, ἀριθμὸν, εὑρίσκομεν

3,56834 = λογ. 3701, 2.

Ἀλλ' ἐπειδὴ ὅταν προσθέτωνται 2 μονάδες εἰς τὸ χαρακτηριστικὸν, πολλαπλασιάζεται ὁ ἀριθμὸς ἐπὶ 100, πρέπει διὰ νὰ λάβωμεν τὸν ἀληθῆ ἀριθμὸν νὰ διαιρέσωμεν 3701, 2 διὰ 100, καὶ ἔχομεν 37,012 τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν, μεῖον τοῦ 0,001.

Ἄς εὕρωμεν ἀκόμη τὸν ἀνταποκρινόμενον ἀριθμὸν εἰς 0,86784.

Ἔχομεν ἐξ ἀρχῆς 3,86784=λογ.7376,3
λοιπὸν . . . 0,86784=λογ. 7,3763 μεῖον 0,0001.

Προτεθείσθω ἔτι νὰ προσδιορίσωμεν τὸν ἀνταποκρινόμενον ἀριθμὸν εἰς 5,47659.

Ἀφαιροῦντες ἐξ ἀρχῆς δύο μονάδας, ἔχομεν

3, 47659 = λογ. 2996,3.

Καὶ ἐπειδὴ, ἀφαιρουμένων δύο μονάδων ἀπὸ τὸ χαρακτηρικὸν, ὁ ἀριθμὸς κατασταίνεται ἑκατοντάκις μικρότερος, πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν 2996, 3 ἐπὶ 100, ὅθεν ἔχομεν τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν 299630 μεῖον μιᾶς δεκάδος.

Εἰς τοὺς μικροὺς πίνακας δὲν ἠμποροῦμεν νὰ λάβωμεν μεγαλήτερον βαθμὸν προσεγγίσεως. Ἐὰν τὸ χαρακτηριστικὸν ἦναι μεγαλήτερον τοῦ 5, ὁ βαθμὸς τῆς προσεγγίσεως ἤθελεν εἶναι ἀκόμη μικρότερος. Πρέπει λοιπὸν νὰ μεταχειριζώμεθα ὅσον τὸ δυνατὸν μεγαλητέρους πίνακας, πρὸς ἐκτέλεσιν τῶν ἀκρίβειαν ἀπαιτούντων ὑπολογισμῶν.

„Ἐφαρμογαὶ τῆς θεωρίας τῶν Λογαρίθμων."

Ἄς μεταβῶμεν εἰς τὰς διαφόρους ἐφαρμογὰς τῶν λογαριθμικῶν πινάκων ἐπὶ τῶν ἀριθμητικῶν ἐργασιῶν.

§. 269. **Μέθοδος τῶν τριῶν.** Νὰ προσδιορίσωμεν διὰ λογαρίθμων τὸν $4^{\text{τον}}$ ὅρον τῆς ἀναλογίας,

$$\alpha : \beta :: \gamma : \chi.$$

Ἔχομεν κατ' ἀρχὰς (ἀρ. 209) $\chi = \frac{\beta \times \gamma}{\alpha}$. ὅθεν λαμβάνοντες τοὺς λογαρίθμους, καὶ ἐφαρμόζοντες τὰς ἰδιότητας τῶν ἀρ. 255 καὶ 258, ἔχομεν

$$\lambda o\gamma.\, \chi = \lambda o\gamma.\, \beta + \lambda o\gamma.\, \gamma - \lambda o\gamma.\, \alpha.$$

Μετὰ τὴν πρόσθεσιν τῶν λογαρίθμων τῶν δύο μέσων ἀφαιροῦμεν τὸν λογάριθμον ἀπὸ τὸ γνωστὸν ἄκρον, ἔπειτα ζητοῦμεν εἰς ποῖον ἀριθμὸν ἀνταποκρίνεται ἡ διαφορά. Οὕτω θέλομεν λάβει τὸν ζητούμενον ἀριθμόν.

Ἔστω π. χ. ἡ ἀναλογία 37 : 259 :: 497 : χ· ἔχομεν

$$\lambda o\gamma.\, \chi = \lambda o\gamma.\, 259 + \lambda o\gamma.\, 497 - \lambda o\gamma.\, 37.$$

	λογ. 259	=	2,41330
	λογ. 497	=	2,69636
			5,10966
	λογ. 37	=	1,56820
Λοιπὸν	λογ. χ	=	3,54146
καὶ ἑπομένως	χ	=	3479,1 μεῖον 0,1.

Δεύτερον Παράδειγμα. Ζητεῖται διὰ λογαρίθμων ἡ τιμὴ τοῦ

$$\chi = \frac{37 \times 49 \times 17 \times 175}{29 \times 69 \times 154}$$

ἡ ὁποία ἔκφρασις ἠμπορεῖ νὰ θεωρῆται ὡς ὁ ἄγνωστος ὅρος εἰς τὴν σύνθετον μέθοδον τῶν τριῶν.

Λαμβάνοντες τοὺς λογαρίθμους τῶν 2 μελῶν ἔχομεν.

λογ. χ= λ. 37+ λ. 49+ λ. 17+ λ. 175 — λ. 29 — λ. 69 — λ. 154.

Ἀλλὰ λ. 37 =	1,56820	λ. 29 =	1,46240
λ. 49 =	1,69020	λ. 69 =	1,83885
λ. 17 =	1,23045	λ. 154 =	2,18752
λ. 175 =	2,24304		5,48877
	6,73189		
—	5,48877		
Λοιπὸν λ. χ =	1,24312		

Ὅθεν χ = 17,503 μεῖον 0,001.

§. 270. Συμπληρώματα Ἀριθμητικά. Εἰς τὸ προηγούμενον παράδειγμα ἀφαιρέσαμεν τὸ ἄθροισμα πολλῶν λογαρίθμων ἀπὸ τὸ ἄθρουσμα πολλῶν ἄλλων. Ἀλλ' ἠμποροῦμεν διὰ τῶν ἀριθμητικῶν συμπληρωμάτων ἀντὶ δύο προσθέσεων καὶ μιᾶς ἀφαιρέσεως, αἱ ὁποῖαι συντείνουν τὸν προσδιορισμὸν τοῦ ἀποτελέσματος, νὰ κάμωμεν μίαν μόνην πρόσθεσιν.

Καλεῖται Συμπλήρωμα ἀριθμητικὸν ἑνὸς λογαρίθμου, ὅ,τι λείπει ἀπ' αὐτὸν τὸν λογάριθμον, διὰ νὰ γένῃ ἴσος μὲ δέκα ἀκεραίας μονάδας· καὶ μὲ ἄλλας λέξεις εἶναι τὸ ὁποῖον λαμβάνομεν ἐξαγόμενον ἀφαιροῦντες τοῦτον τὸν λογάριθμον ἀπὸ 10.

Οὕτω συμπλ. ἀριθμ. τοῦ 4,50364 = 10 — 4,50364, καὶ διὰ νὰ τὸ λάβωμεν κατὰ τὸν τῆς ἀφαιρέσεως κανόνα, ἀρκεῖ νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸ εἰς τὰ δεξιὰ τελευταῖον ψηφίον ἀπὸ 10, καὶ ὅλα τ' ἄλλα ψηφία ἀπὸ 9. Ἐντεῦθεν ἔχομεν

συμπλ. ἀριθμ. 4,50364 = 5,49636
Παρομοίως συμπλ. ἀριθμ. 7,32568 = 2,67432.

Τὰ ἀριθμητικὰ συμπληρώματα τῶν λογαρίθμων λαμβάνονται, διὰ νὰ εἴπωμεν οὕτω, κατὰ τὴν θεωρίαν τούτων τῶν λογαρίθμων.

Σ. Κ. Ἐὰν τὸ τελευταῖον ψηφίον εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ λογαριθμου ἦτον 0, ἔπρεπε νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸ πρῶτον εἰς τὰ ἀριστερὰ τοῦ 0, σημαντικὸν ψηφίον ἀπὸ 10, καὶ τ' ἄλλα εἰς τὰ ἀριστερὰ ψηφία ἀπὸ 9.

Οὕτω, συμπλ. ἀριθμ. 5,32570 = 4,67430.
Παρομοίως, συμπλ. ἀριθμ. 8,62400 = 1,37600.

Τούτου τεθέντος, ἂς ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὸ ἄθροισμα τῶν τεσσάρων λογαρίθμων Λ, Λ′, Λ″, Λ‴, τὸ ἐκ τριῶν ἄλλων λογαρίθμων λ, λ′, λ″, ἄθροισμα, καὶ ἂς σημειώσωμεν διὰ Δ τὴν διαφοράν.

Ἔχομεν προφανῶς Δ ἢ $\Lambda+\Lambda'+\Lambda''+\Lambda'''-(\lambda+\lambda'+\lambda'')$.
$= \Lambda+\Lambda'+\Lambda''+\Lambda'''+\overline{10-\lambda}+\overline{10-\lambda'}+\overline{10-\lambda''}-30.$
ἢ, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ αὐτό,

$\Delta = \Lambda+\Lambda'+\Lambda''+\Lambda'''+$ συμπ. $\lambda+$ συμπ. $\lambda'+$ συμπ. $\lambda''-30$. Ὅθεν ἐξάγομεν τὸν γενικὸν τοῦτον κανόνα.

Λάβε τὰ ἀριθμητικὰ συμπληρώματα τῶν ἀφαιρεθησομένων λογαρίθμων, λάβε προσέτι τὸ ὅλον ἄθροισμα τῶν συμπληρωμάτων καὶ τῶν λογαρίθμων, ἀπὸ τῶν ὁποίων πρέπει νὰ γένῃ ἡ ἀφαίρεσις· ἔπειτα ἔκθλιψε ἀπὸ τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ ἐξαγομένου τοσάκις τὸ 10, ἢ τόσας δεκάδας, ὅσα ἔλαβες συμπληρώματα· τὸ δὲ οὕτω ληφθὲν ἐξαγόμενον εἶναι ἡ ζητουμένη διαφορά.

Ἂς ἐπαναλάβωμεν τὸ τελευταῖον παράδειγμα τοῦ προηγουμένου ἀριθμ. Ἔχομεν

λογ. $x =$ λ. 37 + λ. 49 + λ. 17 + λ. 175 — (λ. 29 + λ. 69 + λ. 154),

	λ.	37 =	1,56820
	λ.	49 =	1,69020
	λ.	17 =	1,23045
	λ.	175 =	2,24304
συμπλ.	λ.	29 =	8,53760
συμπλ.	λ.	69 =	8,16115
συμπλ.	λ.	154 =	7,81248
			31,24312

Ἐπειδὴ τὸ ἐξαγόμενον ταύτης τῆς προσθέσεως εἶναι 31,24312, ἀφαιροῦμεν 3 δεκάδας, καὶ ἔχομεν 1,24312 τὴν ζητουμένην διαφοράν.

Τοῦτο εἶναι τὸ ἐν ἀριθμ. 268 ληφθὲν ἐξαγόμενον.

Ἡ χρῆσις τῶν ἀριθμητικῶν συμπληρωμάτων συντέμνει πολὺ τοὺς διὰ λογαρίθμων ὑπολογισμούς.

§. 271. Πρόοδοι κατὰ πηλίκον. Προτείνεται νὰ ἐμβάλωμεν μεταξὺ δύο δοθέντων ἀριθμῶν, ἀριθμόν τινα μ ἀναλογικῶν μέσων.

Ὁ τύπος $x = \sqrt[\mu+1]{\frac{\beta}{\alpha}}$ εὑρεθεὶς ἐν ἀρ. 249 γίνεται διὰ τῆς ἐφαρμογῆς τῶν λογαρίθμων,

$$\lambda o\gamma.\ x = \frac{\lambda o\gamma.\ \beta - \lambda o\gamma.\ \alpha}{\mu + 1}.$$

Ἂς ὑποθέσωμεν π. χ., ὅτι θέλομεν νὰ ἐμβάλωμεν μεταξὺ 3 καὶ 4, 25 ἀναλογικοὺς μέσους.

Ἔχομεν εἰς ταύτην τὴν περίστασιν

$$\alpha = 3,\ \beta = 4,\ \mu = 25.$$

Ὅθεν ἐξάγεται

$$\lambda o\gamma.\ x = \frac{\lambda o\gamma.\ 4 - \lambda o\gamma.\ 3}{26}$$

Εὑρίσκομεν εἰς τοὺς πίνακας . . . λ. 4 = 0,60206
λ. 3 = 0,47712.

Οθεν . . λογ. 4 — λογ. 3 = 0,12494
Λοιπὸν διαιροῦντες διὰ 26 λ. x = 0,00480

Ζητοῦντες δὲ τὸν εἰς τοῦτον τὸν λογάριθμον ἀνταποκρινόμενον ἀριθμὸν, λαμβάνομεν x = 1,0111 μεῖον 0,0001.

Θέλομεν ἤδη νὰ σχηματίσωμεν τὸν 10τον. ἀναλογικὸν μέσον, ἢ τὸν 11τον. ὅρον ταύτης τῆς προόδου;

Ἂς καλέσωμεν χ τὸν ἀναλογικὸν τοῦτον μέσον. Ὅθεν (ἀρ. 248.),

$$\chi = 3\left(\sqrt[26]{\frac{4}{3}}\right)^{10},$$

ὅθεν ἐφαρμόζοντες τὸν λογάριθμον,

$$\lambda o\gamma.\ \chi = \lambda.\ 3 + \frac{10(\lambda.\ 4 - \lambda.\ 3)}{26}.$$

Ἀλλ' ἐλάβομεν ἤδη λ. 4 — λ. 3 = 0,12494.
Ὅθεν . 10(λ. 4 — λ. 3) = 1,24940,
καὶ . $\frac{10}{26}$(λ. 4 — λ. 3) = 0,04805.

Προσέτι . . λ. 3 = 0,47712

Λοιπὸν τέλος πάντων λ. χ = 0,52517.

Ζητοῦντες εἰς ποῖον ἀριθμὸν ἀνταποκρίνεται ὁ λογάριθμος οὗτος, εὑρίσκομεν 3,3510 τὸν ζητούμενον ἀναλογικὸν μέσον.

Αἱ μέθοδοι τοῦ τόκου καὶ τῆς ὑφαιρέσεως αἱ σύνθετοι ἀνάγονται εἰς τὸν προσδιορισμὸν ἑνὸς ὅρου ὁποιασδήποτε τάξεως εἰς τὴν κατὰ πηλίκον πρόοδον.

§. 272. Σύνθετος τόκος. Τεθέντος ἀθροίσματος τινὸς α εἰς ν χρόνους, ἢ μῆνας, πρὸς 1 τὰ 100 τὸν χρόνον ἢ μῆνα, ζητεῖται ἡ τιμὴ του

ἀθροίσματος εἰς τὸ τέλος τοῦ χρόνου ν, ἐμπεριλαμβανομένου εἰς αὐτὴν ὄχι μόνον τοῦ κεφαλαίου α, καὶ τῶν σωρευθέντων τόκων, ἀλλ' ἀκόμη καὶ τῶν τόκων τόκου, εἰς τούτου τοῦ χρόνου τὸ διάστημα.

Ἀνάλυσις. Ἐπειδὴ 100γρ., δίδουσιν ἀθροίσματι, φ, εἰς ἕνα χρόνον, εἶναι φανερὸν (ἀρ. 224 καὶ 225) ὅτι α θέλει δώσει $\frac{\alpha\times\phi}{100}$. αὕτως τὸ κεφάλαιον α θεμένον ἕνα χρόνον, γεννᾷ περιεχομένου καὶ τοῦ κεφαλαίου, $\alpha+\frac{\alpha\times\phi}{100}$ ἢ $\alpha,\left(1+\frac{\phi}{100}\right)$.

Τὸ νέον τοῦτο ἄθροισμα, τὸ ὁποῖον συντίθεται ἀπὸ τὸ πρῶτον κεφάλαιον, καὶ ἀπὸ τὸν εἰς τὸ διάστημα τοῦ πρώτου χρόνου τόκον του, ἠμπορεῖ νὰ θεωρηθῇ, ὡς νέον κεφάλαιον τεθειμένον, διαρκοῦντος τοῦ δευτέρου χρόνου, καὶ σημειόνοντές το διὰ α', θέλομεν εὕρει, ὅτι γίνεται εἰς τὸ τέλος τοῦ δευτέρου χρόνου, περιεχομένου καὶ τοῦ κεφαλαίου, $\alpha'\left(1+\frac{\phi}{100}\right)$ ἢ, ἀντεισαγομένης ἀντὶ α' τῆς τιμῆς του,

$$\alpha\left(1+\frac{\phi}{100}\right)\left(1+\frac{\phi}{100}\right)=\alpha\left(1+\frac{\phi}{100}\right)^2.$$

Σημειόνοντες τὸ νέον τοῦτο κεφάλαιον διὰ α'', θέλομεν λάβει διὰ τὸ ἄθροισμα τούτου τοῦ κεφαλαίου καὶ τοῦ τόκου του εἰς τὴν διάρκειαν τοῦ τρίτου χρόνου,

$\alpha''\left(1+\frac{\phi}{100}\right)$ ἢ, ἀντεισαγομένης ἀντὶ α'' τῆς τιμῆς του,

$$\alpha\left(1+\frac{\phi}{100}\right)^2\left(1+\frac{\phi}{100}\right)=\alpha\left(1+\frac{\phi}{100}\right)^3.$$

Ἐν γένει λοιπὸν σημειόνοντες διὰ ν τὸν ἀριθμὸν τῶν χρόνων, εἰς τὴν διάρκειαν τῶν ὁποίων τὸ κε-

φάλαιον α ἐτέθη, καὶ παριστάνοντες διὰ A τὴν τιμὴν τοῦ κεφαλαίου τούτου μετὰ τῶν τόκων καὶ τόκων τόκου, ἔχομεν

$$A = \alpha\left(1+\frac{\psi}{100}\right)^{\nu} = \alpha\left(\frac{100+\psi}{100}\right)^{\nu}.$$

Πρῶτον παράδειγμα. Ζητεῖται εἰς σύνθετον τόκον ἡ τιμὴ 12000 φράγκων τεθειμένων εἰς 6 χρόνους, πρὸς 5φρ. τὰ $\frac{0}{0}$ τὸν χρόνον.

Ἔχομεν εἰς ταύτην τὴν περίστασιν $\alpha = 12000$, $\psi = 5$, $\nu = 6$.

Λοιπὸν ὁ τύπος γίνεται

$$A = 12000\left(\frac{100+5}{100}\right)^{6} = 12000\,(1,05)^{6}.$$

Δυσκολώτατα ἠθέλαμεν ἐκτελέσει κατ' εὐθεῖαν τὴν πρᾶξιν ταύτην, ἀλλ' ἐφαρμόζοντες τοὺς λογαρίθμους ἔχομεν,

λογ. A = λογ. 12000 + 6 λογ. 1,05

Ἔχομεν δὲ κατὰ τοὺς πίνακας λογ. 1,05 = 0,02119

ὅθεν . . . . 6 λογ. 1,05 = 0,12714.

ἀπ' ἄλλο μέρος . . λογ. 12000 = 4,07918

Λοιπὸν, . . λογ. A = 4,20632

καὶ ἐπομένως . A = 16081 φράγκοις.

Οἱ μικροὶ πίνακες δὲν ἠμποροῦν νὰ δώσουν μεγαλήτερον βαθμὸν προσεγγίσεως.

Σ. Κ. Εἰς τὸ παράδειγμα τοῦτο, τὸ ἄθροισμα τῶν σωρευθέντων τόκων τοῦ κεφαλαίου, καὶ τῶν τόκων τόκου ἀναβαίνει εἰς . . . . 4081φρ.

ἀπ' ἄλλου μέρους, ἐὰν ζητηθῇ (ἀρ. 224).

ὁ ἁπλοῦς τόκος τῶν 12000φρ. διὰ 6 χρόνους πρὸς 5 τὰ $\frac{0}{0}$, εὑρίσκομεν 3600

διαφορὰ . . 481

Ὅθεν βλέπομεν, ὅτι 481 φράγκα ἐκφράζουν τὴν τιμὴν τῶν τόκων τόκου.

Δεύτερον παράδειγμα. Ζητεῖται εἰς σύνθετον τόκον ἡ τιμὴ τῶν 5628φρ. τεθειμένων διὰ 9 μῆνας καὶ $\frac{1}{2}$, πρὸς $\frac{3}{4}$ ἢ 0φρ., 75 τὰ 100 τὸν μῆνα.

Ἄς προσδιορίσωμεν πρῶτον τὴν τιμὴν τοῦ κεφαλαίου εἰς τὸ τέλος τῶν 9 μηνῶν.

Ἐπειδὴ εἰς τὴν περίστασιν ταύτην ὁ μὴν ἐλήφθη ὡς μονὰς τοῦ χρόνου, κάμνομεν εἰς τὸν γενικὸν τύπον,

$$\alpha = 5628\ ,\ \phi = 0,75\ ,\ \nu = 9.$$

ὅθεν

$$A = 5648\left(\frac{100+0,75}{100}\right)^9 = 5628\left(1,0075\right)^9$$

ὅθεν ἐφαρμόζοντες τοὺς λογαρίθμους,

$$\lambda o\gamma.\ A = \lambda o\gamma.\ 5628 + 9.\ \lambda o\gamma.\ 1,0075.$$

Εὑρίσκομεν εἰς τὸν πίνακα	λογ. 1, 0075 =	0,00324
ὅθεν . . . 9	λογ. 1, 0075 =	0,02916
προσέτι	λογ. 5628 =	3,75035
λοιπὸν . .	λογ. A =	3,77951

καὶ ἑπομένως

$$A = 6019^{\varphi\rho.}.$$

Διὰ νὰ λάβωμεν ἔπειτα τὸν τόκον τῶν 6019φρ. διὰ δεκαπέντε ἡμέρας ἢ $\frac{1}{2}$ μῆνα, βοηθούμεθα ἀπὸ τὸν τύπον, $\frac{\alpha\psi\tau}{100}$ (ἀρ. 224), εἰς τὸν ὁποῖον κάμνομεν $\alpha = 6019,\ \psi = 0,75$ καὶ $\tau = \frac{1}{2}$· ὅθεν προκύπτει,

$\frac{\alpha\varphi\tau}{100} = \frac{6019 \times 0{,}75 \times \frac{1}{2}}{100} = \frac{6019 \times 75}{20000} = 23$ μεῖον μονάδος.

Λοιπὸν τέλος πάντων 6042φρ. ἐκφράζουν τὴν τιμὴν τοῦ κεφαλαίου 5628φρ. εἰς σύνθετον τόκον.

§. 273. Ὑφαίρεσις σύνθετος. Αἱ δύο ποσότητες Α καὶ α, αἱ ὁποῖαι εἰσέρχονται εἰς τὸν τύπον

$$A = \alpha\left(\frac{100+\varphi}{100}\right)^{\nu}$$

ἔχουν μεταξύ των τοιαύτην σχέσιν, ὥστε ἂν α ἦναι κεφάλαιόν τι, κατὰ τὸ παρὸν τεθειμένον, Α εἶναι ἡ τιμὴ αὐτοῦ εἰς τὸ τέλος ἑνός τινος χρόνου. Λοιπὸν ἀντιστρόφως, ὅταν Α σημειόνῃ ἄθροισμά τι πληρωτέον εἰς ν μονάδας χρόνων, α ἐκφράζει τὴν παροῦσαν αὐτοῦ τιμήν. Ὑποτίθεται δὲ πάντοτε, ὅτι θεωροῦμεν τοὺς σωρευθέντας τόκους καὶ τόκους τόκου, εἴτε ἀνατοκισμοὺς κεφαλαίου α. Προσέτι ἐξάγομεν ἀπὸ τοῦτον τὸν τύπον,

$$\alpha = \frac{A}{\left(\frac{100+\varphi}{100}\right)^{\nu}},$$

τὸν ὁποῖον δυνάμεθα νὰ θεωρῶμεν, ὡς δίδοντα τὴν παροῦσαν τιμὴν Α τοῦ γραμματείου Α, καὶ πληρωτέαν εἰς ν χρόνους, ἀποβλέποντες εἰς τὸν σύνθετον τόκον τῆς παρούσης ταύτης τιμῆς.

Παράδειγμα. Ζητεῖται ἡ παροῦσα τιμὴ τοῦ ἀθροίσματος 30000 φράγκων πληρωτέων εἰς 7 χρόνους, ὑποτιθεμένου, ὅτι

1ον. Ἡ ὑφαίρεσις εἶναι σύνθετος.

2ον. Ἡ τιμὴ τοῦ τόκου εἶναι πρὸς 6 τὰ 100 τὸν χρόνον.

Κάμνομεν τότε $A = 30000$, $\nu = 7$, $\psi = 6$,

καὶ ὁ τύπος γίνεται $\alpha = \frac{30000}{(1,06)^7}$.

ὅθεν ἐφαρμόζοντες τοὺς λογαρίθμους, ἔχομεν

λογ. α = λογ. 30000 — 7 λογ. 1,06.

Ἔχομεν . . . . . . λογ. 30000 = 4,77712·

προσέτι . λογ. 1,06 = 0,02531

ὅθεν . 7 λογ. 1,06 = 0,17717 . . . — 0,17717

λοιπὸν . . . . λογ. α = 4,29995

καὶ ἑπομένως α = 19950 φρ.

Ἀναζητοῦντες δὲ τὴν παροῦσαν τιμὴν τῶν 30000 κατὰ τὸν κανόνα τῆς ἁπλῆς ὑφαιρέσεως (ὑφαίρ. ἐσωτερικῶς, ἰδὲ ἀρ. 228) εὑρίσκομεν, 21126,76 ἐξαγόμενον διαφέρον τοῦ προηγουμένου κατὰ 1176,76.

Δὲν ἐκτείνομεν περαιτέρω τὰς ἐφαρμογὰς τῶν λογαριθμικῶν πινάκων· τὰ προηγούμενα μᾶς εἶναι ἱκανὰ διὰ νὰ καταλάβωμεν τὴν μεγάλην αὐτῶν ὠφέλειαν.

Λογάριθμοι τῶν Κλασμάτων.

§. 274. Εἰς τὰ προηγούμενα ζητήματα ἐθεωρήσαμεν μόνον τοὺς λογαρίθμους τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν, ἢ τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν, μεγαλητέρων παρὰ τὴν μονάδα. Οἱ λογάριθμοι οὗτοι ἀποτελοῦν μέρος τοῦ πίνακος, τὸν σχηματισμὸν τοῦ ὁποίου ἐδείξαμεν (ἀρ. 261 καὶ 262), ἢ διὰ μέσου τούτων λαμβάνονται εὐκόλως, ὅταν οἱ ἀνταποκρινόμενοι ἀριθμοὶ ἦναι ἀκέραιοι καὶ ὑπερβαίνουν τῶν πινάκων τὰ ὅρια, ἢ ὅταν ἦναι κλασματικοί.

Ἠξεύρομεν δὲ ὅτι εἰς τὸ σύστημα τοῦ Βριγγίου οἱ λογάριθμοι ὅλων τῶν ἀριθμῶν, περὶ τῶν ὁποίων ὡμιλήσαμεν, περιλαμβάνονται μεταξὺ τοῦ 0 καὶ 1, 1 καὶ 2, 2 καὶ 3, 3 καὶ 4 . . . . . δηλαδὴ ὅτι οἱ λογάριθμοι τῶν μεταξὺ τῆς μονάδος καὶ τοῦ ἀπείρου

περιεχομένων ἀριθμῶν περιέχονται αὐτοὶ οἱ ἴδιοι μεταξὺ τοῦ 0 καὶ τοῦ ἀπείρου· οὕτως ὥστε δὲν ὑπάρχει ἀριθμὸς τόσον μικρὸς ἢ τόσον μέγας ἔχων σχέσιν μὲ τὴν μονάδα, ὁ ὁποῖος νὰ μὴ θεωρηθῇ, ὡς ὁ λογάριθμος ἀριθμοῦ μεγαλητέρου τῆς μονάδος.

Φυσικὰ λοιπὸν πρέπει νὰ ζητήσωμεν ἂν τὰ κλάσματα ἔχωσι λογαρίθμους, καὶ ἂν ἔχωσι πῶς τοὺς ἐκφράζουν.

Πρὸς ἐπίλυσιν τῶν ζητημάτων τούτων ἂς ἐπαναλάβωμεν τὴν δεκαπλῆν πρόοδον,

$\div\!\div$ 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : 100000 . . . . . .,

καὶ ἂς παρατηρήσωμεν, ὅτι καθεῖς ὅρος εἶναι ἴσος μὲ τὸν προηγούμενόν του πολλαπλασιασθέντα ἐπὶ 10· καὶ ἀντιστρόφως καθεῖς ὅρος εἶναι ἴσος μὲ τὸν ἀκόλουθόν του, διαιρεθέντα διὰ 10. Ἐπομένως ἐὰν προεκτείνωμεν τὴν πρόοδον ταύτην κάτω τοῦ πρώτου ὅρου 1, διαιρουμένου διαδοχικῶς διὰ τῶν διαφόρων δυνάμεων τοῦ 10, δηλαδὴ διὰ 10, 100, 1000 . . . . ἐκ τοῦ ὁποίου ἔχομεν τὰ κλάσματα $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$ . . . . ἐξάγομεν τὴν νέαν ταύτην πρόοδον,

$$\div\!\div \; \ldots \; \frac{1}{10000} : \frac{1}{1000} : \frac{1}{100} : \frac{1}{10} : 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 \ldots,$$

τὴν ὁποίαν ἠμποροῦμεν νὰ ὑποθέσωμεν ἀρχίζουσαν ἀπὸ κλάσμα τι $\frac{1}{10^{\nu}}$ τόσον, ὅσον θέλομεν μικρόν.

Ἀπὸ ἄλλο μέρος, ἂς ἐπαναλάβωμεν τὴν κατὰ διαφοράν,

$\div$ 0 . 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8 . 9 . . . .,

καὶ ἂς παρατηρήσωμεν, ὅτι καθεῖς ὅρος εἶναι ἴσος μὲ τὸν πρὸ ἑαυτοῦ, αὐξημένον ἀπὸ 1, καὶ ἀντιστρόφως

καθεῖς ὅρος εἶναι ἴσος μὲ τὸν μεθ' ἑαυτὸν, ἠλαττωμένον ἀπὸ 1. Τούτου τεθέντος, ἂς ἐξακολουθήσωμεν τὴν πρόοδον ταύτην εἰς τ' ἀριστερὰ τοῦ πρώτου ὅρου 0 (ἢ κάτω τοῦ 0), ἀφαιροῦντες διαδοχικῶς 1, 2, 3, 4 . . . . ἀπὸ τὸν πρῶτον ὅρον. Ἐντεῦθεν προκύπτουν τὰ ἐξαγόμενα — 1, — 2, — 3, 4, ... καὶ ἐξ αὐτῶν ἡ νέα αὔτη κατὰ διαφορὰν πρόοδος, ÷ . . . — 4 . — 3 . — 2 . — 1 . 0 . 1 . 2 . 3 . 4 . . . , τὴν ὁποίαν ἠμποροῦμεν νὰ ὑποθέσωμεν ἀρχίζουσαν ἀπὸ ὁποιονδήποτε ὅρον — ν, ὄντα ἀκέραιον ἀριθμὸν, καὶ τόσον, ὅσον θέλομεν, μεγάλον.

Ἐντεῦθεν λαμβάνομεν τὸ σύστημα τῶν δύο προόδων

$$\div\!\div \ldots \frac{1}{10000} : \frac{1}{1000} : \frac{1}{100} : \frac{1}{10} : 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : ,$$

$$\div \ldots . -4 . -3 . -2 . 1 . 0 . \; 1 . \; 2 . \; 3 . \; 4 \ldots ,$$

ἑκάστη τῶν ὁποίων διαιρεῖται εἰς δύο μέρη, ἀριθμουμένων ἐν ταὐτῷ καὶ τῶν ὅρων 1 καὶ 0.

Τὸ πρῶτον μέρος τῶν δύο προόδων, θεωρούμενον ἐξ ἀριστερῶν πρὸς τὰ δεξιὰ, εἶναι σύνθετον ἀπὸ ὅρους, οἱ ὁποῖοι περιλαμβάνουν ὅλους τοὺς παρὰ τὴν μονάδα μεγαλητέρους ἀριθμοὺς, καὶ τοὺς λογαρίθμους αὐτῶν· (οἱ λογάριθμοι οὗτοι, ὡς ἤδη ἐπαρατηρήθη, εἶναι ὅλοι οἱ ἀριθμοὶ, οἱ περιεχόμενοι μεταξὺ τοῦ 0 καὶ τοῦ ἀπείρου).

Τὸ δεύτερον μέρος, θεωρούμενον ἐκδεξιῶν πρὸς τ' ἀριστερὰ, εἶναι σύνθετον ἀπὸ ὅρους, οἱ ὁποῖοι περιλαμβάνουν ὅλους τοὺς παρὰ τὴν μονάδα μικροτέρους ἀριθμοὺς, ὡς καὶ τοὺς λογαρίθμους αὐτῶν, οἱ ὁποῖοι εἶναι οἱ ἴδιοι λογάριθμοι τοῦ πρώτου μέρους, ἔχοντες πρὸ ἑαυτῶν τὸ σημεῖον —, τὸ ὁποῖον συντείνει εἰς τὸ

νὰ διακρίνωμεν τοὺς λογαρίθμους τῶν παρὰ τὴν μονάδα μεγαλητέρων ἀριθμῶν, ἀπὸ τοὺς λογαρίθμους τοὺς ἀνταποκρινομένους εἰς μικροτέρους παρὰ τὴν μονάδα ἀριθμούς.

§. 275. Σ. Κ. Διὰ νὰ καταλάβωμεν καλὰ πῶς οἱ λογάριθμοι ὅλων τῶν ἀριθμῶν οἱ περιλαμβανόμενοι μεταξὺ τοῦ 1 καὶ $\frac{1}{10}$, τοῦ $\frac{1}{10}$ καὶ $\frac{1}{100}$ . . . . διαφέρουν μόνον κατὰ τὸ σημεῖον —, ἀπὸ τοὺς λογαρίθμους τοὺς περιλαμβανομένους μεταξὺ τοῦ 1 καὶ 10, τοῦ 10 καὶ 100 . . . . ἂς θεωρήσωμεν λόγου χάριν τὸ κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ περιλαμβανόμενον μεταξὺ 1 καὶ $\frac{1}{10}$, ὥστε νὰ ἦναι $\alpha<\beta$, ἀλλὰ $\beta<10\ \alpha$.

Ἐπειδὴ $\frac{\alpha}{\beta}$ βάλλεται ὑπὸ τὴν μορφὴν $\frac{1}{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)}$, ἕπεται, ὅτι $\frac{\alpha}{\beta}$ εἶναι τὸ περιλαμβανόμενον μεταξὺ 1 καὶ $\frac{1}{10}$ κλάσματος, τὸ ὁποῖον ἀνταποκρίνεται εἰς τὸν κλασματικὸν ἀριθμὸν $\frac{\beta}{\alpha}$, ὅς τις περιλαμβάνεται μεταξὺ 1 καὶ $\frac{1}{10}$ κλάσματος, τὸ ὁποῖον ἀνταποκρίνεται εἰς τὸν κλασματικὸν ἀριθμὸν $\frac{\beta}{\alpha}$, ὅς τις περιλαμβάνεται μεταξὺ τοῦ 1 καὶ 10· καὶ πρόκειται νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι

$$\text{λογ.}\ \frac{\alpha}{\beta} = -\text{λογ.}\ \frac{\beta}{\alpha}.$$

Τῷ ὄντι ἠμποροῦμεν πάντοτε νὰ θεωρῶμεν $\frac{\beta}{\alpha}$, ὡς ἕνα τῶν ἀναλογικῶν μέσων, τοὺς ὁποίους ἔπρεπε νὰ ἐμβάλωμεν μεταξὺ 1 καὶ 10 διὰ νὰ σχηματίσωμεν ὅλους τοὺς ἀριθμοὺς, οἱ ὁποῖοι περιέχονται εἰς αὐτούς. Οὕτω λοιπὸν, καλουμένου μ τοῦ ὁλικοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἀναλογικῶν μέσων, οἱ ὁποῖοι ἐμβάλλονται μεταξὺ 1 καὶ 10, ν δὲ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ὅρων, οἱ ὁποῖοι περιέχονται μεταξὺ τοῦ πρώτου ὅρου 1, καὶ τοῦ ὅρου $\frac{\beta}{\alpha}$, προκύπτει (ἀρ. 249)

$$\frac{\beta}{\alpha}=1\times(\sqrt[\mu+1]{10})^{\nu}=(\sqrt[\mu+1]{10})^{\nu}.$$

Προσέτι ὁ ἐμβαλλόμενος μεταξὺ τοῦ 0 καὶ 1 διαφορικὸς μέσος, ὁ ὁποῖος ἀνταποκρίνεται εἰς τὸν ἀναλογικὸν μέσον $\frac{\beta}{\alpha}$ ἐκφράζεται (ἀρ. 243) διὰ

$$0+\frac{1}{\mu+1}\times\nu=\frac{\nu}{\mu+1}.$$

Οὕτω λοιπὸν ἔχομεν λογ. $\frac{\beta}{\alpha}$ ἢ λογ. $(\sqrt[\mu+1]{10})^{\nu}=\frac{\nu}{\mu+1}$, ἐξαγόμενον σύμφωνον μὲ τὰς ἰδιότητας τῶν ἀρ. 259 καὶ 260.

Παρατηροῦμεν ἤδη, ὅτι διὰ νὰ ἐξακολουθήσωμεν τὴν πρόοδον

$$\div\div\ 1:\sqrt[\mu+1]{10}:(\sqrt[\mu+1]{10})^{2}\ \ldots\ldots\ (\sqrt[\mu+1]{10})^{\nu}\ \ldots\ldots$$

10 . . . ., ἀριστερόθεν τοῦ πρώτου ὅρου 1, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν τὴν 1 διὰ τῆς $1^{\eta\varsigma}$, $2^{\alpha\varsigma}$, $3^{\eta\varsigma}$ . . . .

δυνάμεως τοῦ $\sqrt[\mu+1]{10}$, καὶ ἔχομεν διὰ τὸν $(\nu+1)^{ον}$ ὅρον τῆς νέας ταύτης προόδου,

$$\frac{1}{(\sqrt[\mu+1]{10})^{\nu}} \text{ ἢ } \frac{1}{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)}, \text{ καὶ ἑπομένως } \frac{\alpha}{\beta}.$$

Προσέτι διὰ νὰ ἐξακολουθήσωμεν τὴν κατὰ διαφορὰν πρόοδον,

$$\div\, 0 . \frac{1}{\mu+1} . \frac{2}{\mu+1} \ldots\ldots \frac{\nu}{\mu+1} \ldots . 1,$$

ἀριστερόθεν τοῦ 0, πρέπει κατὰ διαδοχὴν ν' ἀφαιρῶμεν $\frac{1}{\mu+1}$, $\frac{2}{\mu+1}$, $\frac{3}{\mu+1}$ ....., ὅθεν διὰ τὸν $(\nu+1)^{ον}$ ὅρον τῆς προόδου κατὰ διαφορὰν, δηλαδὴ διὰ λογ. $\frac{\alpha}{\beta}$, ἔχομεν $-\frac{\nu}{\mu+1}$, ἢ λογ. $\frac{\beta}{\alpha}$. Λοιπὸν τέλος πάντων λογ. $\frac{\alpha}{\beta} = -$ λογ. $\frac{\beta}{\alpha}$.

Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι ὁ λογάριθμος ἑνὸς κλάσματος εἶν' ἴσος μὲ τὸν λογάριθμον τοῦ κλάσματος, ἀντεστραμμένου, ἔχοντα τὸ σημεῖον. $-$

Οὕτω λογ. $\frac{3}{4} = -$ λογ. $\frac{4}{3} = -$ (λογ. 4 $-$ λογ. 3).

λογ. $\frac{23}{47} = -$ λογ. $\frac{47}{23} = -$ (λογ. 47 $-$ λογ. 23).

Ὅθεν λαμβάνεται ὁ κανών. Ἀφαίρεσε τὸν μικρότερον λογάριθμον ἀπὸ τὸν μεγαλήτερον, καὶ λάβε τὸ ἐξαγόμενον μὲ σημεῖον $-$.

§. 276. Μετὰ τὰς γνώσεις ταύτας, ἂς κάμωμεν καί τινας ἐφαρμογάς.

1ον. Ζητεῖται διὰ λογαρίθμων ἡ τιμὴ τοῦ γινομένου $\frac{3}{7}\times\frac{5}{12}\times\frac{11}{13}$.

Ἔχομεν (ἀρ. 56) $\frac{3}{7}\times\frac{5}{12}\times\frac{11}{13}=\frac{3\times5\times11}{7\times12\times13}$. ὅθεν

(ἀρ. 257.) λογ. $\left(\frac{3}{7}\times\frac{5}{12}\times\frac{11}{13}\right)=-$ λογ. $\frac{7\times12\times13}{3\times5\times11}$.

$=-$ (λογ. 7 + λογ. 12 + λογ. 13 — λογ. 3 — λογ. 5 — λογ. 11)

ἢ μεταχειριζόμενοι τὰ ἀριθμητικὰ συμπληρώματα,

$=-$ (λογ. 7 + λογ. 12 + λογ. 13 + συμπ. λογ. 3 + συμπ. λογ. 5 + συμπ. λογ. 11 — 30). Ἐκτελοῦντες δὲ τὴν ἐντὸς τῆς παρενθέσεως δεικνυομένην ἐργασίαν, γνωρίζομεν ὅτι

$$\text{λογ.}\left(\frac{3}{7}\times\frac{5}{12}\times\frac{11}{13}\right)=-0{,}82074.$$

Καὶ καλοῦντες x τὸν ἀριθμὸν, ὅςτις ἀνταποκρίνεται εἰς 0,82074, ἔχομεν (ἀρ. 275) $-0{,}82074=$ λογ. $\frac{1}{x}$.

Πρέπει λοιπὸν νὰ προσδιορίσωμεν x.

Ἀλλὰ κατὰ τὴν συσταθέντα κανόνα ἀρ. 268 εὑρίσκομεν

0,82074 = λογ. 6,6181 · ὅθεν $x=6,6181$

ἑπομένως $\frac{1}{x}$; εἴτε ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς ἔχει τιμὴν

$\frac{1}{6{,}6181}=0{,}1511$.

Κανὼν Γενικός. Διὰ νὰ εὕρωμεν εἰς ποῖον ἀριθμὸν ἀνταποκρίνεται λογάριθμός τις ἔχων τὸ σημεῖον —, ζητοῦμεν πρῶτον εἰς ποῖον ἀριθμὸν ἀνήκει ὁ λογάριθμος, μὴ θεωρουμένου τοῦ σημείου του, ἔπειτα διαιροῦμεν τὴν μονάδα διὰ τοῦ οὕτω ληφθέντος ἀριθμοῦ, καὶ τὸ πηλίκον, εἰς δεκαδικὰ μεταφερόμενον, εἶναι ὁ ζητηθεὶς ἀριθμός.

Ἠμποροῦμεν ἀκόμη νὰ ὑπολογισθῶμεν ὡς ἀκολούθως.

Βάλλομεν — 0,82074 ὑπὸ τὴν μορφὴν 4 — 0,82074 — 4· δηλαδὴ προσθέτομεν εἰς τὸν προτεθέντα λογάριθμον καὶ ἀφαιροῦμεν 4 μονάδας· ἐντεῦθεν προκύπτει

$$-0,82074 = 3,17926 - 4.$$

Ἀλλ' ἔχομεν κατὰ τοὺς πίνακας, 3,17926 = λογ. 1511, ὅθεν 3,17926 — 4 = λογ. 1511 — λογ. 10000 (ἀρ. 265),

καὶ ἑπομένως,

$$-0,82074 = \text{λογ.}\ \frac{1511}{10000} = \text{λογ.}\ 0,1511.$$

Τὸ τελευταῖον τοῦτο μέσον εἶναι ἐν γένει ἁπλούστερον, καὶ μάλιστα ἀκριβέστερον παρὰ τὸ πρῶτον, ἐπειδὴ εἰς τὴν ὁποίαν ἐλάβομεν τιμὴν τοῦ $\frac{1}{x}$, μὴ ὄντος τοῦ x ἀκριβοῦς διαιρέτου, δὲν ἠμποροῦμεν νὰ λάβωμεν ἰδέαν καθαρὰν προσεγγίσεως, ἐν ᾧ τὸ δεύτερον μέσον μᾶς δίδει ἀκριβῶς τὴν τιμὴν μεῖον 0,0001.

Ἂς προσδιορίσωμεν ἀκόμη τὸν ἀνταποκρινόμενον ἀριθμὸν εἰς τὸν λογάριθμον — 2,35478.

Κατ' ἀρχάς, ἐπειδὴ ὁ λογάριθμος οὗτος περιλαμβάνεται μεταξὺ — 2 καὶ — 3, ὁ ἀνταποκρινόμενος ἀριθμὸς περιλαμβάνεται μεταξὺ $\frac{1}{100}$ καὶ $\frac{1}{1000}$· ἀλλὰ

διὰ νὰ λάβωμεν τὴν τιμὴν αὐτοῦ κατὰ τὸ δεύτερον μέσον, βάλλομεν τὸν λογάριθμον ὑπὸ τὴν μορφὴν $6-2{,}35478-6=3{,}64522-6$.

Ἀλλ' ἔχομεν . . . . $3{,}64522=$ λογ. $4417{,}9$,

λοιπὸν $6-2{,}35478-6$ ἢ $-2{,}35478=$ λογ. $\frac{4417{,}9}{1000000}$.

ἢ $-2{,}35478=$ λογ. $0{,}0044179$.

Αὐτὰ τὰ παραδείγματα εἶναι ἱκανὰ νὰ μᾶς δείξωσιν, ὅτι οἱ ἀριθμοὶ, οἱ ὁποῖοι ἀνταποκρίνονται εἰς λογαρίθμους ἔχοντας τὸ σημεῖον —, ἠμποροῦν νὰ λαμβάνωνται μὲ μεγαλήτεροι βαθμοὶ προσεγγίσεως.

Τὸ δεύτερον μέσον συνίσταται προφανῶς εἰς τὸ νὰ ἀφαιροῦμεν τὸν προτεθέντα λογάριθμον ἀπὸ 4 μονάδας περισσότερον ἀφ' ὅσας ἔχει τὸ χαρακτηριστικὸν, νὰ προσδιορίζωμεν τὸν ἀνταποκρινόμενον ἀριθμὸν εἰς τὸ οὕτω λαμβανόμενον ἀποτέλεσμα, καὶ ἔπειτα νὰ διαιρῶμεν τὸν ἀριθμὸν τοῦτον διὰ τῆς μονάδος ἀκολουθημένης ἀπὸ τόσα μηδενικὰ, ὅσας μονάδας ἐλάβομεν πρὸς ἐκτέλεσιν τῆς ἀφαιρέσεως.

$\overline{2}^{ον}$. Ζητεῖται ἡ $\overline{11}^{η}$ δύναμις τοῦ κλάσματος $\frac{13}{15}$. Ἔχομεν

$$\lambda\gamma.\left(\frac{13}{15}\right)^{11}=\lambda o\gamma.\left(\frac{1}{\frac{15}{13}}\right)^{11}=-\lambda o\gamma.\left(\frac{15}{13}\right)^{11}=-\left(11\ \lambda o\gamma.\ \frac{15}{13}\right).$$

Ἀλλὰ λογ. $\frac{15}{13}=0,06215$· ὅθεν $11 \times$ λογ. $\frac{15}{13}=0,68365$, καὶ ἐπομένως,

λογ. $\left(\frac{13}{15}\right)^{11}=-0,68365=$ λογ. $0,2072$.

Οὕτω $0,2072$ εἶναι ὁ ζητούμενος ἀριθμός.

$\overline{3}^{ον}$. Ζητεῖται ἡ $\overline{7}^{η}$ ῥίζα τοῦ $\frac{2}{3}$. Ἔχομεν

λογ. $\sqrt[7]{\frac{2}{3}}=$ λογ. $\frac{1}{\sqrt[7]{\frac{3}{2}}}=-$ λογ. $\sqrt[7]{\frac{3}{2}}=-\left(\frac{1}{7}\text{ λογ. }\frac{3}{2}\right)$

Ἀλλὰ λογ. $\frac{3}{2}=0,17609$, ἐκ τοῦ ὁποίου $\frac{1}{7}$ λογ. $\frac{3}{2}=0,02515$.,

Λοιπὸν λογ. $\sqrt[7]{\frac{2}{3}}=-0,02515=$ λογ. $0,94374$, καὶ ἐπομένως,

$$\sqrt[7]{\frac{2}{3}}=0,94374.$$

§. 277. Σχόλιον. Εἰς τὴν ἀναζήτησιν τῶν λογαρίθμων τῶν κλασμάτων ἀπαντήσαμεν ἰδιαιτέρους τινὰς ἀριθμοὺς καλουμένους εἰς τὴν Ἄλγεβραν, ἀρνητικοὺς ἀριθμούς, εἰς διάκρισιν τῶν λεγομένων θετικῶν ἢ ἀπολύτων ἀριθμῶν· Εἰς τὴν θεωρίαν τῶν λογαρίθμων εἶναι οἱ ἀρνητικοὶ ἀριθμοὶ τόσον ἀναγκαῖοι,

ὅσον καὶ οἱ θετικοὶ, ἐπειδὴ χωρὶς αὐτῶν δὲν ἠμποροῦμεν νὰ ἐκφράσωμεν τοὺς λογαρίθμους τῶν κλασμάτων. Τοῦτο εἶναι τόσον ἀληθὲς, ὥστε καὶ ἐὰν καθ' ὑπόθεσιν (καὶ ὑπόθεσιν πολλὰ ἀποδεκτὴν) ἀντὶ τῶν δύο προειρημένων προόδων, ἐφ' ὧν ἐστηρίξαμεν ὅλας τὰς περὶ λογαρίθμων θεωρίας μας, παρεδεχώμεθα τὰς δύο ἀκολούθους,

$$\div\div\ 1 : \frac{1}{10} : \frac{1}{100} : \frac{1}{1000} : \frac{1}{10000} \ldots\ldots,$$

$$\div\ 0 . 1 . 2 . 3 . 4 \ldots\ldots,$$

κατὰ τὰς ὁποίας ὅλα τὰ κλάσματα ἤθελαν λάβει θετικοὺς λογαρίθμους καὶ τόσον μεγαλητέρους, ὅσον μικρότερα ἤθελαν εἶναι τὰ κλάσματα, πάλιν μ' ὅλον τοῦτο οἱ λογάριθμοι τῶν ἀριθμῶν τῶν μεγαλητέρων τῆς μονάδος, δηλαδὴ . . . 1, 10, 100, 1000, . . . καὶ ὅλων τῶν ἐν τῷ μεταξὺ ἀριθμῶν, ἐξ ἀνάγκης ἤθελαν παρασταθῆ διὰ τῆς σειρᾶς τῶν ἀρνητικῶν ἀριθμῶν 0, — 1, — 2, — 3 . . . καὶ ὅλων τῶν εἰς τούτους περιλαμβανομένων.

Ἄλλος τρόπος τοῦ θεωρεῖν τοὺς Λογαρίθμους.

§. 278. Ὁ Εὔλερος εἰς τὰ τῆς Ἀλγέβρας στοιχεῖά του θεωρεῖ ἀγχινούστατα μεταξὺ τῶν διαφόρων τῆς ἀριθμητικῆς ἐργασιῶν τοὺς λογαρίθμους μὲ νέον τινὰ τρόπον, τὸν ὁποῖον καὶ ἡμεῖς ἤδη γνωστοποιοῦμεν.

„Ἂς σημειωθῶσι διὰ α, β, γ, τρεῖς ὁποιοιδήποτε ἀριθμοὶ, καὶ ἂς προτεθῆ τὸ γενικὸν τοῦτο ζήτημα.“ Δύο τινὲς ἐκ τῶν τριῶν τούτων ποσοτήτων

ἀφ' οὗ γνωσθῶσι, νὰ προσδιορίσωμεν τὴν τρίτην, ἐκτελοῦντες μίαν τῶν ἐκτελουμένων ἐργασιῶν ἐπάνω εἰς τὰς δύο δοθείσας."

Ἀναμφιβόλως ἡ ἁπλουστέρα καὶ ἡ ἀμέσως πρώτη εἰς τὸ πνεῦμά μας παριστανομένη ἐργασία εἶναι ἡ πρόσθεσις.

Προτεθείσθω λοιπὸν νὰ εὕρωμεν γ διὰ τῆς προσθέσεως τῶν δύο ἀριθμῶν α καὶ β.

Ἡ δὲ σχέσις αὕτη ἡ ἐνυπάρχουσα εἰς τοὺς τρεῖς ἀριθμοὺς α, β, γ, θέλει ἐκφρασθῆ διὰ τῆς ἰσότητος,

$$\alpha + \beta = \gamma \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

ἡ ὁποία ἐν ταὐτῷ δίδει

$$\alpha = \gamma - \beta \text{ ἢ } \beta = \gamma - \alpha.$$

Ἐκ τοῦ ὁποίου βλέπομεν, ὅτι ἐὰν ἀντὶ νὰ γυρεύωμεν γ, ζητῶμεν τὴν τιμὴν τοῦ α ἢ τοῦ α ἢ τοῦ β, ἡ αὐτὴ ἰσότης (1) ἤθελε μᾶς δώσει τὴν ἄγνωστον ποσότητα μὲ ἀφαίρεσιν.

Οὕτω λοιπὸν ἡ πρόσθεσις καὶ ἡ ἀφαίρεσις συνδέονται πρὸς ἀλλήλας μὲ τὴν αὐτὴν ἐξίσωσιν $\alpha + \beta = \gamma$.

Σ. Κ. Ἐὰν εἰς τὴν ἰσότητα $\alpha = \gamma - \beta$ ὑποτεθῇ $\gamma < \beta$, ἡ τιμὴ τοῦ α καταντᾷ φανερὰ εἰς ἀρνητικὸν ἀριθμόν. Ἡ δὲ γνῶσις τοιούτων ἀριθμῶν κρέμαται ἀπὸ ἀδυνάτους ἀφαιρέσεις.

Ἡ πρόσθεσις ἀριθμοῦ τινος πολλαῖς φοραῖς εἰς τὸν ἑαυτόν του, μᾶς φέρει εἰς τὸν πολλαπλασιασμόν.

Προτεθείσθω ἤδη νὰ εὕρωμεν γ διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν ἀριθμῶν α καὶ β.

Ἡ σχέσις αὕτη θέλει δειχθῆ διὰ τῆς ἰσότητος,

$$\alpha\beta = \gamma \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

ἐκ τῆς ὁποίας ἐξάγομεν $\alpha = \frac{\gamma}{\beta}$ ἢ $\beta = \frac{\gamma}{\alpha}$.

Λοιπὸν, ἐὰν ἀντὶ νὰ γυρεύωμεν γ, κατὰ τὴν (2) ἰσότητα, ζητήσωμεν τὴν τιμὴν τοῦ α ἢ τοῦ β, ἡ διαίρεσις τοῦ γ διὰ β, ἢ τοῦ γ διὰ α θέλει δώσει τὴν τιμὴν τοῦ ἀγνώστου ἀριθμοῦ.

Οὕτως ὁ πολλαπλασιασμὸς καὶ ἡ διαίρεσις συνδέονται πρὸς ἄλληλα διὰ τῆς αὐτῆς ἰσότητος . . . . $\alpha\beta=\gamma$.

Σ. Κ. Ὑποτιθεμένου $\gamma<\beta$ ἢ γ μὴ διαιρετοῦ ἀκριβῶς διὰ β, ἡ ἔκφρασις $\frac{\gamma}{\beta}$ εἶναι κλάσμα, ἢ κλασματικὸς ἀριθμός. Λοιπὸν τὰ κλάσματα πηγάζουσιν ἀπὸ διαιρέσεις ἀδυνάτους εἰς τὸ νὰ ἐκτελεσθῶσιν ἀκριβῶς.

Τέλος πάντων ὁ πολλαπλασιασμὸς ἀριθμοῦ τινος πολλάκις ἐφ' ἑαυτὸν μᾶς φέρει εἰς τὸν σχηματισμὸν τῶν δυνάμεων.

Ἂς ὑποθέσωμεν λοιπὸν, ὅτι θέλομεν νὰ λάβωμεν γ, πολλαπλασιάζοντες α ἐφ' ἑαυτὸ μεῖον μιᾶς τοσάκις, ὅσας μονάδας περιέχει τὸ β.

Ἡ σχέσις αὕτη θέλει ἐκφρασθῆ διὰ τῆς ἰσότητος $\alpha^{\beta}=\gamma$ . . . . (3)· ὅθεν κατὰ πρῶτον ἐξάγομεν,

$$\alpha=\sqrt[\beta]{\gamma}.$$

Ἐκ τοῦ ὁποίου δείχνεται, ὅτι διὰ νὰ λάβωμεν γ, γνωρίζοντες α καὶ β, πρέπει νὰ ὑψώσωμεν εἰς δυνάμεις, καὶ ὅτι διὰ νὰ λάβωμεν α, γνωρίζοντες γ καὶ β, πρέπει νὰ ἐξάξωμεν ῥίζας.

Ἀλλὰ τώρα ἐὰν γνωρίζωμεν α καὶ γ, πῶς νὰ εὕρωμεν β;

Πρὶν ἀποκριθῶμεν εἰς τοῦτο τὸ ζήτημα, ἃς ἀνακεφαλαιώσωμεν ὅ, τι εἴπαμεν.

Ἡ ἰσότης $\alpha+\beta=\gamma$ συνάπτει τὰς δύο γνωστὰς ἐργασίας ὑπὸ τὸ ὄνομα τῆς προσθέσεως καὶ ἀφαιρέσεως· ἡ δευτέρα τῶν δύο τούτπν ἐργασιῶν δύναται προσέτι νὰ δώσῃ ἀρνητικοὺς ἀριθμούς.

Ἡ ἰσότης $\alpha\beta=\gamma$ συνάπτει τὸν πολλαπλασιασμὸν καὶ τὴν διαίρεσιν, ὅθεν γεννᾶται ἡ ἰδέα τοῦ κλάσματος ἢ τοῦ κλασματικοῦ ἀριθμοῦ.

Ἂς παρατηρήσωμεν δὲ ἀκόμη, ὅτι εἰς κάθε μίαν ἀπὸ τὰς δύο ἰσότητας $\alpha+\beta=\gamma$, $\alpha\beta=\gamma$, ὁ ἀριθμὸς α ἢ ὁ ἀριθμὸς β λαμβάνεται διὰ τῆς αὐτῆς ἐργασίας τῆς ἐπὶ τῶν δύο γνωστῶν ποσοτήτων ἐκτελουμένης.

Προσέτι ἡ ἰσότης $\alpha^\beta=\gamma$ συνάπτει τὸν σχηματισμὸν τῶν δυνάμεων καὶ τὴν ἐξαγωγὴν τῶν ῥιζῶν, ὅθεν γεννῶνται οἱ ἀσύμμετροι ἀριθμοί.

Ὑπάρχει ὅμως ἡ διαφορὰ αὕτη μεταξὺ αὐτῆς τῆς ἰσότητος καὶ τῶν δύο πρώτων, ὅτι πρὸς εὕρεσιν τοῦ α ἀρκεῖ ἐξαγωγή τις ῥίζης, ἐν ᾧ πρὸς εὕρεσιν τοῦ β, χρειάζεται μερικωτάτη τις πρᾶξις, ἥτις θέλει εἶναι τρόπον τινὰ ἑβδόμη πρᾶξις τῆς ἀριθμητικῆς. Ἐφαρμόζοντες ἤδη εἰς τὴν ἰσότητα $\alpha^\beta=\gamma$ τὴν ἰδιότητα τοῦ ἀρ. 259 ἔχομεν, $\beta\,\text{λογ.}\,\alpha=\text{λογ.}\,\gamma$.

ὅθεν ἐξάγεται . . . . $\beta=\dfrac{\text{λογ.}\,\gamma}{\text{λογ.}\,\alpha}$,

δηλαδὴ ἡ τιμὴ τοῦ β λαμβάνεται διὰ λογαρίθμων.

§. 279. Ἂς κάμωμεν καίτινας ἐφαρμογάς.

Ὑποτεθείσθω εἰς τὴν ἰσότητα $\alpha^\beta=\gamma$, $\alpha=3$ καὶ $\gamma=81$, τότε γίνεται

$$3^\beta=81\cdot\ \text{ὅθεν}\ \beta=\frac{\text{λογ.}\,81}{\text{λογ.}\,3},$$

Ἀλλὰ λογ. $81=1{,}90849$, λογ. $3=0{,}47712$,

$$\text{λοιπὸν}\ \beta=\frac{1{,}90849}{0{,}47712}=4+\frac{1}{47712}$$

Ἀμελοῦντες τὸ πολλὰ μικρὸν κλάσμα $\frac{1}{47712}$, καὶ τὸ ὁποῖον προέρχεται ἐκ τοῦ, ὅτι οἱ λογάριθμοι δὲν εἶναι ποτὲ ἀκριβεῖς, εὑρίσκομεν $\beta = 4$, καὶ τέλος πάντων,

$$3^4 = 81.$$

Προτεθείσθω ἔτι τὸ ἀκόλουθον ζήτημα.

Ὁ πληθυσμὸς τῶν κατοίκων ἑνὸς τόπου αὐξάνει κάθε χρόνον κατὰ $\frac{1}{50}$ πλειότερον ἀφ' ὅσον ἦτον εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ χρόνου. Ζητεῖται μετὰ πόσους χρόνους θέλει διπλασιασθῇ ὁ πληθυσμός;

Ἂς σημειώσωμεν διὰ α τὸν πληθυσμὸν εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ πρώτου χρόνου, καὶ διὰ α', α'', α''' τοὺς εἰς τὴν ἀρχὴν τῶν ἀκολούθων χρόνων πληθυσμούς.

Ἐπειδὴ κατὰ τὴν ὑπόθεσιν ὁ πληθυσμὸς α ηὐξήθη εἰς τὸ τέλος τοῦ πρώτου χρόνου κατὰ $\frac{1}{50}$ πλειότερον ἀφ' ὅσον ἦτον εἰς τὴν ἀρχὴν, θέλει γένει εἰς τὸ τέλος τούτου τοῦ χρόνου, ἢ εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ δευτέρου $\alpha + \frac{\alpha}{50} = \alpha\left(1 + \frac{1}{50}\right)$, ἢ α' κατὰ τὰς ὁποίας ἐσυμφωνήσαμεν ἀρχάς.

Ἐπειδὴ εἰς τὸ τέλος τοῦ δευτέρου χρόνου ὁ πληθυσμὸς α' αὐξάνεται ἀκόμη κατὰ $\frac{1}{50}$, εἰς τὴν ἀρχὴν τούτου τοῦ χρόνου θέλει γένει,

$$\alpha' + \frac{\alpha'}{50} = \alpha'\left(1 + \frac{1}{50}\right) = \alpha'\left(\frac{51}{50}\right).$$

ἤ, εἰσαγομένης ἀντὶ α′ τῆς τιμῆς του,

$$=\alpha\left(\frac{51}{50}\right)^2=\alpha''$$

Θέλει δὲ εὑρεθῆ διὰ τὸν πληθυσμὸν εἰς τὸ τέλος τοῦ τρίτου χρόνου,

$$\alpha''\left(\frac{51}{50}\right)=\alpha\left(\frac{51}{50}\right)^3,$$

καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

Λοιπὸν ἐὰν χ σημειόνῃ τὸν ἄγνωσσον τῶν χρόνων ἀριθμὸν,

$\alpha\left(\frac{51}{50}\right)^{\chi}$ ἐκφράζει τὸν πληθυσμὸν τοῦ τελευταίου χρόνου.

Ἀλλ᾽ εἰς τὴν ἔκφρασιν αὐτὸς παριστάνεται διὰ 2α, ἔχομεν λοιπὸν τὴν ἰσότητα

$$\alpha\left(\frac{51}{50}\right)^{\chi}=2\alpha,$$

καὶ ἐκθλίβοντες τὸν κοινὸν τοῦτον παράγοντα λαμβάνομεν

$$\left(\frac{51}{50}\right)^{\chi}=2\cdot \text{ ὅθεν } \chi=\frac{\lambda o\gamma.\ 2}{\lambda o\gamma.\left(\frac{51}{50}\right)}=\frac{\lambda o\gamma.\ 2}{\lambda.\ 51-\lambda.\ 50.}$$

Ζητοῦντες εἰς τοὺς πίνακας τοὺς λογαρίθμους τοῦ 2 καὶ 51, καὶ 50, εὑρίσκομεν μετὰ τοὺς ὑπολογισμούς,

$$\chi=35+\frac{3}{860}.$$

Λοιπὸν εἰς τὸ τέλος τῶν 35 χρόνων σχεδὸν θέλει διπλασιασθῆ ὁ πληθυσμός.

Οἱ λογάριθμοι ἄρα σχηματίζουν ἰδιαιτέρας ἐργασίας, ἀναποφεύκτους εἰς τὴν ἐπίλυσιν μερικῶν τινῶν ζητημάτων.

§. 280. Περὶ τῶν Λογαρίθμων, ὡς ἐκθετῶν θεωρουμένων.

Ἐὰν εἰς τὴν ἰσότητα $\alpha^{\beta} = \gamma$, ἥτις δίδει,

$$\beta = \frac{\lambda o\gamma.\ \gamma}{\lambda o\gamma.\ \alpha}$$

ὑποτεθῇ α ἡ βάσις τοῦ λογαριθμικοῦ συστήματος, προκύπτει·

. . . . λογ. $\alpha = 1$
ὅθεν $\beta =$ λογ. γ. καὶ ἑπομένως . . . . $\alpha^{\lambda o\gamma.\gamma} = \gamma$
Ἠθέλαμεν λάβει προσέτι δι' ἄλλους ἀριθμοὺς γ', γ'', γ'''
$\beta' =$ λογ. γ' . . . . καὶ ἑπομένως . . . $\alpha^{\lambda o\gamma.\gamma'} = \gamma'$
$\beta'' =$ λογ. γ'' . . . . $\alpha^{\lambda o\gamma.\gamma''} = \gamma''$
$\beta''' =$ λογ. γ''' . . . . $\alpha^{\lambda o\gamma.\gamma'''} = \gamma'''$
— — — — — — — — — —
— — — — — — — — — —

Ὅθεν βλέπομεν, ὅτι οἱ λογάριθμοι τῶν ἀριθμῶν ἠμποροῦν νὰ θεωρῶνται ὡς ἐκθέται τῶν δυνάμεων, εἰς τὰς ὁποίας πρέπει νὰ ὑψωθῇ ἀμετάβλητός τις ἀριθμὸς α, διὰ νὰ γεννήσῃ ὅλους τούτους τοὺς ἀριθμούς.

Καὶ οὕτω τῷ ὄντι τοὺς θεωροῦμεν εἰς τὴν Ἄλγεβραν.

ΤΕΛΟΣ.